数学工房・名古屋公開講座　講義ノート

解析学事始め
（２項係数と Fibonacci 数）

講師　桑野 耕一　（数学工房）

日時：２０１１年４月２９日（金・祝）
場所：SEA 科学教育研究会

ノート作成者　関谷 雄飛 (SEA 数学科講師)

ご挨拶

名古屋の数学工房公開講座はこれで９回目，途中抜けた年もありますが，始まって１０年を超えました．意欲に燃えた，数学に興味一杯の高校生に話をする機会はあまりないので，私にとってとても貴重な機会になっています．

今回のテーマは，１０世紀から１２世紀にかけて発見された古く面白い対象である，二項係数と Fibonacci 数を新しい精神で再発見します．人間を取り巻く世界の法則性を追求し表現するのが，数学の最も大切な役割です．そのための強力な手段，一般化抽象化の方法が１９世紀後半から２０世紀の初めに確立されました．古い素材を楽しみつつ，学校ではあまり学ぶ機会の無い，現在の数学を特徴づける考え方のさわりを理解してもらいたいと思います．ちょっとハードな道もあるかもしれませんが，見晴らし台までのハイキングをお楽しみください．

ところで，現在の数学は直接には歴史上ルネッサンスと呼ばれる時代にヨーロッパに起きた，古代の再発見の一大思想運動の副産物です．古代ギリシャ以来知られていたことを除けば，ほとんどは１１世紀以降に誕生したものです．ルネッサンスと言えば光に満ちているようですが，この時代はどんなであったかと考えると，天災や戦乱による飢餓，疫病，無秩序による暴行略奪の蔓延した，恐怖と不安に満ちた時代でした．ルネッサンスとは，古代の知恵を復活させて，この世界の成り立ちを深く理解し，人間存在を確かなものにしよう，この世に神の世界の秩序を実現しようという運動だったと思います．数学は，自然の法則性を理解し人間が人間らしくあるためのアートとして徐々に発達したのです．このようなことを心に留めておくと，数学が違った風に見えるかもしれません．

今年の３月，丁度公開講座の準備にとりかかった日に，忘れようもない大災害に東日本が襲われました．思いもかけない事態に一時は中止も考えましたが，SEA 代表の吉本さんのお励ましもあり，いつも通りに，これからの皆さんに学校の数学とは違った立場から，数学とは何かを考えてもらうことが大切かなと思い直し，貴重な若い皆さんとの出会いの機会を生かさせていただくことにしました．

このような事態にも関わらずいつも通りに講座を支えてくださった，代表の吉本さんをはじめとする，SEA のスタッフに感謝いたします．特に，実に楽しいノートを作成して下さった SEA 講師の関谷さんに感謝します．私の考えとはかなり違うところもあるのですが，彼と私の講座を通じての対話として考えると面白いし，とりわけ高校生の皆さんへ語りかける姿勢が謙虚で温かい点がとてもよいと思いました．

今回の講座が，数学とは何をやることだろうかという問いへのヒントになれば幸いです．

2011 年 7 月
数学工房　桑野耕一

はじめに

このノートは２０１１年４月２９日にSEA科学教育研究会にて行われた数学工房の公開講座「解析学事始め（２項係数とFibonacci数）」での桑野耕一先生（数学工房）の講演をもとに作成したものです．ノート作成者の脚色も入っており，桑野先生の講義内容・考え方とは異なる部分もあることをお断りしておきます．

毎年恒例となった数学工房公開講座ですが，今回はFibonacci数列

$$\mathbf{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots}$$

を二項係数の中に見いだすところから出発しました．参加者の中にはいきなり二項係数の話が出てきてビックリした人もいるかもしれません．しかし，パスカルの三角形にも出てくる二項係数は，組合わせ論の母ともいえる存在であり，全ての組合わせ的な数は二項係数から作られるといっても過言ではありません．Fibonacci数もそういうものの中の１つです．

さて，講義は二項係数からFibonacci数を発見した後，Fibonacci数の加法定理を経て，線形漸化式の話へと進んでゆきます．陽気な春に，一羽のチョウが花から花へ飛びかうように，数学は自由です．

数学の世界では一般化が好まれます．例えば，講義ではFibonacci数列を与える漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を，変数 ξ, η を用いてより一般の漸化式 $a_{n+2} = \xi a_{n+1} + \eta a_n$ に拡張しました．一般化しない状況でも難しかったのに，一般化したらもっと難しくなるんじゃないか $\cdots$ と不安に思うかもしれません．しかし，一般化はそれ相応の価値があります．具体的なものから抽象的なものに置き換えることは，濾過して純粋なものだけを残すということです．ただし，一般化する時の弱点として，今までの方法では太刀打ちできない，ということがあります．そういうときはより強力な道具が必要となります．今回の話ではそれが線形空間と呼ばれるものでした．しかし，ひとたび強力な道具を手に入れれば，思いがけない素晴らしい結果を手にすることができるのです！

今回の講演では，線形漸化式をみたす数列を全部集めた空間を線形空間とみなし，基底をうまくとることによって，Fibonacci数の一般項や数々の加法定理を導きました．レベル的には大学の数学科の２年生程度の内容です．このノートの目標は，この一連のストーリーをできるだけ分かりやすく解説することです．少しでも理解の助けとなれば幸いです．

2011年5月

ノート作成者　関谷雄飛

目 次

0　記号について

このノートでは次の記号を使います．普段見慣れない記号などもあるかもしれませんが，何回も読んだり使ったりするうちに慣れてくると思います．

- $\circ\circ := \times\times$ と書いて，$\circ\circ$ を $\times\times$ で定義する（定める）という意味です．単なるイコールではないです．
- $\mathbb{N}$：自然数全体の集合．
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$：0 以上の整数の集合．
- $\mathbb{R}$：実数全体の集合．
- $\mathbb{R}^2$：2 つの実数の組からなる平面．
- $x \in X$：x が集合 X の要素，もしくは元（げん），であるという意味．
- よく使うギリシャ文字：ν (ニュー)，ξ（グザイ，クシー），η（イータ，エータ），λ（ラムダ），μ（ミュー）．
- ベクトルは $\vec{a}$ という表記の代わりに太文字 $\boldsymbol{a}$ を使って表すことにします．
- $\displaystyle\binom{n}{\nu}$：講義では，$(1+x)^n$ の展開に現れる係数として定義したが，組合わせに出てくる記号 ${}_n\mathrm{C}_\nu$ と同じ意味．
- $\geq$：$\geqq$ と同じ意味．
- $\leq$：$\leqq$ と同じ意味．
- A $\Longleftrightarrow$ B：A と B は同値，つまり A が成り立つための必要十分条件は B である，という意味．
- このノートでは（ノート作成者の好みにより）「すべての」という表現の代わりに「任意の」という表現を使います．また,「一意的」とは「唯一通り」と同義です．

1　二項係数

まずは二項係数の復習から始めましょう．次のような多項式を考えます．

$$B_n(x) := (1+x)^n$$

$1+x$ のように 2 つの項からなる多項式は**二項式** (**binomial**) とよばれます．$B_n(x)$ の B は binomial の頭文字をとったものです．$B_n(x)$ の n に $n=0,1,2,3,\cdots$ と代入してみると，

$$\begin{aligned} B_0(x) &= (1+x)^0 := 1 \\ B_1(x) &= (1+x)^1 = 1+x \\ B_2(x) &= (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

と続いていきます．では，一般の n に対して，$(1+x)^n$ を展開したらどうなるでしょうか．$(1+x)^n$ を展開したときの x^ν の係数を二項係数とよび $\binom{n}{\nu}$ と書くことにします[1]．すると

$$B_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu}x^\nu + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

となります．（ν はギリシャ文字でニューと呼びます．）念のために少し計算しておくと，

$$\binom{0}{0} = 1, \binom{1}{0} = 1, \binom{1}{1} = 1, \binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1, \cdots$$

となります．

上の展開した式ですが，具体的に書くと丁寧で分かりやすいのですが，シグマ記号を使って

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu$$

とコンパクトに表すことにします．

二項係数の歴史について，桑野先生からコメントがありましたので，それをここに掲載させていただきます．

[1] みなさんご存知のように，x^ν の係数は ${}_nC_\nu$ です．高校では組合わせの記号は ${}_nC_\nu$ を使いますが，大学以上では $\binom{n}{\nu}$ の方がよく使われます．その理由は次の通りです．$\binom{\alpha}{\nu}$ は，実数 (より一般に複素数)α と 0 以上の正の整数 ν に対して，$\binom{\alpha}{\nu} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ と定義されます．α が 0 以上の整数とは限らないという点がミソで，このように定義しておいた方が汎用性があります．${}_n\mathrm{C}_\nu$ と書くと，組合せ論的意味合いが強くなり，n が 0 以上の整数ではないとしたら気持ち悪さを感じます．

二項式 $(x+y)^n$ の展開係数としての二項係数は古くから知られていて，すでに 11 世紀ペルシャの詩人にして天文学者，数学者であるオマール ハイヤームの著作の中にあるそうです．またこの二項係数の生成規則を三角形の配列に表すことも古くからおこなわれていて，例えば，元の時代の朱世傑の著作は良く知られています．

