数学工房・名古屋公開講座　講義ノート

Cauchy の不等式と高次元空間の発見

講師：桑野耕一（数学工房）

日時：2009 年 4 月 29 日（水・祝）
場所：SEA 科学教育研究会

主催：数学工房
後援：SEA

（ノート作成　青木光博）

ご挨拶

数学工房の名古屋での公開講座は今年で８回目になります。若い皆さんにお話しできる、貴重な機会なので、今回は、現代数学では、ごくポピュラーな基礎概念であるにもかかわらず、その自然な成立の経緯が余り取り上げられることのない多次元空間の概念について、お話ししたいと思います。

多次元空間と言うのは、点・平面、空間とその延長としての高次元空間を統一した概念です。多次元空間が本格的に数学の対象になったのは、比較的新しく１９世紀の半ばを過ぎてからでした。最初はためらいがちに、用心深く。そして１９世紀の後半になると、何のためらいもなく、一般の次元の幾何学が、論じられるようになり、２０世紀初頭には、無限次元の世界が数学の基本的な対象として取り込まれます。１７世紀に、数学的モデルにより自然現象を解明するという方法を G.Galilei が提唱しました。このアイデアが同じ１７世紀に発見された、図形を式で表す Descartes の解析幾何の考え方と結び付いて１８世紀の解析学（力学）の大発展になりました。この発展が必然的に $n(\geqq 3)$ 次元空間の幾何学を準備したのです。一般に、解析学では、問題の対象を幾つかの変数と呼ばれる関数の組 $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ で表示し、それらの満たす関係式（方程式や不等式）を研究します。図形を式で表す方法（解析幾何学）の発展は、このような関係式を一般化された図形の探求と見る事を可能にしたのです。（古典的な解析幾何では、図形の関係を式にして、方程式や不等式に帰着させたわけです。）そこに式があればこれは何らかの一般化された幾何学を考えることになるだろうと思うことはそれ程不思議ではないでしょう。

以上のように多次元空間の概念の成立は解析学 (微積分) の発展と密接に結び付いています。この事情を Lagrange-Cauchy の恒等式と Cauchy-Schwarz の不等式の一般化の理解を通じて 御一緒に追体験してもらいたいと思ったのです。

多次元空間を考えることは、現在の数学を展開する場としては、ごくポピュラーなことで、無限次元の空間ですら、ごく自然なものとして何のためらいもなく扱われています。実際、積分学の基礎付けでもその方が自然であることが分かっています。

このお話が少しでも真剣に数学に取り組まれる皆さんのヒントになればと思います。最後に、熱心に、私の拙い話を聴いてくださった参加者の皆さんと、機会と場所を提供して下さり、この講座をいつものように裏側から支えてくださった吉本先生をはじめとする SEA のスタッフの皆さんに感謝します。

数学工房 桑野耕一 ２００９年 7月２０日

はじめに

このノートは、2009 年 4 月 29 日に SEA 科学教育研究会（名古屋市）において行われた、数学工房の公開講座「Cauchy の不等式と高次元空間の発見」での桑野耕一先生（数学工房）の講演を基に作成したものです。ここではノート作成者の責任の下に、当日の講義とこのノートのあらすじを書いておきます。

まず第 1 章では、高校生の皆さんには良く知られた不等式を丁寧に一般化するところからはじまります。ここでいう不等式の一般化とは、不等式に登場する変数を 2 変数から 3 変数、そして n 変数とすること、または和を積分の形に書き直すことをいいます。桑野先生はこれらを歴史的な解説とともに、Cauchy の不等式の Schwarz による幾何的な証明などを解説され、聞き手の想像力を n 次元の空間の幾何へと羽ばたかせて下さいます。

続く第 2 章では、第 1 章で得られた知見を 3 次元空間で定式化します。ここでは第 3 章で登場する n 次元空間の考え方を、ひとまず 3 次元空間で考えることにより、ともすれば形式的な規則・操作と考えがちな代数規則・操作（行列や行列式など）が、実はエレガントな幾何的意味付けを持っている（7 ページの図など）ことが示されます。この辺りのお話は代数と幾何が織りなす鮮やかな世界に、講義を聴かれた皆さんも「目から鱗」のお話だったのではないでしょうか。

最後に第 3 章で n 次元空間の定式化を行います。第 1 章、第 2 章と聴き（読み）進められた皆さんには、もはや章のはじめの n 次元空間の代数的定義は自然なものと感じられるでしょう。この章の見所は n 次元空間という空間が 3 次元以下の空間とは逆に、代数的規則から幾何的な見方ができることが示されていることです。数学の問題は「幾何的に考え、代数的に解け」という名言がありますが、この章の内容は皆さんが n 次元空間の問題を解くためのよい助けとなるでしょう。実際に 2 節や 3 節の一連の考え方・計算は大学の数学でも良く用いられるものです。