これから取り扱う二項係数の規則は通常パスカルの三角形と呼ばれ，組合せと結び付けて扱われます．これは 17 世紀のフランスの数学者，かつ哲学者であるパスカルが,「数三角形論」（1654）という著作で現在の数学の基準に照らして通用するやり方で初めて二項係数を扱ったからです．皆さんが学んだ組合せの数としての二項係数の取り扱いはこのパスカルに由来します．ちなみに，これから扱う数学的帰納法はこの著作の中で初めてはっきりと述べられ，これによって基本的な公式を得ています．

ニュートンは，無限小解析の立場から二項係数を実数にまで拡張し，一般二項展開

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu \geqq 0} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$$

を考えます.（これは恐らく組合せ論的でなく本来の展開によるものでしょう．そう考えればこの発見は自然なのです）

さて，ここで問題です．

$B_n(x)$ の係数 (二項係数) はどんな規則を持っているでしょうか？

$B_{n+1}(x) = (1+x)^{n+1}$ をさっきとは違った方法で展開してみます．

$$B_n(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu} x^\nu + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

でしたから

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(x) =& (1+x)^{n+1} \\
=& (1+x)^n(1+x) \\
=& B_n(x)(1+x) \\
=& B_n(x) + B_n(x)x \\
=& \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu} x^\nu + \cdots + \binom{n}{n} x^n \\
& \quad + \binom{n}{0} x + \binom{n}{1} x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu-1} x^\nu + \cdots + \binom{n}{n-1} x^n + \binom{n}{n} x^{n+1} \\
=& \binom{n}{0} + \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} x + \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right\} x^2 + \cdots \\
& \quad \cdots + \left\{ \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} \right\} x^\nu + \cdots + \left\{ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right\} x^n + \binom{n}{n} x^{n+1}
\end{aligned}$$

となります．これと

$$B_{n+1}(x)=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\cdots+\binom{n+1}{\nu}x^\nu+\cdots+\binom{n+1}{n}x^n+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

の係数を比較すると，次の二項係数の規則が成り立つことが分かります．

二項係数の規則

$$\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}=1$$

$$\binom{n+1}{\nu}=\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}\quad(1\leq\nu\leq n)$$

$$\binom{n+1}{n+1}=\binom{n}{n}=1$$

(計算の補足) 上では二項係数の規則を，丁寧に数式を書き係数を比較することにより導きました．同じ計算をシグマ記号を使って書くと次のようになります．何が起こっているかが分かりにくくなってしまうという欠点はありますが，書く量が減るという利点があります．数式をたくさん書かなければいけない数学にとって，書く量を減らすということはとても重要です．

$$\begin{aligned}
B^{n+1}(x)&=B_n(x)(1+x)\\
&=\left(\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu\right)(1+x)\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu+\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{\nu+1}\\
&=\binom{n}{0}+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu+\sum_{\nu=1}^{n+1}\binom{n}{\nu-1}x^\nu\ (\text{第三項：}\nu+1\to\nu\text{ 変数ずらし})\\
&=\binom{n}{0}+\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}\right\}x^\nu+\binom{n}{n}x^{n+1}
\end{aligned}$$

これと，$B^{n+1}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu=\binom{n}{0}+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$ の x^ν の係数を比較して，二項係数の規則が成り立つことが分かります．

2　Fibonacci 数

2.1　二項係数と Fibonacci 数

二項係数の規則からパスカルの三角形を描いてみましょう．いつもの正三角形の形ではなく，左詰めで書いていきます．二項係数の記号 $\binom{n}{\nu}$ と具体的な数字を使った両方の三角形を描いておきます．そして図のように斜めの線を引きます．

F_0	$\binom{0}{0}$						
F_1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
F_2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
F_3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
F_4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
F_5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
F_6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
F_7							

F_0	1						
F_1	1	1					
F_2	1	2	1				
F_3	1	3	3	1			
F_4	1	4	6	4	1		
F_5	1	5	10	10	5	1	
F_6	1	6	15	20	15	6	1
F_7							

図の斜めの線を使って数列 $F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots$ を次のように**定義**します．ただし，便宜上，F_0 は 0 と定義することにします．

$$
\begin{aligned}
F_0 &:= 0 \\
F_1 &:= \binom{0}{0} = 1 \\
F_2 &:= \binom{1}{0} = 1 \\
F_3 &:= \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 \\
F_4 &:= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3 \\
F_5 &:= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5
\end{aligned}
$$

$$F_6 := \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$F_7 := \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$
$$\vdots$$

任意の自然数 n に対しては，F_n はどのように表せるでしょうか？Fibonacci 数を

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{(n-1)-1}{1} + \binom{(n-1)-2}{2} + \cdots + \binom{(n-1)-\nu}{\nu} + \cdots$$

と定義しました．ここで ν は $(n-1)-\nu$ 以下でなければならないので，

$$(n-1)-\nu \geq \nu$$

つまり

$$\nu \leq \frac{n-1}{2}$$

が成り立ちます．ここで，実数 x に対し，$[x]$ で x を超えない最大の整数を表すことにします．この記号はガウス記号とよばれます．ν は 0 以上の整数なので，

$$F_n = \sum_{0 \leq \nu \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-\nu}{\nu}$$

と表せます．しかし ν に関する条件式はまだ複雑に見えます．そこで，$\nu > n$ となる整数 ν, n に対して $\binom{n}{\nu} = 0$ と定義してみるとどうなるでしょう．すると F_n はもっと簡単に

$$F_n = \sum_{\nu \geq 0} \binom{n-1-\nu}{\nu}$$

と表せます．ここは少し難しいところなので，具体例で確認してみましょう．例えば $n = 5$ のとき

$$\begin{aligned}
F_5 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + \binom{1}{3} + \binom{0}{4} + \binom{-1}{5} + \binom{-2}{6} + \cdots \\
&= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}
\end{aligned}$$

となります．一見すると和が無限に続く感じがしますが，途中からすべて 0 になるので，結局有限個の二項係数の和となります．また $n = 0$ のときには

$$F_0 = \sum_{\nu \geq 0} \binom{-1-\nu}{\nu} = \binom{-1}{0} + \binom{-2}{1} + \cdots = 0$$

となります．これで F_n を二項係数を用いてコンパクトに表すことができました．
　一般に，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$F_n := \binom{n-1}{0} + \binom{(n-1)-1}{1} + \binom{(n-1)-2}{2} + \cdots + \binom{(n-1)-\nu}{\nu} + \cdots$$

と定義し，このような数を Fibonacci 数[2]とよぶことにします．Fibonacci 数は数学界のみならず自然界のいろいろなところに潜んでいます．ひまわりの種の螺旋の個数，花びらの枚数などなど... みなさんも探してみてください！
　さて，上の数を順番に並べてみると ⋯

$$\mathbf{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots}$$

となります．連続する 2 つの数を足してみると

$$\begin{aligned}0+1&=1\\1+1&=2\\1+2&=3\\2+3&=5\\3+5&=8\\6+8&=13\\8+13&=21\end{aligned}$$

となるので，連続する 2 つの数を足すと次の数と等しくなることが予想できます[3]．では，実際にこの予想を証明してみましょう.「そんなの当たり前じゃないの？」と思った人もいるかもしれませんが，上の計算では，あくまで $8 + 13 = 21$ まで確かめただけです．もっと数が大きい場合にはもしかしたら，予想は成り立たないかもしれません．数学では厳密性が重視されます．あやふやな議論を積み重ねると，何が正しくて何が正しくないかが分からなくなってしまうのです．そういう意味で数学は慎重でなければいけません，しかし，数学の世界を旅するためには，ときに大胆でもなければいけません．
　時には慎重に，時には大胆に ⋯ ということで，ここでは慎重になって，上の予想を証明してみましょう．

Fibonacci 数の漸化式

任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して次が成り立つこと証明せよ．

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \cdots (\star)$$

[2]Fibonacci の本名はレオナルド・ダ・ピサ（ピサのレオナルド）で，フィボナッチはボナッチの息子を意味する愛称です．数学者であり，海賊，軍人，商人でした．この時代の人はいろいろな職業をこなしていたみたいです．

[3]初めてこの性質に気付いたのは惑星の運動法則を発見したケプラー (Kepler) だそうです．

(Fibonacci 数の漸化式が成り立つことの証明)

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= \sum_{\nu\geq 0}\binom{(n+2)-1-\nu}{\nu} \\
&= 1+\sum_{\nu\geq 1}\binom{n+1-\nu}{\nu} && (\nu=0\text{ だけ分離}) \\
&= 1+\sum_{\nu\geq 1}\left\{\binom{n-\nu}{\nu}+\binom{n-\nu}{\nu-1}\right\} && (\text{二項係数の規則}) \\
&= 1+\sum_{\nu\geq 1}\binom{n-\nu}{\nu}+\sum_{\nu\geq 1}\binom{n-\nu}{\nu-1} && (\text{シグマの線形性}) \\
&= 1+\sum_{\nu\geq 1}\binom{(n+1)-1-\nu}{\nu}+\sum_{\nu\geq 0}\binom{n-1-\nu}{\nu} && (\text{第三項：}\nu-1\to\nu) \\
&= \sum_{\nu\geq 0}\binom{(n+1)-1-\nu}{\nu}+\sum_{\nu\geq 0}\binom{n-1-\nu}{\nu} && (1\text{ をシグマの中に}) \\
&= F_{n+1}+F_n
\end{aligned}$$

□

はい，証明終わり．ハードな式変形でしたが，ついてこれましたか？シグマの添字を動かすところが初めは理解するのが難しいと思います．分からなくなったときは，シグマ記号を使わずに書いてみることをオススメします．

Fibonacci 数列のまとめ

次で定義される数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を Fibonacci 数列とよぶ．

$$F_n=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n-1-\nu}{\nu}=\sum_{0\leq\nu\leq\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-\nu}{\nu}\quad(n\geq 0)$$

また，Fibonacci 数列は次の漸化式をみたす．任意の $n\in\mathbb{N}_0$ に対して

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

2.2 Fibonacci 数の加法定理

講義中に桑野先生は数学をすることは登山に似ているとおっしゃっていました．希望を抱き出発し，孤独を味わい挫折する．そしてまた希望を抱き出発する $\cdots$ 諦めることなく昇り続けるのです，ひたすら山頂をめざして．これは個人的な意見なのですが,「山を登る」ことは大変ですが，それと同じくらい「登る山を見つける」ことは難しいと思います．もしキミが何か新しくて面白いことを見つけたいと思っても，きっと何をどうしたらよいのか分からないですよね？しかし，今回は”未知”先案内人の桑野先生がいました！桑野先生の指差すは $\cdots$ Fibonacci 山脈・加法定理山！

目標 (Fibonacci 数の加法定理)

$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を Fibonacci 数列とするとき，次の等式を証明せよ．

$$F(m+n) = F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n) \qquad (m \geq 1, n \geq 0)$$

これは **Fibonacci 数の加法定理**とよばれます．

もちろん険しい山を登るにはそれなりの装備が必要です．しばらく時間をかけて準備をすることにしましょう．人生は長い．

2.2.1 数列の一致の定理

- 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を簡潔に a と表し，$n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$a(n) = a_n$ と書くことにします．つまり，数列を $\mathbb{N}_0$ から $\mathbb{R}$ への関数だと思います．

- ２つの数列 a, b に対し，

$$a = b \Longleftrightarrow \text{任意の } n \in \mathbb{N}_0 \text{ に対して } a(n) = b(n)$$

  と定義します．

- 定数 ξ, η に対し[4]，漸化式

$$x(n+2) = \xi x(n+1) + \eta x(n) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \cdots (\spadesuit)$$

  を考えます．このとき $x(0), x(1)$ を**初期条件**とよびます．初期条件を与えると，漸化式から数列 $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ が定まります．

このとき，装備すべきは次の補題[5]です．

必要な装備

補題 (数列の一致の定理) ２つの数列 a, b が漸化式 $(\spadesuit)$ をみたし，初期条件が一致する，すなわち $a(0) = b(0)$ かつ $a(1) = b(1)$ ならば

$$a = b$$

が成り立つ．

[4]「ξ」はギリシャ文字でクシー，グザイ，クサイなどとよばれます．どのようによぶかは人によって様々です.「η」もギリシャ文字で，イータ，エータなどとよびます．慣れない文字で見にくいかもしれませんが，このノートを見て桑野先生の講義を思い出して欲しいと思い，敢えて同じ文字を使っています．

[5]補題 =「目標としている定理を証明するための準備」 =「登山に必要な準備」

数学は時には慎重に $\cdots$ ということで，数列の一致の定理の証明をしてみましょう．証明には帰納法を使います．ただし，普通の帰納法ではなく，帰納法を強化して使います．その名も**強化型帰納法** $\cdots$ なんだかなんでも証明できる気がしてくる名前です．

(数列の一致の定理の証明) 仮定より，$a(0) = b(0)$ かつ $a(1) = b(1)$ が成り立つ．ある $n \geq 0$ に対して $a(n) = b(n)$ と $a(n+1) = b(n+1)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a(n+2) &= \xi a(n+1) + \eta a(n) \\ &= \xi b(n+1) + \eta b(n) \\ &= b(n+2) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $a(n) = b(n)$，つまり $a = b$ が成り立つ． $\square$

証明のミソ： 通常の帰納法は示したい命題に対し，

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad n = 0 \text{ のとき OK!} \\ \text{(ii)} \quad n = k \text{ のとき OK!} \Rightarrow n = k+1 \text{ のときも OK!} \end{cases}$$

よってすべての n に対して OK!

という流れですが，今の場合は

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad n = 0, 1 \text{ のとき OK!} \\ \text{(ii)} \quad n = k, k+1 \text{ のとき OK!} \Rightarrow n = k+2 \text{ のときも OK!} \end{cases}$$

よってすべての n に対して OK!

という流れなのです．注意しなければならないことは，帰納法がうまく機能するために $n = 0$ の場合だけでなく，$n = 0$ と $n = 1$ の場合の両方に対して命題が成り立つかどうかをチェックしなければならないという点です．

(諸注意)

(i) 講義中では表記を簡単にするために，$n \in \mathbb{N}_0$ に対して命題[6] $P(n)$ を

$$P(n) : a(n) = b(n)$$

とおいて証明していました．

[6] $P(n)$ の P は命題 (proposition) の頭文字で，命題とは真か偽かを決めることができる文のこと．

(ii) また，講義中では帰納法の仮定を，1 以上の n に対し $P(0)$ から $P(n)$ までのすべてが成り立つと仮定し，$P(n+1)$ を示すとしていましたが，実際には $P(n-1)$ と $P(n)$ を仮定すれば十分です.

(iii) 証明をスッキリと書きたいという思いから，このノートでは $P(n)$ という記号を使わず，また帰納法の仮定も必要最低限に留めました.

次の等式は組合わせ論で有名な公式ですが，今回は二項係数 $\binom{n}{\nu}$ を $(x+1)^n$ の展開式の中に現れる係数として定義しているので，具体的にどう書けるかといったことはまだ何も分かっていません．そこで，この公式を帰納法を使って証明してみてください.

練習 (帰納法を使う例)

二項係数の規則を使って

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \qquad (0 \leq \nu \leq n)$$

を証明せよ.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$ これで準備が整いました. $\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

2.2.2 Fibonacci 数の加法定理

それでは山頂を目指して出発しましょう．今一度，目標を確認しておくと

目標 (Fibonacci 数の加法定理)

$\{F_n\}_{n\in N_0}$ を Fibonacci 数列とするとき，次の等式を証明せよ.

$$F(m+n) = F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n) \qquad m \geq 1, n \geq 0$$

(登山コース) まず証明のあらすじを登山に見立てて確認しておきましょう.

中継地点 1 任意の自然数 $m \in \mathbb{N}$ を固定 (fix) する.

中継地点 2 数列 a, b を Fibonacci 数列 F を使って次のように決める.

$$\begin{cases} a(n) = F(m+n) & (n \in \mathbb{N}_0) \\ b(n) = F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n) & (n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

中継地点 3 数列 a, b が Fibonacci 数列の漸化式[7]

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \cdots (\clubsuit)$$

をみたし，初期条件が一致することを示す.

中継地点 4 **数列の一致の定理**を漸化式 ($\clubsuit$) に対して使い，$a = b$ を示す.

それでは証明を始めましょう.

(証明) 任意の自然数 $m \in \mathbb{N}$ を固定し，数列 a, b を

$$\begin{cases} a(n) = F(m+n) & (n \in \mathbb{N}_0) \\ b(n) = F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n) & (n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

で定める．まず数列 a, b が Fibonacci の漸化式をみたすことを示す．任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\begin{aligned} a(n+2) &= F(m+(n+2)) \\ &= F(m+n+1) + F(m+n) \\ &= a(n+1) + a(n) \\ b(n+2) &= F(m)F(n+3) + F(m-1)F(n+2) \\ &= F(m)(F(n+2) + F(n+1)) + F(m-1)(F(n+1) + F(n)) \\ &= (F(m)F(n+2) + F(m-1)F(n+1)) + (F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n)) \\ &= b(n+1) + b(n) \end{aligned}$$

よって，a, b は漸化式 ($\clubsuit$) をみたす．次に a, b の初期条件が一致することを示す．つまり $a(0) = b(0), a(1) = b(1)$ を示す．$F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 1$ であったことを思い出そう.

$$\begin{aligned} a(0) &= F(m+0) = F(m) \\ b(0) &= F(m)F(1) + F(m-1)F(0) = F(m) \\ a(1) &= F(m+1) \\ b(1) &= F(m)F(2) + F(m-1)F(1) = F(m) + F(m-1) = F(m+1) \end{aligned}$$

よって，a, b は初期条件が一致する．したがって，数列の一致の定理により $a = b$，つまり任意の $m \in \mathbb{N}$ と任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，

$$F(m+n) = F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n)$$

が示せた. $\square$

はい，これで目標達成！数列の一致の定理がいかに有効であるかを感じていただけたでしょうか？みんなで登れば怖くない．もし一人で考えていて分からなかったら周りに助けを求めましょう．毎日吉本先生は，案内所でみなさんが来るのを心待

[7] これは一般型の漸化式 ($\spadesuit$) において，$\xi = \eta = 1$ とおいたものです.