最後に、公開講座で素晴らしい講演をしてくださり、またこのノートに加筆して頂き、序文をお寄せいただいた桑野先生に深く感謝致します。また、ノート作成者の原稿を丁寧に読み返して頂き、誤字・誤植を正して下さいました、SEA 科学教育研究会の吉本先生、杉村先生に感謝します。ただし、それでも誤植が残っている場合は先生方ではなく、ノート作成者に責任があることを述べておきます。

このノートが少しでも桑野先生の講義の魅力を伝え、皆さんの数学学習のお役に立つことを願って。

ノート作成者
2009 年 8 月

目次

1 Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式

古代から知られていた等式に次のものがあります[*1]。

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \tag{1.1}$$

というものです。

さてフランスの数学者 Lagrange（ラグランジュ）は 1773 年にこれを 3 変数の場合に拡張しました。

Lagrange の恒等式

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2 \tag{1.2}$$

となります。

1821 年、同じくフランスの数学者 Cauchy（コーシー）はさらに n 変数の場合に拡張しました。

Cauchy の恒等式と不等式

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \sum_{1 \leqq j < k \leqq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 \tag{1.3}$$

この式において、特に右辺は非負ですから、次の不等式が成立することが分かります。

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) \geqq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2$$

この下の式が Cauchy の不等式とよばれるものです。

ここで式 (1.3) の和記号の読み方を注意します。$n = 3$ ならば式 (1.3) は Lagrange の恒等式になるはずですね。確かに左辺は、

$$\sum_{j=1}^{3} a_j^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \qquad \sum_{j=1}^{3} b_j^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \qquad \sum_{j=1}^{3} a_j b_j = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

です。最後に右辺の総和記号 $\displaystyle\sum_{1 \leqq j < k \leqq 3}$ は以下のように読みます。和の条件 $1 \leqq j < k \leqq 3$ を満たす (j, k) の組は、$(j, k) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ の三つですから、このそれぞれの場合を書き下すと、

$$\sum_{1 \leqq j < k \leqq 3} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

となり、確かに Lagrange の恒等式になります。

[*1] この恒等式は Diophantus（250-300 年頃）によって取り上げられています。Fermat の問題（$x^n + y^n = z^n$, $(x, y, z :$ 整数$)$ をみたす非自明解は存在しない）のもとになったピタゴラス数と関係して扱われています。

さて、Cauchy の等式は 1859 年 Bunyakovsky（ブニャコフスキ）によって証明なしで積分の形で表されました。「数列」には「関数」、「和」には「積分」を対応させます。これは私（桑野）の推測ですが、Lagrange の恒等式の積分形を見通して、自明な結果と考えたのではないかと思います。

Lagrange の恒等式の積分形

区間 $[\alpha,\beta]$ 上の連続関数 $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ に対して、

$$\int_\alpha^\beta (f(\xi))^2\,d\xi\int_\alpha^\beta (g(\xi))^2\,d\xi-\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)\,d\xi\right)^2=\iint_J (f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi))^2\,d\xi d\eta$$

となります[*2]。ただし、右辺の J は ξ と η で張られる平面内の領域 $J=\{(\xi,\eta)|\alpha\leqq\xi\leqq\eta\leqq\beta\}$ を表します。この場合も右辺は非負ですから、次の不等式が成立します。

Bunyakovsky の不等式

$$\int_\alpha^\beta (f(\xi))^2\,d\xi\int_\alpha^\beta (g(\xi))^2\,d\xi\geqq\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)\,d\xi\right)^2 \tag{1.4}$$

ここで、

$$（等号成立）\Leftrightarrow \text{ある } \lambda\in\mathbb{R} \text{ が存在して、} g=\lambda f$$

です。

さらに 1885 年、H. A. Schwarz（シュヴァルツ）は極小曲面[*3]問題の基礎補題として次の形のバリエーションを得ました。ただし Bunyakowsky の仕事は当時ヨーロッパでは、全く知られておらず、Schwarz の結果は Bunyakovsky の仕事から全く独立な拡張です。このときに与えた Schwarz の証明がその単純さ故に、現在の一般化された Cauchy の不等式の証明のスタンダードになっています。

Schwarz の不等式

有界領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ と D 上の 2 つの関数 $f,g:D\to\mathbb{R}$ に対して、

$$\int_D (f(\xi,\eta))^2\,d\xi d\eta\int_D (g(\xi,\eta))^2 d\xi d\eta\geqq\left(\int_D (f(\xi,\eta))(g(\xi,\eta))\,d\xi d\eta\right)^2$$

ここで、

$$（等号成立）\Leftrightarrow \text{ある } \lambda\in\mathbb{R} \text{ が存在して、} g=\lambda f$$