ちにしています♡

これで第一の旅が終わりました．二項係数からスタートし，Fibonacci 数列を発見し，さらに Fibonacci 数の加法定理を示しました．途中，Fibonacci 数列が三項間漸化式を用いて表されるという性質を有効に使うために，数列の一致の定理を準備しました．ところが数列の一致の定理は，一般型の三項間漸化式[8]に対して証明しました．すると，数列の一致の定理は Fibonacci 数列の漸化式のみならずありとあらゆる三項間漸化式に対して有効なはずです！ここが数学の面白さです！一般化して考えておくと，より広い範囲に応用が可能になるのです．

第二の旅では，さらに高みをめざして出発します．しかし，数列の一致の定理だけではまだまだ準備が足りません．そこで，**線形代数**という非常に強力な道具を準備するところから始めます．装備に手間取って出発できない,,,，ということにならないように，なるべく噛み砕いて説明したいと思いますので「大変そうだからここまでで満足」と諦めないで，残りの数学の旅も楽しみましょう！

[8]ここでいう漸化式とはすべて線形漸化式のことをさします．線形漸化式とは，漸化式の係数に定数しかないもののことです．例えば，$a_{n+2} = a_{n+1} + na_n$ など係数に n の入っているものや $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$ など定数項が入っているものは線形ではありません．

3　線形漸化式と解空間

3.1　線形代数とベクトル空間

まずは**線形代数**について少々お話をしたいと思います.

「線形代数＝１次の数学」

１次の数学とは何か？ 例えば平面図形なら，１次の図形とは $ax + by = c$ で表される直線のことです．放物線などは，２次の数学であり，１次の数学ではありません．放物線の接線を考えることは，２次の数学を１次の数学に近似して考えることに他なりません．１次の数学は数学のありとあらゆるところに現れます．そのため，大学１年では微積分と並び線形代数を必修としている大学がほとんどです．

では，１次の数学のメリットとは何でしょう？ それは多くのことが行列を使って表現できる点にあります．例で見てみましょう．以下，２つの実数の組からなる平面を $\mathbb{R}^2$ と表すことにします.

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の二本の直線

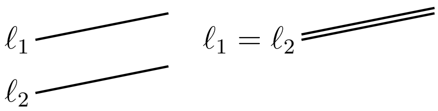
$$\begin{cases} \ell_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \ell_2 : a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

に対して x, y の係数を並べた次の行列を考えます.

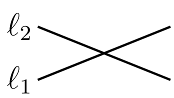
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

この行列は直線 ℓ_1 と ℓ_2 の位置関係の情報を含んでいます.

(1)　ℓ_1 と ℓ_2 が平行 (一致する場合も含む) $\iff \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$



(2)　ℓ_1 と ℓ_2 が平行ではない $\iff \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$



ここで $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ は行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式とよばれるものです．行列式とはいうものの，行列から定まるただの**値**なのでそんなに難しく思わないでください．また,「ℓ_1 と ℓ_2 が平行ではない $\iff$ ℓ_1 と ℓ_2 が唯一つの点で交わる」ということも重要です.
練習 (1)，(2) を証明せよ．(簡単な計算で示せるのでぜひやってみてください．)

行列と幾何とのつながりが多少なりとも伝わったでしょうか．次に”ベクトル空間”についてお話します．ほとんどの人はベクトル空間（または線形空間）という言

葉を初めて耳にすると思いますが，実は名前を知らないだけで高校でもベクトル空間は出てきています．平面 $\mathbb{R}^2$ や空間 $\mathbb{R}^3$ はベクトル空間です．数学は抽象化が大好きです．コーヒー豆から液体コーヒーを抽出するように，邪魔なものを取り除いてスッキリとさせます．重要な性質が何かを見極めて，その性質を調べることで見通しよくいろいろなことを理解する．これこそが数学の醍醐味だと言っても過言ではありません．

ベクトル空間

平面 $\mathbb{R}^2$ をベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ を集めた空間[a]と見たとき，$\mathbb{R}^2$ は（当たり前だが）次の性質を持つ．

(1) ゼロベクトル $\boldsymbol{0} = (0, 0)$ を含む．

(2) ２つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して，ベクトルの和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ も $\mathbb{R}^2$ に含まれる．

(3) 実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ に対して，スカラー倍 $\lambda\boldsymbol{a} := (\lambda a_1, \lambda a_2)$ も $\mathbb{R}^2$ に含まれる．

もちろん空間 $\mathbb{R}^3$ も同様の性質を持ちます．そこで (スカラー倍と和が定義された $\mathbb{R}$ 上の) 空間 L が次の３条件をみたすとき ($\mathbb{R}$ 上の) **ベクトル空間**（または**線形空間**）とよぶことにします[b]．

(V1) $\boldsymbol{0} \in L$.

(V2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ に対して，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in L$.

(V3) $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{a} \in L$ に対して，$\lambda\boldsymbol{a} \in L$.

[a]空間とは，何かはっきりとした定義があるわけではなくて，ものの集まりを図形的にとらえたときに，おおざっぱに空間とよびます．

[b]本当は，これは部分ベクトル空間の定義なのですが，細かいことは省略します．とにかく，(1),(2),(3) の性質が重要なのです．

これらの性質がみたされることは当たり前です，しかし，ベクトルを集めた空間の持つ性質は何か，と考えると上に書いた当たり前のことしか思い当たらないのです．

そんなこと言われても … と思うかもしれませんが，大学１年生が半年か１年かけて習うことなので，ここでは雰囲気さえ味わってもらえればと思います．

次にベクトル空間の基底[9]というものを紹介しましょう．

[9]英語では basis.

ベクトル空間の基底

2つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}), \boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$ の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が $\mathbb{R}^2$ の**基底**であるとは，任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ が

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

と唯一通りに表せるときをいう.

基底とは，ベクトル空間の点を観測するための基準となるベクトルの組のことです．例で見てみましょう.

平面 $\mathbb{R}^2$ において $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ とおき，2つのベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を考えましょう．すると，例えば $\mathbb{R}^2$ 上の点 $(4, -3)$ は

$$(4, -3) = 4(1, 0) - 3(0, 1) = 4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$$

と唯一通りに表すことができます.

では $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 2), \boldsymbol{a}_2 = (2, -3)$ とし，組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を使ってみるとどうなるでしょうか.

$$(4, -3) = 6(-1, 2) + 5(2, -3) = 6\,\boldsymbol{a}_1 + 5\,\boldsymbol{a}_2$$

と唯一通りに表すことができます．$(4, -3)$ を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を使って表示したとき，の係数を並べるともちろん $(4, -3)$ ですが，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を使って表示したときの係数を並べると $(6, 5)$ となります．これが，**基準となるベクトルを変える**ということです.

次に $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1), \boldsymbol{b}_2 = (2, 2)$ に対して，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ を考えます．すると，$(10, 10)$ という点は

$$(10, 10) = 10\,\boldsymbol{b}_1 + 0\,\boldsymbol{b}_2 = 0\,\boldsymbol{b}_1 + 5\,\boldsymbol{b}_2$$

となり，2通りの表示が存在します．また，$(1, 0)$ というベクトルは $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を使って表すことができません．これはなんだか嫌な感じがします.

このように，2つのベクトルの組を考えたときに，”良い”選び方と”悪い”選び方があることが分かります．そこで良い選び方をしたときに，2つのベクトルの組をその空間の基底とよぶことにします.

悪い選び方は何が悪かったのかというと，$\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ が同じ方向である，つまり平行なベクトルであるということが悪さの原因だと考えられます．2つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}), \boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$ が平行でないとき，行列式の言葉を使って書くと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

をみたすとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は基底になると予想できます.

練習 2つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}), \boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$ の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が $\mathbb{R}^2$ の基底であることと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

をみたすことは同値である．これを示せ.

さて，準備もあと一息です．今までは１つのベクトル空間のお話でしたが，次は２つのベクトル空間の関係性について考えてみましょう.

V と W をベクトル空間とします.（例えば，$V = \mathbb{R}^2$ とか $W = \mathbb{R}^3$ とかなんでもよいです）V と W はベクトル空間ですが，集合でもあるので，まずは集合の間の対応

$$T : V \to W$$

を考えましょう．つまり，V の要素 $\boldsymbol{a}$ に対して，W の要素 $T(\boldsymbol{a})$ を唯一通りに定めるという規則 T を考えます．このような対応は**写像**とよばれます．数学とは考えているものの本質を抜き出して考察する学問です．今はベクトル空間という 3 つの条件をみたす空間を考えています．つまり，ただの集合としてではなく，ベクトル空間という構造も一緒に考えているのです．そこで**２つのベクトル空間の構造を保つ**ような写像を考えましょう.「線形代数＝１次の数学」ということを思い出してください．$f(x) = kx$ という関数を考えると，$f(a+b) = k(a+b) = ka + kb = f(a) + f(b)$ とか，$f(\lambda a) = k(\lambda a) = \lambda(ka) = \lambda f(a)$ という等式が成り立つことがわかります．このような性質は線形性とよばれます．もし，$f(x) = x^2$ とかもっと複雑な多項式を考えると，このような性質は成り立ちません．そこで，ベクトル空間の間の写像を次のように定めます.

ベクトル空間の間の線形写像

２つのベクトル空間 V, W の間の写像 $T : V \to W$ が

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{a}) + T(\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V) \\ T(\lambda\, \boldsymbol{a}) = \lambda T(\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

をみたすときを T を**線形写像**とよぶことにします．さらに，線形写像 T が集合の間の１対１対応を与えるとき，**線形同型写像**とよぶことにします．T が線形同型写像のとき，V と W は「ベクトル空間としてはまったく同じ」と考えることができます.

桑野先生は講義中に写像の１対１対応を単射，全射という言葉で表現しようとしていました[10].

[10]玄人向けに解説を付け加えておきます．２つの集合 V, W の間の対応 T が,「任意の V の元 x に対し，W の元 $T(x)$ が一意的に定まる」をみたすとき写像とよばれます．写像 $T : V \to W$ に対し

これで線形代数入門は終了です．ひどく概念的なので．理解するには相当の時間がかかると思います．しかし，ここで立ち止まっては，目標までたどり着けないので，ひとまずは目をつむり先に進むことにしましょう．

3.2 線形漸化式と解空間

第 2 の旅へと出発しましょう．今回の出発点は三項間線形漸化式

$$x(n+2) = \xi x(n+1) + \eta x(n) \qquad n \in \mathbb{N}_0 \qquad \cdots (\spadesuit)$$

です．ここで $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ は定数です．$\xi = \eta = 1$ とするとこれは Fibonacci 数列の漸化式と一致します．今回は一般的な漸化式から出発します．この漸化式をみたす数列のことを漸化式 ($\spadesuit$) の解とよびましょう．漸化式の解はいくらでも存在します．そこで，漸化式 ($\spadesuit$) の解を全部集めた空間を $\mathcal{L}$ と表します[11]．数列 a が漸化式 ($\spadesuit$) をみたすとき，a は $\mathcal{L}$ に含まれる，とか $a \in \mathcal{L}$ などと書いたりします．このとき，実は空間 $\mathcal{L}$ はベクトル空間になります．

漸化式の解空間 $\mathcal{L}$ がベクトル空間であること

すべての項が 0 である数列を $\mathbf{0}$ と表します．また，$\mathcal{L}$ に含まれる 2 つの数列 $a, b \in \mathcal{L}$ と実数 λ に対して，和とスカラー倍を

$$(a+b)(n) := a(n) + b(n)$$
$$(\lambda a)(n) := \lambda a(n)$$

と定義する．このとき，$\mathcal{L}$ は次をみたす．

(1) $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$

(2) $a, b \in \mathcal{L} \Longrightarrow a + b \in \mathcal{L}$

(3) $\lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathcal{L} \Longrightarrow \lambda a \in \mathcal{L}$

つまり，$\mathcal{L}$ はベクトル空間である．

(1) が成り立つことはとても簡単にチェックできるので，各自やってみてください．(2) が成り立つことをチェックしましょう．

て，単射，全射，全単射を以下で定義します．写像 T は「任意の $x, y \in V$ に対して，$T(x) = T(y)$ ならば $x = y$」をみたすとき単射とよばれます．また，T は「任意の $w \in W$ に対して，ある $v \in V$ が存在して，$w = T(v)$ と表せる」をみたすとき全射とよばれます．写像 T は単射かつ全射のとき全単射とよばれます．集合の間の 1 対 1 対応とは，厳密には全単射のことです．ちなみに，T が全単射であることと，任意の $w \in W$ に対して，ある $v \in V$ が一意的に存在して $w = T(v)$ と表せることは同値です．

[11](エルの筆記体です．やわらかいエルとか読む人もいます)

((2) が成り立つことの証明) $a, b \in \mathcal{L}$ とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\begin{aligned} a(n+2) &= \xi a(n+1) + \eta a(n) \\ b(n+2) &= \xi b(n+1) + \eta b(n) \end{aligned}$$

が成り立つ．各辺を足して

$$\begin{aligned} & a(n+2) + b(n+2) = \xi(a(n+1) + b(n+1)) + \eta(a(n) + b(n)) \\ \Longleftrightarrow & (a+b)(n+2) = \xi(a+b)(n+1) + \eta(a+b)(n) \end{aligned}$$

を得る．よって，$a + b \in \mathcal{L}$ が成り立つ． □

練習 $\mathcal{L}$ が (1),(3) をみたすことを証明せよ．

さて，第 2 の旅の目標は $\cdots$

今回の目標

(1) Fibonacci 数の加法定理をベクトル空間の概念を使って自然に見いだす．

(2) Binet の公式を導く．

Binet（ビネ）の公式とは，漸化式 $x(n+2) = \xi x(n+1) + \eta x(n)$ をみたす数列 x の一般項を具体的に求める公式です．Binet の公式を使うと，Fibonacci 数の一般項も求めることができます．その形にきっと驚くことでしょう．

線形漸化式 (♠) の解空間を $\mathcal{L}$ と書いたことを思い出してください．そして $\mathcal{L}$ はベクトル空間であることを示しました．$\mathcal{L}$ は数列を集めた空間なので，とても複雑なもののように感じます．しかし，$\mathcal{L}$ はベクトル空間としては平面 $\mathbb{R}^2$ とまったく同じものなのです．今からそのことを説明します．

$\mathcal{L}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & a & \longmapsto & (a(0), a(1)) \end{array}$$

を考えます．すると T は線形写像となります．つまり，

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T(a) + T(b) \qquad && (a, b \in \mathcal{L}) \\ T(\lambda a) &= \lambda T(a) && (a \in \mathcal{L}, \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が成り立ちます．証明してみましょう．

(T が線形写像になることの証明) 任意の $a, b \in \mathcal{L}$ に対して

$$\begin{aligned} T(a+b) &= ((a+b)(0), (a+b)(1)) \\ &= (a(0) + b(0), a(1) + b(1)) \\ &= (a(0), a(1)) + (b(0), b(1)) \\ &= T(a) + T(b) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，任意の $a \in \mathcal{L}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} T(\lambda a) &= ((\lambda a)(0), (\lambda a)(1)) \\ &= (\lambda a(0), \lambda a(1)) \\ &= \lambda(a(0), a(1)) \\ &= \lambda T(a) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，T は線形写像である． $\square$

$\mathcal{L}$ の要素 a とは，漸化式 (♠) をみたす数列のことであったことを思い出しましょう．数列の一致の定理より，漸化式 (♠) をみたす数列 a は，初期条件 $a(0)$ と $a(1)$ を決めると，唯一通りに定まるので，T は $\mathcal{L}$ の要素と $\mathbb{R}^2$ の要素の間に一対一対応を作ります．よって，T は特に線形同型写像です．つまり，$\mathcal{L}$ と $\mathbb{R}^2$ はベクトル空間としてまったく同じものということがいえました．

よって，これからは，$\mathcal{L}$ の要素 a を調べるときは，それに対応するベクトル $(a(0), a(1))$ を考えることにします．

次に，$\mathcal{L}$ の基底について詳しく見ていきましょう．e_0, e_1 を漸化式 (♠) の解で $e_0(0) = 1, e_0(1) = 0$ および $e_1(0) = 0, e_1(1) = 1$ をみたす数列とします．すると，次のことがいえます．

$\{e_0, e_1\}$ は $\mathcal{L}$ の基底である．つまり，任意の $a \in \mathcal{L}$ は

$$a = a(0)e_0 + a(1)e_1$$

と唯一通りに表すことができる．

２通りの方法で証明してみましょう．まずは数列の一致の定理を使った証明法です．

(数列の一致の定理を使った証明) $b = a(0)e_0 + a(1)e_1$ とおき，これが a と一致することを示す．まず，$b \in \mathcal{L}$ であることを示す．これには $\mathcal{L}$ が持つ性質を使う．$e_0, e_1 \in \mathcal{L}$ なので，性質 (3) より $a(0)e_0, a(1)e_1 \in \mathcal{L}$．よって性質 (2) より $b = a(0)e_0 + a(1)e_1 \in \mathcal{L}$ である．

次に，$a = b$ を示す．数列の一致の定理を思い出そう.「漸化式 (♠) をみたす数列 a, b に対して，初期値が一致する（つまり，$a(0) = b(0)$ かつ $a(1) = b(1)$ である）ならば $a = b$ が成り立つ」が数列の一致の定理であった．今考えている数列 a, b は漸化式 (♠) をみたすので，初期値が一致することをいえばよい．

$$\begin{aligned} b(0) &= a(0)e_0(0) + a(1)e_1(0) = a(0) \\ b(1) &= a(0)e_0(1) + a(1)e_1(1) = a(1) \end{aligned}$$

よって，$a = b$ が示せた．さらに，$a = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1$ とすると

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= a(0) \\ \lambda_1 &= a(1) \end{aligned}$$

より $a = a(0)e_0 + a(1)e_1$ となるので，この表示の仕方は一通りしかない． $\square$

次に，今後の一般化のことも念頭に置き，行列式を使って証明します．

(行列式を使った証明) 線形同型写像 $T : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^2$ により，$\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}^2$ とまったく同じベクトル空間とみなせるので，$\{e_1, e_2\}$ が $\mathcal{L}$ の基底であることを示すには，対応する $\{(e_1(0), e_1(1)), (e_2(0), e_2(1))\} = \{(1,0),(0,1)\}$ が $\mathbb{R}^2$ の基底であることを示せばよい．$\{(1,0),(0,1)\}$ が基底であることと，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ が 0 でないこととは同値であったので (ベクトル空間の基底のところの練習問題)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$$

ゆえに $\{(1,0),(0,1)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．したがって $\{e_1, e_2\}$ は $\mathcal{L}$ の基底である． $\square$

数学において,「面白い公式や定理を見つけることは，問題を証明することと同じくらい難しい」と前にも述べました．前節で Fibonacci 数の加法定理を証明しましたが，ではどうやってこの数式を発見することができるのでしょうか？「たまたま発見できた」とかそういう偶然的なものではなく，こうやったら自然に見つけられるという必然的な方法をここでは紹介します．