です。

ただしこの不等式は（実用上）、

$$\int_D (g(\xi,\eta))^2\,d\xi d\eta>0$$

すなわち、「g は D 上で恒等的に 0 でないとき」に意味を持ちます。

練習問題　上の恒等式 (1.1)、(1.2) を示して下さい。

[*2] ここでギリシャ文字である ξ と η はそれぞれ「グザイ」、「エータ」とよみます。

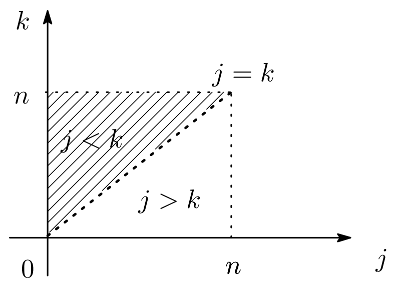
[*3] 直観的には針金で空間曲線の枠を作り、その曲線を境界とする曲面の中で面積が最小のものを極小曲面といいます。石鹸液に浸して静かに引き上げる時張られる膜がその条件を満たします。

さてここで Cauchy の不等式 (1.3) を証明してみましょう。

証明　まず、左辺。

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \qquad \text{（添字を違う記号で書くのがポイント）}$$
$$= \sum_{1\leqq j\leqq n, 1\leqq k\leqq n} a_j^2 b_k^2$$

ここで次の図を見て下さい。



上式最後の和記号は $n \times n$ の正方形上の格子点全てにわたって足し合わせることを意味しています。ところが、この格子点たちは $j > k$ のとき、$k > j$ のとき、そして $k = j$ のときの三つの場合に分けることが出来ます。故に、

$$\sum_{1\leqq j\leqq n, 1\leqq k\leqq n} a_j^2 b_k^2 = \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_j^2 b_k^2 + \sum_{1\leqq k<j\leqq n} a_j^2 b_k^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 \tag{1.5}$$

ここで 2 番目の総和記号の添字 j と k の役割を交換しますと、

$$\text{式 (1.5)} = \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_j^2 b_k^2 + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_k^2 b_j^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 \tag{1.6}$$

となります。

次に右辺。

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) = \sum_{1\leqq j\leqq n, 1\leqq k\leqq n} a_j b_k a_k b_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2 + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_j b_k a_k b_j + \sum_{1\leqq k<j\leqq n} a_j b_k a_k b_j$$

ここで最後の項の和の添字 j と k を交換します。この交換によって積 $a_j b_k a_k b_j$ は不変だから、

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2 + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_j b_k a_k b_j + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_k b_j a_j b_k$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2 + 2 \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_j b_k a_k b_j \tag{1.7}$$

よって、式 (1.6) と式 (1.7) より、

$$
\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 = \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_j^2 b_k^2 - 2\sum_{1\leqq j<k\leqq n}(a_j b_k)(a_k b_j) + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} a_k^2 b_j^2
$$
$$
= \sum_{1\leqq j<k\leqq n}\{(a_j b_k)^2 - 2(a_j b_k)(a_k b_j) + (a_k b_j)^2\}
$$
$$
= \sum_{1\leqq j<k\leqq n}(a_j b_k - a_k b_j)^2
$$

となり、Cauchy の恒等式が証明されました。

（証明終わり）

ちなみに上の方法を真似することで Bunyakovsky の方程式（積分バージョン）も示すことが出来ます。

次に H. A. Schwarz による別証明を紹介します。Bunyakovsky の不等式 (1.4) を例にとって証明しましょう。

証明 (Bunyakovsky の恒等式の Schwarz による証明) さて、この不等式を証明したいのですが、区間 $[\alpha, \beta]$ において、f が恒等的に 0、すなわち $f \equiv 0$ のときは両辺が 0 であり、不等号の成立は明らかです。では $f \not\equiv 0$ としましょう。このとき、

$$
\int_{\alpha}^{\beta}(f(\xi))^2\,d\xi > 0 \tag{1.8}
$$

です[*4]。ここで、t の関数 $\psi(t)$ を次で定義します。

$$
\psi(t) := \int_{\alpha}^{\beta}(tf(\xi) - g(\xi))^2 d\xi, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.9}
$$

$\psi(t)$ に関してまず分かることがあります。それは、被積分関数が非負ですので、全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\psi(t) \geqq 0$ です。一方で式 (1.9) より、

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_{\alpha}^{\beta}\{t^2(f(\xi))^2 - 2tf(\xi)g(\xi) + (g(\xi))^2\}\,d\xi \\
&= At^2 - 2Bt + C, \qquad (A > 0)
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

です（ただしここここで、

$$
A := \int_{\alpha}^{\beta}(f(\xi))^2\,d\xi > 0 \ (\text{cf：式 (1.8) より}), \quad B := \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)g(\xi)\,d\xi, \quad C := \int_{\alpha}^{\beta}(g(\xi))^2\,d\xi
$$

と置きました)。

さらに $\psi(t)$ は t について 2 次関数で、最初に確認したように全ての t に対して $\psi(t) \geqq 0$ ですので、t に関する二次方程式 $At^2 + 2Bt + C = 0$ は「重解をもつ」か「虚解をもつ」のいずれかです。そこで方程式 $\psi(t) = At^2 + 2Bt + C = 0$ の判別式 $\mathcal{D}$ は

$$
\frac{\mathcal{D}}{4} = B^2 - AC \leqq 0
$$

[*4] 本当は式 (1.8) の主張は自明ではありません。これは積分の定義と関数の性質にかかわることですが、この講義の程度を超えた問題なので、ここでは認めることにします。

を満たします。この不等式に A, B, C の定義を入れ直すことで、

$$\int_\alpha^\beta (f(\xi))^2\,d\xi \int_\alpha^\beta (g(\xi))^2 d\xi \geqq \left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)\,d\xi\right)^2$$

を得ます。

最後に等号成立条件ですが、

$$\begin{aligned}
\text{等号成立} &\Leftrightarrow \text{方程式 } \psi(t)=0 \text{ が重解をもつ（}\mathcal{D}=0\text{）} \\
&\Leftrightarrow \text{ある } t_0 \in \mathbb{R} \text{ が存在して } \psi(t_0)=0 \\
&\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \left(t_0 f(\xi) - g(\xi)\right)^2\,d\xi = 0 \text{ をみたす } t_0 \in \mathbb{R} \text{ が存在する} \\
&\Leftrightarrow g(\xi) = t_0 f(\xi) \text{ をみたす } t_0 \in \mathbb{R}\text{が存在する}
\end{aligned}$$

となり、λ として t_0 を取れば良いことが分かります。

（証明終わり）

2 多次元の空間（便宜か、本質か？）

2.1 Lagrange の恒等式の図形的な意味

3 次元のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とします。また内積を $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = ||\vec{a}||||\vec{b}||\cos\theta = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ と表します。ここで角度 θ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度です。また、ノルムを $||\vec{a}|| = \sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ と表すことにしましょう。さらに行列式を

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

と書くことにします。

新しい記号を用いて定義通りに Lagrange の恒等式の両辺を書き直すと、

$$||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2 = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1\end{vmatrix}^2 \tag{2.1}$$

となります。よって、

$$\text{（左辺）} = ||\vec{a}||^2||\vec{b}||^2(1-\cos^2\theta) = (||\vec{a}||||\vec{b}||\sin\theta)^2 \tag{2.2}$$

となります。

ここで $S(\vec{a},\vec{b}) = ||\vec{a}||||\vec{b}||\sin\theta$ とおきます。するとこれは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の向きのついた面積になります（後で証明します)。ここで「向きのついた面積」とは、空間内に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を含む平面を取り、その上で $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へそのなす角度 θ をはかる（$0 \leqq \theta \leqq \pi$）とき、反時計回りの場合はその面積が正、逆向きの場合は負とする、ということです。

この記号を用いて式 (2.1) および式 (2.2) を書き直しますと、

$$S(\vec{a},\vec{b})^2 = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1\end{vmatrix}^2 \tag{2.3}$$

練習問題　2 次元のベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2)$ と $\vec{b}=(b_1,b_2)$ に対して、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積 $S(\vec{a},\vec{b})$ が $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ となることを示しましょう。

解答　まず $\vec{a}=(a_1,a_2)$ および $\vec{b}=(b_1,b_2)$ を 2 次元のベクトルとし、新しく $R_\theta(\vec{a})$ をベクトル $\vec{a}$ を原点を中心に θ だけ回転させるベクトル値関数とします。つまり行列で表しますと、

$$R_\theta(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos\theta - a_2\sin\theta \\ a_1\sin\theta + a_2\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

ということです。この関数を用いますと $\vec{b}$ は

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||} R_\theta(\vec{a}) = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||} \begin{pmatrix} a_1\cos\theta - b_2\sin\theta \\ a_1\sin\theta + a_2\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

と表せます。

そこで、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1b_2 - a_2b_1 \\ &= a_1\frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}(a_1\sin\theta + a_2\cos\theta) - a_2\frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}(a_1\cos\theta - a_2\sin\theta) \\ &= \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}(a_1^2 + a_2^2)\sin\theta \\ &= ||\vec{a}||||\vec{b}||\sin\theta = S(\vec{a},\vec{b}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