目標 (Fibonacci 数の加法定理)

Fibonacci 数の加法定理

$$F(m+n) = F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n)$$

を自然に見い出そう．

ではどうやって自然に見い出すことができるのか．ここまでは一般的な漸化式

$$x_{n+2} = \xi x_{n+1} + \eta x_n \qquad \cdots (\spadesuit)$$

を考えてきましたが，今からしばらくは $\xi = \eta = 1$ として Fibonacci 数列の漸化式

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad \cdots (\clubsuit)$$

を考えましょう．Fibonacci 数列の漸化式 $(\clubsuit)$ は一般的な漸化式 $(\spadesuit)$ の特別な場合ですから，今まで証明してきたことがそのまま使えます！では，Fibonacci の加法定理を発見する旅に出かけましょう．

$m \in \mathbb{N}$ を固定 (fix) します．数列 a, b を任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $a(n) = F(n+1)$, $b(n) = F(n)$ で定義します．このとき，$a, b \in \mathcal{L}$ が成り立ちます．確認してみてください．このとき，

$$\begin{vmatrix} a(0) & b(0) \\ a(1) & b(1) \end{vmatrix} = a(0)b(1) - b(0)a(1) = F(1)F(1) - F(0)F(2) = 1 \neq 0$$

より，$\{a,b\}$ は $\mathcal{L}$ の基底であることがいえます．数列 c を任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $c(n) = F(m+n)$ で定めると，$\{a,b\}$ は $\mathcal{L}$ の基底であるので，ある $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ が存在して

$$c = \lambda a + \mu b$$

と唯一通りに表すことができます．このとき，

$$\begin{aligned} c(0) &= \lambda a(0) + \mu b(0) = \lambda F(1) + \mu F(0) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = \lambda \\ c(1) &= \lambda a(1) + \mu b(1) = \lambda F(2) + \mu F(1) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 = \lambda + \mu \end{aligned}$$

なので，λ と μ について解くと

$$\begin{aligned} &\lambda = c(0) = F(m) \\ &\mu = c(1) - \lambda = F(m+1) - F(m) = F(m-1) \quad \text{(Fibonacci 数列の漸化式を使う)} \end{aligned}$$

となります．よって，任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\begin{aligned} F(m+n) &= c(n) \\ &= F(m)a(n) + F(m-1)b(n) \\ &= F(m)F(n+1) + F(m-1)F(n) \end{aligned}$$

となり，Fibonacci 数の加法定理を得ることができました．

ここで強調しておきたいのは，上記加法定理は Fibonacci 数列を研究してやっとのことで見つけ出したわけではなく，ベクトル空間の基底という道具を使った結果，「あらま」と出てきてしまった，ということです．つまり，Fibonacci 数の加法定理は Fibonacci 数特有の性質ではなく，漸化式 (♠) をみたす数列に共通の性質であるといえます．桑野先生の「Fibonacci 数の加法定理を**自然に見いだすことができる**」という表現は,「ベクトル空間の基底の取り替えにより，演繹的に加法定理が導かれる」と解釈できます.

さて，ここからは講義の最終目標に向かって一気に突き進みましょう．

最終目標 (Binet の公式)

$\mathcal{L}$ を漸化式

$$x_{n+2} = \xi x_{n+1} + \eta x_n \qquad \cdots (\spadesuit)$$

の解空間とするとき，任意の $a \in \mathcal{L}$ の一般項を具体的に求めよ．

漸化式 (♠) に対応する 2 次方程式

$$t^2 = \xi t + \eta \qquad \cdots (\diamond)$$

が相異なる 2 つの解 α, β を持つ場合を考える[12]．数列 $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ を

$$\widehat{\alpha}(n) = \alpha^n$$
$$\widehat{\beta}(n) = \beta^n$$

で定めると $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \mathcal{L}$ が成り立つ．実際，α は $(\diamond)$ の解なので $\alpha^2 = \xi\alpha + \eta$ となるので，両辺に α^n をかけて

$$\alpha^{n+2} = \xi\alpha^{n+1} + \eta\alpha^n$$

となる．よって，$\widehat{\alpha}(n+2) = \xi\widehat{\alpha}(n+1) + \eta\widehat{\alpha}(n)$ が成り立つ．よって，$\widehat{\alpha} \in \mathcal{L}$ である．同様に $\widehat{\beta} \in \mathcal{L}$ がいえる．また

$$\begin{vmatrix} \widehat{\alpha}(0) & \widehat{\beta}(0) \\ \widehat{\alpha}(1) & \widehat{\beta}(1) \end{vmatrix} = \widehat{\alpha}(0)\widehat{\beta}(1) - \widehat{\beta}(0)\widehat{\alpha}(1) = 1 \cdot \beta - 1 \cdot \alpha = \beta - \alpha \neq 0$$

であるので，$\{\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\}$ は $\mathcal{L}$ の基底である．つまり，任意の $c \in \mathcal{L}$ は

$$c = \lambda\widehat{\alpha} + \eta\widehat{\beta} \qquad (\lambda, \eta \in \mathbb{R})$$

と唯一通りに表示される．

一般 Fibonacci 数列

漸化式

$$x_{n+2} = \xi x_{n+1} + \eta x_n \qquad \cdots (\spadesuit)$$

の解 f で，$f(0) = 0, f(1) = 1$ をみたすものを**一般 Fibonacci 数列**とよぶ．特に，$\xi = \eta = 1$ のとき，一般 Fibonacci 数列とは Fibonacci 数列のことである．

一般 Fibonacci 数列に対する Binet の公式

漸化式

$$x_{n+2} = \xi x_{n+1} + \eta x_n \qquad \cdots (\spadesuit)$$

の特性方程式 $t^2 = \xi t + \eta$ が相異なる 2 つの解 α, β を持つとき，一般 Fibonacci 数列 $f \in \mathcal{L}$ の一般項は次で与えられる．

$$f(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(証明) $\{\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\}$ は $\mathcal{L}$ の基底であるので，ある $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ があって，

$$f = \lambda\widehat{\alpha} + \eta\widehat{\beta}$$

[12] 2 次方程式 $(\diamond)$ は漸化式 $(\spadesuit)$ の特性方程式とよばれます．名前の由来は，線形代数に出てくる特性方程式から来ています．

と唯一通りに表示できる．f は一般 Fibonacci 数列より $f(0) = 0, f(1) = 1$ であるので

$$
\begin{aligned}
0 = f(0) = \lambda\widehat{\alpha}(0) + \eta\widehat{\beta}(0) = \lambda + \eta \\
1 = f(1) = \lambda\widehat{\alpha}(1) + \eta\widehat{\beta}(1) = \lambda\alpha + \eta\beta
\end{aligned}
$$

となる．これを λ および η について解くと

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\alpha - \beta} \\
\eta &= -\frac{1}{\alpha - \beta}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
f = \frac{1}{\alpha - \beta}\widehat{\alpha} - \frac{1}{\alpha - \beta}\widehat{\beta} = \frac{\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}}{\alpha - \beta}
$$

を得る．したがって，任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$
f(n) = \frac{\widehat{\alpha}(n) - \widehat{\beta}(n)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.
$$

□

系 (Fibonacci 数列に対する Binet の公式)

Fibonacci 数列 F の一般項は

$$
F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}
$$

で与えられる．

(証明) Binet の公式を $\xi = \eta = 1$ のときに適用する．Fibonacci 数列は $F \in \mathcal{L}$ で $F(0) = 0, F(1) = 1$ をみたす数列である．$t^2 = t + 1$ の解は $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ より，Binet の公式より

$$
\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}
$$

を得る． □

Fibonacci 数列の一般項がこのような形で与えられることはとても面白いことであると思いませんか？というのは，まず第一に $\mathbf{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots}$ という数列の一般項を表すのに $\sqrt{5}$ が使われるということです．ルートを使おうとは，普通に考えていては思いつかないですよね．次に注目すべき点は $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ という数で

す．この数は黄金数とよばれ，また，$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比とよばれていて，ミロのビーナス，パルテノン神殿，クレジットカードなど人工的なものから，ひまわりの種，巻貝の殻など自然界にいたるまでいろいろなところで発見することができます．そのような数と，その共役の $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ という数を用いて Fibonacci 数が表されるという事実は，数学を超えたもっと大きな何かと関連しているのではないかと幻想してしまいます．数学は自然現象を記述するために人間によって構築されてきました．数学は与えられた問題を解くだけの学問ではなく，さまざまな現象の本質を見抜き，そして，自分なりの解釈を与え，面白さを発見し，味わう学問であると思います．

講義内容は高校の範囲を超えた難しいものだったかもしれません．しかし，Fibonacci 数から始まる一連の数学に対して,「ああ，こんな数学も存在するんだ，数学って難しいけど，おもしろいかも」って思ってもらえれば，これ以上うれしいことはありません．

4　補足

ここでは，講義や配布されたレジュメ等を参考に，前節までに触れなかった内容をまとめておきます．

前節では一般 Fibonacci 数列の Binet の公式を述べましたが，ここではより一般的な形で Binet の公式を述べます．

一般の漸化式に対する Binet の公式

漸化式

$$x_{n+2} = \xi x_{n+1} + \eta x_n \qquad \cdots(\spadesuit)$$

の解空間を $\mathcal{L}$ とする．このとき特性多項式は $t^2 = \xi t + \eta$ である．

(i) 特性多項式が相異なる 2 つの解 α, β を持つとき．任意の $f \in \mathcal{L}$ に対して

$$f(n) = \frac{\beta f(0) - f(1)}{\beta - \alpha}\alpha^n + \frac{\alpha f(0) - f(1)}{\alpha - \beta}\beta^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

と表すことができる．

(ii) 特性方程式が重解 α を持つとき．任意の $f \in \mathcal{L}$ に対して

$$f(n) = f(0)\alpha^n + n(f(1) - \alpha f(0))\alpha^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

と表すことができる．

ここまでの内容が理解できていれば，この公式は簡単に証明できる．

(証明の概略) (i) 特性方程式が相異なる 2 つの解 α, β を持つとき，数列 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ を $\widehat{\alpha}(n) = \alpha^n$, $\widehat{\beta}(n) = \beta^n (n \in \mathbb{N}_0)$ と定める．このとき $\{\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\}$ は $\mathcal{L}$ の基底となる．よって，任意の $f \in \mathcal{L}$ に対して，ある $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$f = \lambda\widehat{\alpha} + \mu\widehat{\beta}$$

と唯一通りに表すことができる．連立方程式

$$\begin{cases} f(0) = \lambda\widehat{\alpha}(0) + \mu\widehat{\beta}(0) = \lambda + \mu \\ f(1) = \lambda\widehat{\alpha}(1) + \mu\widehat{\beta}(1) = \lambda\alpha + \mu\beta \end{cases}$$

を λ, μ について解けば

$$\lambda = \frac{f(0)\beta - f(1)}{\beta - \alpha}$$
$$\mu = \frac{f(0)\alpha - f(1)}{\alpha - \beta}$$

より，

$$f = \frac{f(0)\beta - f(1)}{\beta - \alpha}\widehat{\alpha} + \frac{f(0)\alpha - f(1)}{\alpha - \beta}\widehat{\beta}$$

を得る．よって，任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$f(n) = \frac{f(0)\beta - f(1)}{\beta - \alpha}\alpha^n + \frac{f(0)\alpha - f(1)}{\alpha - \beta}\beta^n$$

を得る．

(ii) 特性方程式が重解 α を持つとき，数列 $\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}_1$ を $\widehat{\alpha}(n) = \alpha^n, \widehat{\alpha}_1(n) = n\alpha^{n-1} (n \in \mathbb{N}_0)$ と定める．このとき $\{\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}_1\}$ は $\mathcal{L}$ の基底となる．よって，任意の $f \in \mathcal{L}$ に対して，ある $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f = \lambda\widehat{\alpha} + \mu\widehat{\alpha}_1$$

と唯一通りに表すことができる．連立方程式

$$\begin{cases} f(0) = \lambda\widehat{\alpha}(0) + \mu\widehat{\alpha}_1(0) = \lambda \\ f(1) = \lambda\widehat{\alpha}(1) + \mu\widehat{\alpha}_1(1) = \lambda\alpha + \mu \end{cases}$$

を λ, μ について解けば

$$\lambda = f(0)$$
$$\mu = f(1) - f(0)\alpha$$

より

$$f = f(0)\widehat{\alpha} + (f(1) - f(0)\alpha)\widehat{\alpha}_1$$

を得る．よって，任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$f(n) = f(0)\alpha^n + n(f(1) - f(0)\alpha)\alpha^{n-1}$$

を得る． □

次に一般 Fibonacci 数列の例をいくつか紹介します．前ページの Binet の公式を使えば，どの数列に対しても一般項を求めることが可能ですので，ぜひ計算してみてください．

一般 Fibonacci 数列の例

以下に登場する数列 $a(n)$ の初期値はすべて $a(0)=0, a(1)=1$ とする．

(1) 非負数列

$$a(n+2)=2a(n+1)-a(n)$$

$\mathbf{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \cdots}$

このようなとても自然な数列も一般 Fibonacci 数列の例である．

(2) 実数 r に対して，有限幾何数列 $a(n)=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}$ は

$$a(n+2)=(r+1)a(n+1)-ra(n)$$

をみたす．$a(n)$ は初項 1，公比 r の等比数列の第 1 項から第 n 項までの和である．$r=1$ のときは非負数列に一致する．

一般 Fibonacci 数列の例（つづき）

(3) Pell 数列

$$a(n+2)=2a(n+1)+a(n)$$

$\mathbf{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \cdots}$.

n が大きくなるにつれて隣接する Pell 数の比 P_{n+1}/P_n は白銀数 $1+\sqrt{2}$ に限りなく近づく．(参考：隣接する Fibonacci 数の比 F_{n+1}/F_n は黄金数 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に限りなく近づく．)

(4) 第 2 種 Chebyshev 数列

$$a(n+2)=2xa(n+1)-a(n)$$

$\boldsymbol{0, 1, 2x, 4x^2-2x, 8x^3-4x^2-2x, \cdots}$

上で紹介した数列は自然数列を含み，どの列も豊かな性質を持っています．それならば，ξ, η を変数（文字）として，そのまま得られる 2 変数の関数系を直接考察

する方がその背後にある法則が見やすいはずです．実際に計算してみると

$$\begin{aligned}
f_0 &= 0\\
f_1 &= 1\\
f_2 &= \xi\\
f_3 &= \xi^2+\eta\\
f_4 &= \xi^3+2\xi\eta\\
f_5 &= \xi^4+3\xi^2\eta+\eta^2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

一般に

$$f_n=\sum_{\nu\ge 0}\binom{n-1-\nu}{\nu}\xi^{n-1-2\nu}\eta^\nu$$

と表せます．ξ,η は変数ということを強調するために f_n を $f_n(\xi,\eta)$ と書くことにします．特に $\xi=\eta=1$ とすれば $f_n(1,1)$ は Fibonacci 数です．

Fibonacci 多項式系

$\{f_n(\xi,\eta)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を Fibonacci 多項式系とよぶ．

Binet の公式より，$\alpha=\dfrac{\xi-\sqrt{D}}{2}$, $\beta=\dfrac{\xi+\sqrt{D}}{2}$, $D=\xi^2+4\eta$ として $f_n(\xi,\eta)$ を求めると

$$\begin{aligned}
f_n(\xi,\eta) &= \frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}\\
&= \frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}\xi^{n-k}(\sqrt{D})^k-\frac{1}{2^n}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{n}{k}\xi^{n-k}(\sqrt{D})^k\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{D}}\frac{2}{2^n}\sum_{k\ge 0}\binom{n}{2k+1}\xi^{n-2k-1}(\sqrt{D})^{2k+1}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k\ge 0}\binom{n}{2k+1}\xi^{n-2k-1}D^k\\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k\ge 0}\binom{n}{2k+1}\xi^{n-2k-1}\sum_{\nu\ge 0}\binom{k}{\nu}(\xi^2)^{k-\nu}(4\eta)^\nu\\
&= \sum_{\nu\ge 0}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k\ge 0}4^\nu\binom{n}{2k+1}\binom{k}{\nu}\xi^{n-2\nu-1}\eta^\nu
\end{aligned}$$

となります．これで $f_n=f(\xi,\eta)$ を 2 通りの方法で表示できました．係数を比較して次の等式が得られます．

系

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k\geq 0}4^{\nu}\binom{n}{2k+1}\binom{k}{\nu}=\binom{n-1-\nu}{\nu}$$

Fibonacci 多項式系の因数分解は，自然数と並び，Fibonacci 数，Chebyshev 多項式等がなぜ自然現象の中にあらわれるかを示唆します．これは円の深い美しい性質に由来する円分多項式の性質に他ならないらしいのですが，その話はまた別の機会に桑野先生にお聞きしましょう．

5　関連する入試問題など　(吉本　響)

1. 数列 $\{a_n\}$ は, $a_1=1,\ a_2=1,\ a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=(-1)^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ により定まる. 次の問いに答えよ.

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) m を自然数とするとき, a_{6m} は 8 の倍数であることを示せ.

('01　横浜国立大, 工, 後期)

解答

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ \cdots(*)$ を帰納法で示す.

i) $n=1$ のとき, $a_1a_3-a_2^2=(-1)^2$ より, $a_3=2$ となり, $(*)$ は成り立つ.

ii) $n=1,2,3,\cdots,k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する.

このとき, 与漸化式より $\begin{cases} a_ka_{k+2}-a_{k+1}^2=(-1)^{k+1} \cdots ① \\ a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+2}^2=(-1)^{k+2} \cdots ② \end{cases}$ である.

①+②より

$a_ka_{k+2}-a_{k+1}^2+a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+2}^2=0.$

ここで, $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つので, $a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$ となるから,

$(a_{k+2}-a_{k+1})\,a_{k+2}-a_{k+1}^2+a_{k+1}a_{k+3}-a_{k+2}^2=0$

$a_{k+1}\,(-a_{k+2}-a_{k+1}+a_{k+3})=0.\ \cdots③$

さらにここで, $n=1,2,3,\cdots,k-1$ のとき $(*)$ が成り立つことと,

$a_1>0,\ a_2>0$ とから, 帰納的に $a_{k+1}>0$ となるので③より,

$-a_{k+2}-a_{k+1}+a_{k+3}=0.\quad \therefore a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}.$

よって, $n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ.

i,ii より, すべての $n\in\mathbb{N}$ について $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成り立つ.