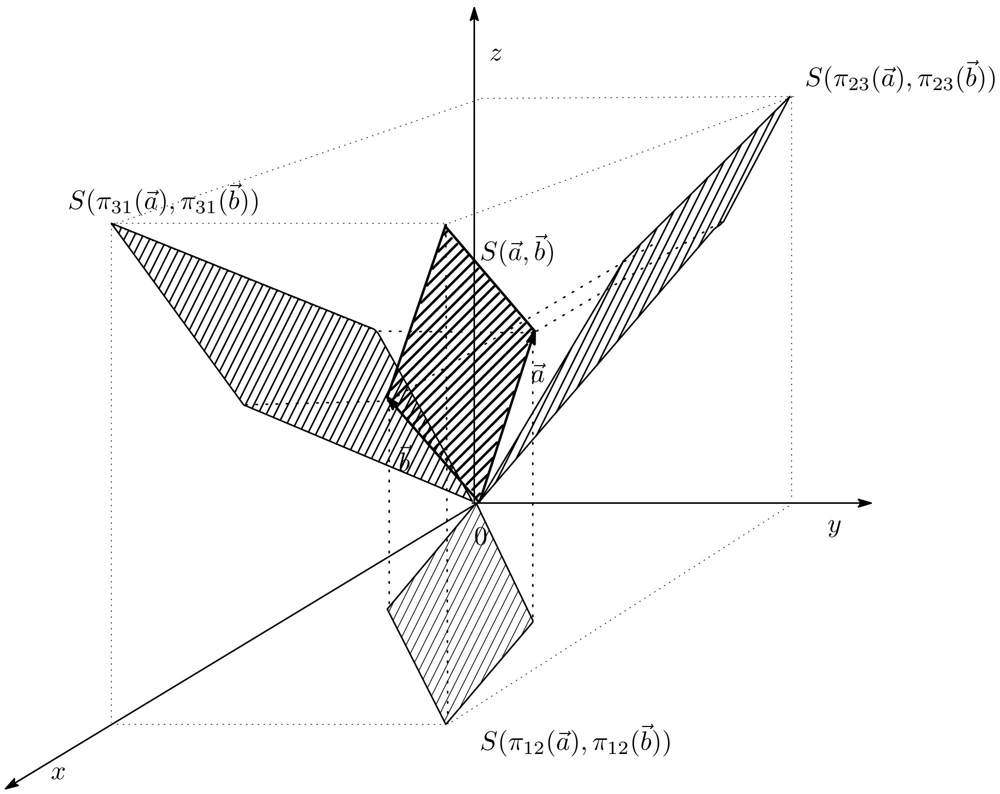
となります。■

さて、ではこの事実を用いて、3 次元の空間内のベクトルを xy-平面、yz-平面、zx-平面に射影して考えてみましょう。

一般の 3 次元のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ と、基本ベクトル $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、射影関数 π_{ij} を

$$\begin{cases} \pi_{12}(\vec{x}) = \xi_1\vec{e_1} + \xi_2\vec{e_2} \\ \pi_{23}(\vec{x}) = \xi_2\vec{e_2} + \xi_3\vec{e_3} \\ \pi_{31}(\vec{x}) = \xi_3\vec{e_3} + \xi_1\vec{e_1} \end{cases}$$

と定義します。下図を見ながら考えましょう。



$\vec{x}$ の射影 $\pi_{12}(\vec{x})$、$\pi_{23}(\vec{x})$、$\pi_{31}(\vec{x})$ はそれぞれ $\vec{x}$ を xy-平面、yz-平面、zx-平面に射影します。ところが上式 (2.6) で示した通り、2 次元のベクトルに関しては面積を求めることが出来ます。よって、Lagrange の恒等式は、図形的に

$$(S(\vec{a},\vec{b}))^2=(S(\pi_{12}(\vec{a}),\pi_{12}(\vec{b})))^2+(S(\pi_{23}(\vec{a}),\pi_{23}(\vec{b})))^2+(S(\pi_{31}(\vec{a}),\pi_{31}(\vec{b})))^2 \tag{2.7}$$

となることを意味します。

ちなみに、ここで三平方の定理を思い出してみましょう。三平方の定理とは、空間内にひとつ線分を取るとその長さの 2 乗が、線分を 3 つの座標軸に射影したそれぞれの 2 乗の和に等しい、というものでした。この観点から捉え直しますと、この節でのお話はそれを 3 次元空間内の平行四辺形の面積へと一般化したものと看做せるわけです。

さらに Cauchy の恒等式の幾何学的な意味はこれを n 次元に一般化したものです。最後にこのお話をしましょう。

3 新しい空間の発見

3.1 n 次元実空間とベクトル空間

先ず n 次元の空間を定義しましょう。n 個の実数の対全体を

$$\mathbb{R}^n=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n);\xi_j\in\mathbb{R},1\leqq j\leqq n\}$$

としましょう。n 個の実数の組を点の位置を表す座標であるとともに、点であると考えるのです。この集合に 1 次元や 2 次元の場合と同じように次の演算を定義します。

相等：$(\xi_1,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\Leftrightarrow\xi_j=\eta_j, 1\leqq j\leqq n$
加法：$(\xi_1,\cdots,\xi_n)+(\eta_1,\cdots,\eta_n):=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n)$
スカラー倍：$\alpha(\xi_1,\cdots,\xi_n):=(\alpha\xi_1,\cdots,\alpha\xi_n)$
内積：$\langle(\xi_1,\cdots,\xi_n),(\eta_1,\cdots,\eta_n)\rangle:=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\eta_j$
特に、$\vec{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ とするとき、$||\vec{x}||:=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2}$ となります。

$\mathbb{R}^n$ に以上のような演算を考えたものを n 次元 Euclid 空間と言います。内積には次の性質が成り立ちます。

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を任意の n 次元ベクトルとするとき、
交換による不変性：$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{b},\vec{a}\rangle$
成分に対する線形性：$\langle\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}\rangle=\alpha\langle\vec{a},\vec{c}\rangle+\beta\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$
正値性：$\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\geqq 0$ であり、等号成立と $\vec{a}=0$ は同値

さらに、基本ベクトルを $e_1=(1,0,\cdots,0), e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$ とします。
すると、前節の内容を n 次元に一般化した次の性質が成り立ちます。

$$\begin{vmatrix}\langle\vec{a},\vec{a}\rangle & \langle\vec{a},\vec{b}\rangle\\ \langle\vec{b},\vec{a}\rangle & \langle\vec{b},\vec{b}\rangle\end{vmatrix}=(S(\vec{a},\vec{b}))^2 \tag{3.1}$$

また、一般のベクトル $\vec{x}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ に対して、$1\leqq j<k\leqq n$ をみたす j,k それぞれについて射影関数 π_{jk} を

$$\pi_{jk}(\vec{x}):=\xi_j e_j+\xi_k e_k$$

と定義します。

一章で与えた Lagrange の恒等式が、式 (2.7) のような図形的意味を持ったことと同様にして考えることによって、Cauchy の恒等式に対しても以下のような図形的意味を考えることが出来ます。ここでは事実のみを挙げておきます。

Cauchy の恒等式の幾何学版

$$(S(\vec{a},\vec{b}))^2=\sum_{1\leqq j<k\leqq n}(S(\pi_{jk}(\vec{a}),\pi_{jk}(\vec{b}))^2$$

ちなみに、

$$G(\vec{a},\vec{b}):=\begin{pmatrix}\langle\vec{a},\vec{a}\rangle & \langle\vec{a},\vec{b}\rangle\\ \langle\vec{b},\vec{a}\rangle & \langle\vec{b},\vec{b}\rangle\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

で、$G(\vec{a},\vec{b})$ をグラム行列、$\det G(\vec{a},\vec{b})$ をグラム行列式といいます。
これをさらに一般化して、r を $1\leqq r\leqq n$ なる整数とするとき、まず以下の事実が成り立ちます。

$$G(\vec{a_1},\ldots\vec{a_r}):=\det\begin{pmatrix}\langle\vec{a_1},\vec{a_1}\rangle & \langle\vec{a_1},\vec{a_2}\rangle & \cdots & \langle\vec{a_1},\vec{a_r}\rangle\\ \langle\vec{a_2},\vec{a_1}\rangle & \langle\vec{a_2},\vec{a_2}\rangle & \cdots & \langle\vec{a_2},\vec{a_r}\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle\vec{a_r},\vec{a_1}\rangle & \langle\vec{a_r},\vec{a_2}\rangle & \cdots & \langle\vec{a_r},\vec{a_r}\rangle\end{pmatrix}$$

をベクトルの組 $(\vec{a_1},\ldots,\vec{a_r})$ に関するグラム行列といいます。このグラム行列について、

$$(\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_r}\text{ で決定する平行 }2r\text{ 面体の }r\text{ 次元体積})^2=\det G(\vec{a_1},\ldots\vec{a_r}) \tag{3.3}$$

が成り立ちます。

このとき、n 次元の Cauchy の恒等式の幾何学版を平行 $2r$ 面体に一般化すると、

$$G(\vec{a_1},\dots\vec{a_r}) = \sum_{1\leqq j_1<j_2<\cdots<j_r\leqq n} (S(\pi_{j_1j_2\dots j_r}(\vec{a_1}),\pi_{j_1j_2\dots j_r}(\vec{a_2}),\dots,\pi_{j_1j_2\dots j_r}(\vec{a_r})))^2$$

ただしここで射影関数を

$$\pi_{j_1j_2\dots j_k}(\vec{x}) = \sum_{\nu=1}^{k}\xi_{j_\nu}e_{j_\nu}$$

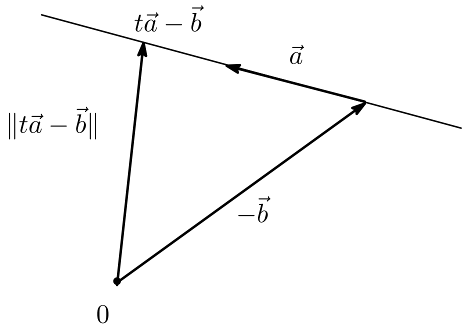
と拡張しました。

3.2 多次元空間の取り扱い

多次元空間の取り扱いに慣れましょう。第一章で行った Bunyakovsky の恒等式の Schwarz による証明を思い出して、0 でない二つの n 次元ベクトル $\vec{a}\neq 0$ と $\vec{b}\neq 0$ に対して、実数 t によって変化するベクトル $\vec{x}=t\vec{a}-\vec{b}$ を考え、その長さの 2 乗

$$\psi(t) := \|t\vec{a}-\vec{b}\|^2$$

の性質を調べてみましょう。ここで $t\vec{a}-\vec{b}$ で表される点全体は方向 $\vec{a}$ で、$-\vec{b}$ を通る直線と見ることが出来ます（下図参照)。