(2) 帰納法で示す.

i) (1) より, $a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=8$ なので, a_6 は 8 の倍数.

ii) $a_{6k}\ (k\in\mathbb{N})$ が 8 の倍数であると仮定すると, $a_{6k}=8N\ (N\in\mathbb{N})$ とおける.

このとき,
$$\begin{aligned} a_{6(k+1)} &= a_{6k+6} \\ &= a_{6k+5}+a_{6k+4} \\ &= 2a_{6k+4}+a_{6k+3} \quad (\because\ a_{6k+5}=a_{6k+4}+a_{6k+3}) \\ &= 3a_{6k+3}+2a_{6k+2} \quad (\because\ a_{6k+4}=a_{6k+3}+a_{6k+2}) \\ &= 5a_{6k+2}+3a_{6k+1} \quad (\because\ a_{6k+3}=a_{6k+2}+a_{6k+1}) \\ &= 8a_{6k+1}+5a_{6k} \quad (\because\ a_{6k+2}=a_{6k+1}+a_{6k}) \\ &= 8(a_{6k+1}+5N). \end{aligned}$$

ここで, $a_{6k+1}+5N\in\mathbb{N}$ であるから, $a_{6(k+1)}$ は 8 の倍数.

i, ii より, すべての $m \in \mathbb{N}$ について a_{6m} は 8 の倍数.

(2) の別解

(2) の解答の帰納法の ii において,
Fibonacci 数の加法定理 $a_{m+n} = a_m a_{n+1} + a_{m-1} a_n$ を使ってよいとすると,
$a_{6(k+1)} = a_{6k+6} = a_{6k} a_7 + a_{6k-1} a_6 = 8pa_7 + a_{6k-1} 8 = 8(pa_7 + a_{6k-1})$
となり, ここで $pa_7 + a_{6k-1} \in \mathbb{N}$ であるから, $a_{6(k+1)}$ は 8 の倍数.

2. 実数 $p,\ q$ に対して, 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1,\ a_2 = p+q$,

$$a_{n+2} - (p+q)a_{n+1} + pqa_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする. このとき次の問いに答えよ.

(1) a_n を $p,\ q,\ n$ で表せ.

(2) $p,\ q$ が方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解とする.
すべての自然数 $m,\ n$ に対して

$$a_{m+n+1} = a_{m+1} a_{n+1} + a_m a_n$$

が成り立つことを示せ.

(3) (2) のとき, n が 5 の倍数ならば a_n も 5 の倍数であることを示せ.

('06 名古屋市立大, 医)

補足 (2) は Fibonacci 数の加法定理です.

解答

(1) $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ だから,
$\{a_{n+1} - pa_n\}$ は初項 $a_2 - pa_1 = q$, 公比 q の等比数列ゆえ
$a_{n+1} - pa_n = q^n$. $\cdots$①
$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$ だから,
$\{a_{n+1} - qa_n\}$ は初項 $a_2 - qa_1 = p$, 公比 p の等比数列ゆえ
$a_{n+1} - qa_n = p^n$. $\cdots$②
②−①より $(p-q)a_n = p^n - q^n \quad \therefore p \neq q$ のとき $a_n = \dfrac{p^n - q^n}{p - q}$.
$p = q$ のときは, ①より $a_{n+1} - pa_n = p^n$.
(ア) $p \neq 0$ のとき, $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}} - \dfrac{a_n}{p^n} = \dfrac{1}{p}$ だから,
$\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$ は, 初項 $\dfrac{a_1}{p} = \dfrac{1}{p}$, 公差 $\dfrac{1}{p}$ の等差数列ゆえ,

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{1}{p}+(n-1)\frac{1}{p}=\frac{n}{p}.\quad \therefore a_n=np^{n-1}$$

(イ) $p=0$ のとき,①より $a_{n+1}=0.\quad \therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n \geqq 2)\end{cases}$

以上より, $a_n=\begin{cases}\dfrac{p^n-q^n}{p-q} & (p \neq q \text{ のとき})\\ np^{n-1} & (p=q\neq 0 \text{ のとき})\\ \begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n\geqq 2)\end{cases} & (p=q=0 \text{ のとき})\end{cases}$

(2) $p+q=1,\ pq=-1$ なので, 与式は $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\ a_1=a_2=1\ \cdots\ (\sharp)$ となる.

すべての $m,\ n\in\mathbb{N}$ に対して,

$a_{m+n+1}=a_{m+1}a_{n+1}+a_m a_n\ \cdots\ (*)$

が成り立つことを n についての帰納法で示す.

(m は任意の自然数として固定しておく.)

i) $n=1$ のとき, $(\sharp)$ より

$a_{m+1+1}=a_{m+1}+a_m=a_{m+1}a_2+a_m a_1$ となり, $(*)$ は成り立つ.

ii) $n=2$ のとき, $(\sharp)$ より,

$$\begin{aligned}a_{m+2+1}&=a_{m+2}+a_{m+1}\\&=(a_{m+1}+a_m)+a_{m+1}\\&=a_{m+1}\cdot 2+a_{m+1}\cdot 1\\&=a_{m+1}(a_2+a_1)+a_{m+1}a_2\\&=a_{m+1}a_3+a_{m+1}a_2\end{aligned}$$

となり, $(*)$ は成り立つ.

iii) $n=k-1,\ k$ のとき $(*)$ が成り立つとすると,

$\begin{cases}a_{m+(k-1)+1}=a_{m+1}a_k+a_m a_{k-1}\\ a_{m+k+1}=a_{m+1}a_{k+1}+a_m a_k\end{cases}$ である.

このとき, $(\sharp)$ より

$$\begin{aligned}a_{m+k+2}&=a_{m+k+1}+a_{m+k}\\&=(a_{m+1}a_{k+1}+a_m a_k)+(a_{m+1}a_k+a_m a_{k-1})\\&=a_{m+1}(a_{k+1}+a_k)+a_m(a_k+a_{k-1})\\&=a_{m+1}a_{k+2}+a_m a_{k+1}\end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ.

i〜iii より

すべての $m,\ n\in\mathbb{N}$ について, $(*)$ が成り立つ.

(3) 帰納法で示す.

i) $a_5=a_4+a_3=2a_3+a_2=3a_2+2a_1=5$ は 5 の倍数.

ii) a_{5k} が 5 の倍数であると仮定すると, $a_{5k}=5N\quad (N\in\mathbb{N})$ とおける.

このとき (2) より,

$a_{5(k+1)}=a_{5k+4+1}=a_{5k+1}a_{4+1}+a_{5k}a_4=5(a_{5k+1}+Na_4)$

となり, ここで $a_{5k+1}+Na_4\in\mathbb{N}$ であるから $a_{5(k+1)}$ も 5 の倍数.

i,ii よりすべての $m\in\mathbb{N}$ に対して a_{5m} は 5 の倍数.

すなわち, n が 5 の倍数ならば, a_n も 5 の倍数.

(1) の別解

与式が $n=0$ のときも成り立つとすると,

$$\begin{cases} a_2-(p+q)a_1+pqa_0=0 \\ a_1=1,\ a_2=p+q \end{cases}$$ より, $a_0=0$ である.

特性方程式の解は $\alpha=p,\ \beta=q$ としてよいから, 26 ページの一般の漸化式に対する Binet の公式により,

(i) $p\neq q$ のとき, $a_n=\dfrac{qa_0-a_1}{q-p}p^n+\dfrac{pa_0-a_1}{p-q}q^n=\dfrac{p^n-q^n}{p-q}$.

(ii) $p=q\neq 0$ のとき, $a_n=a_0p^n+n(a_1-pa_0)p^{n-1}=np^{n-1}$.

(iii) $p=q=0$ のとき, $\begin{cases} a_1=1. \\ a_n=0\,(n\geqq 2). \end{cases}$

(2) の別解 1

$p\neq q$ だから, $a_n=\dfrac{p^n-q^n}{p-q}$ なので,

$$\begin{aligned}
&a_{m+n+1}-a_{m+1}a_{n+1}\\
&\quad=\frac{p^{m+n+1}-q^{m+n+1}}{p-q}-\frac{p^{m+1}-q^{m+1}}{p-q}\cdot\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}\\
&\quad=\frac{1}{(p-q)^2}\left\{(p^{m+n+1}-q^{m+n+1})(p-q)-(p^{m+1}-q^{m+1})(p^{n+1}-q^{n+1})\right\}\\
&\quad=\frac{1}{(p-q)^2}(-p^{m+n+1}q-pq^{m+n+1}+p^{m+1}q^{n+1}+p^{n+1}q^{m+1})\\
&\quad=\frac{1}{(p-q)^2}(p^{m+n}+q^{m+n}-p^mq^n-p^nq^m)\quad(\because\ pq=-1\,)\\
&\quad=\frac{p^m-q^m}{p-q}\cdot\frac{p^n-q^n}{p-q}\\
&\quad=a_ma_n.
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{m+n+1}=a_{m+1}a_{n+1}+a_ma_n.$

(2) の別解 2

($\sharp$) より $\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ なので,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{m+n+1} & a_{m+n} \\ a_{m+n} & a_{m+n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \\ &= \begin{pmatrix} a_{m+1} & a_m \\ a_m & a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(1, 1) 成分を計算すると,

$$a_{m+n+1} = a_{m+1}a_{n+1} + a_m a_n.$$