$$\begin{aligned}
\psi(t) = \|t\vec{a}-\vec{b}\|^2 &= \langle t\vec{a}-\vec{b}, t\vec{a}-\vec{b}\rangle \\
&= t\langle \vec{a}, t\vec{a}-\vec{b}\rangle - \langle \vec{b}, t\vec{a}-\vec{b}\rangle \qquad \text{（内積の第一成分に対する線形性）} \\
&= t^2\langle \vec{a},\vec{a}\rangle - t\langle \vec{a},\vec{b}\rangle - t\langle \vec{b},\vec{a}\rangle + \langle \vec{b},\vec{b}\rangle \qquad \text{（内積の第二成分に対する線形性）} \\
&= t^2\|\vec{a}\|^2 - 2t\langle \vec{a},\vec{b}\rangle + \|\vec{b}\|^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2\left(t-\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\|\vec{a}\|^2} \qquad \text{（平方完成）}
\end{aligned}$$

となります。この等式は任意の実数 $t\in\mathbb{R}$ に対して正しいので $\psi(t)$ の最小値（すなわち原点と直線の最短距離）は、

$$t_0 = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

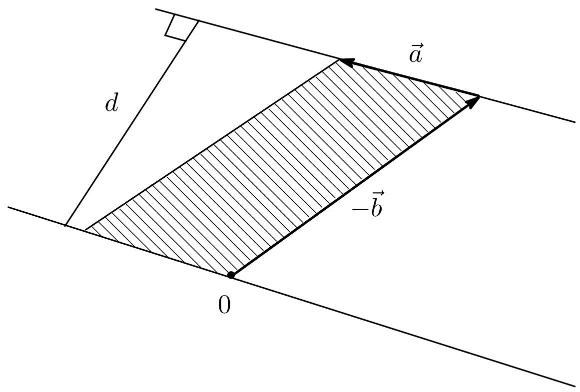
のときの、

$$0 \leqq \psi(t_0) = \frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

です。つまり、$\vec{x} = t_0\vec{a} - \vec{b}$ で最短距離 d を与え、

$$d = \sqrt{\psi(t_0)} = \sqrt{\frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2}{\|\vec{a}\|^2}}$$

です。このとき、下図の様に $\|\vec{a}\| \cdot d$ は平行四辺形の面積となります。



ところで d の定義より、

$$\|\vec{a}\| \cdot d = \sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2}$$

となります。ここで、$\vec{x} = t_0\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a}$ が直交していることは暗に認めてしまいました。これを確認しておきましょう。

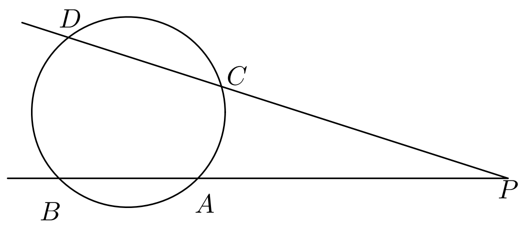
$$\begin{aligned}\langle t_0\vec{a} - \vec{b}, \vec{a}\rangle &= t_0\|\vec{a}\|^2 - \langle\vec{b},\vec{a}\rangle \\ &= \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle \cdot \|\vec{a}\|^2}{\|\vec{a}\|^2} - \langle\vec{b},\vec{a}\rangle = 0\end{aligned}$$

0 でない二つのベクトルが直交するということと、それらの内積が 0 になることは同値ですから、これより確かに $\vec{x}$ と $\vec{a}$ は直交しています。

練習問題　多次元の世界の出来事をどのようにしたら身近な物として、感じ、自由に扱えるようになるでしょうか？例えば、皆さんは中学や高校であるいは趣味で、ユークリッド幾何の定理をいろいろ学ばれているでしょう。無論いろいろ困難が生じる場合もありますが、その多次元版を定式化してみるのは楽しいレッスンです。一つだけ例を挙げましょう。方ベキの定理は覚えていますか？平面上に与えられた点 P から走る二本の直線が、与えられた円と下図のように点 A、B、C、D で交わるとき、長さの関係について、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立つというものです。



さて、今与えられた n 次元ベクトルの理論を用いて、これを原点を中心とした $n-1$ 次元の球面に対して方ベキの定理を一般化してみましょう。

3.3 Cauchy の不等式の正射影の方法による証明

もう一つ Cauchy の不等式の幾何学的な証明を考えてみましょう。この章の初めに導入した図形的な記号を導入すると、Cauchy の不等式は $\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \geq (\langle\vec{a},\vec{b}\rangle)$ と表せます。ところで皆さんは、平面ベクトルにおいて、$\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$ なる任意のベクトルの組について $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$（ただし θ は $\vec{a},\vec{b}$ のなす角）と言う関係があるのはご存知ですね。この場合は、図形的な格の概念を既知とすれば、$|\cos\theta| \leqq 1$ より Cauchy の不等式が直ちに従うわけですが、これを、一般の次元で考えると平面や空間と違って $\vec{a},\vec{b}$ のなす角とは何ですか？ということになってしまいます。多次元の場合 $(n\geqq 4)$ は、むしろ Cauchy の不等式が角度の概念と無関係に成り立つことから、$\cos\theta := \dfrac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$ によって角に対応する量を定義した方が具合が良いのです。特に直交の定義は有用で、$\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ が直交することを角によらず、$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0$ として定義します。この定義が、私たちの図形的な直感と矛盾しないことは、例えば、この時三平方の定理が成立するか調べてみましょう。直交性に注意すれば $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ となり一般の次元でも、三平方の定理が成り立つことが分かります。

■正射影補題　平面や空間では与えられたベクトル $\vec{u}\neq 0$ に対して、任意のベクトル $\vec{v}\in\mathbb{R}$ を $\vec{u}$ 方向と、その直交方向へただ一通りに分解できます。式で表せば、

$\lambda\in\mathbb{R}$ と $\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ がただ一通り定まり、$\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{w}$ かつ $\vec{u}\perp\vec{w}$ と表せる。

となります。

さて、$\vec{u}\perp\vec{w}$ から両辺と $\vec{u}$ の内積をつくると、$\langle\vec{v},\vec{u}\rangle = \lambda\|\vec{u}\|^2$ となるので、$\lambda := \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\dfrac{1}{\|\vec{u}\|^2}, \vec{w} := \vec{v} - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ となります。これはそのまま、一般の次元でも成り立ちます。

正射影補題

$\vec{u}\in\mathbb{R}^n, \vec{u}\neq 0$ が与えられた時、任意の $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ に対して、

$$\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{w}, \qquad \vec{u}\perp\vec{w}$$

なる分解がただ一通りに定まる。ここで、

$$\lambda = \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}, \quad \vec{w} = \vec{v} - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

証明は、次のようにします。

証明　先ず、$\vec{u}\perp\left(\vec{v} - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)$ を示します。

$$\left\langle\vec{u}, \vec{v} - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle - \frac{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{\|\vec{u}\|^2} = 0$$

である。従って、$\vec{w} = \vec{v} - \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ とおいてやればよい。

次に、ただ一通りであることは、$\vec{v} = \lambda_1\vec{u} + \vec{w_1}$（ただし $\vec{u}\perp\vec{w_1}$）という分解があれば、$\langle\vec{v},\vec{u}\rangle = \lambda_1\|\vec{u}\|^2$ だ

から、

$$\lambda_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} = \lambda$$

であり、

$$\vec{w_1} = \vec{v} - \lambda_1 \vec{u} = \vec{v} - \lambda \vec{u} = \vec{w}$$

である。 □

この証明には、$\vec{u}$ に直交するベクトルが存在するという、図形的な直観が使われていないことに注意して下さい。

正射影補題から、直ちに次の系が得られます。

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n$（$\vec{u} \neq 0$）が与えられた時、任意のベクトル $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ について

$$\|\vec{v}\|^2 = (\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle)^2 \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} + \left\| \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \right\|^2$$

が成立する。

（ヒント）これは正射影補題の右辺のノルムの平方を直交性に注意して計算すれば良い。

この系から、$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ で $\vec{b} \neq 0$ とすると、$\|\vec{a}\|^2 \geqq (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2 \dfrac{1}{\|\vec{b}\|^2}$ であるから、

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \geqq (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2$$

が成り立つ。これから、$\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \geqq |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$ が得られる。また、

$$\begin{aligned} \text{等号成立} &\Leftrightarrow \left\| \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ が存在して} \vec{a} = \lambda \vec{b} \end{aligned}$$

これで Cauchy の不等式が示されました。

如何でしたか？古典的な不等式から、様々な幾何的性質が導かれる様、高次元への飛躍を感じることが出来ましたでしょうか。

これらの不等式の先には「正射影定理」、「Bessel の不等式」や「二次形式論」などのおもしろい理論があります。興味を持った方は是非関連する本をひもといてみて下さい。

A. 参考文献

[1] 桑野耕一、「Cauchy の不等式と高次元空間の発見」、レジュメ、2009

[2] 吉本響、講演記録ノート、2009

[3] 桑野耕一、田中祐二ノート作成、「行列式・コーシーの不等式から高次元基礎図形の体積へ」、数学工房名古屋公開講座、2005

[4] F. クライン、「19 世紀の数学」、石井省吾、渡辺弘訳、共立出版、1995

[5] J. デュドネ、「数学史 II」上野健爾訳、岩波書店、1985

[6] J.M.Steel, *The Cauchy-Schwarz Master class*, Cambridge, 2004

[7] 長野正、「曲面の数学」、培風館、1987

[8] 松坂和夫、「線形代数入門」、岩波書店、1998

[9] コルモゴロフ・コシュケベッチ編、「シリーズ 19 世紀の数学 II」、小林昭七監訳、朝倉書店、1998