数学工房・名古屋公開講座　講義ノート

不等式から始めよう
（解析学への入門）

講師　桑野 耕一（数学工房）

日時：2012 年 4 月 29 日（日）
場所：SEA 科学教育研究会

ノート作成者　関谷 雄飛 (SEA 数学科講師)

ご挨拶

数学工房名古屋公開講座 2001 年から始まり，今年で 10 回目になりました．その間にいろいろなことがありました．21 世紀の最初の 10 年なんという年月でしょう．アメリカを襲った同時多発テロからイラク戦争，スマトラ地震や東日本大地震，金融資本主義の暴走など，人災と天災の繰り返しに明け暮れました．そのなかでなんとか 1 回のお休みのみで続いてまいりました．

この講座の目的は，当初から一貫して，皆さんが勉強されている，数学を少し高い立場から観ることにより，数学の見方を少し広げて実力を向上してもらうこと，そして，また皆さんは大学に合格すると今度は受験の数学ではなくて森羅万象の背後に潜む法則を理解するための言語としての数学に出会うことになるので，その橋渡しのヒントを差し上げることです．

皆さんの未来に待っているのは単に数量を取り扱う処方としての数学ではなく，Mathemata（すべての学問の基礎）なのです.（現実は大半の大学生がそのギャップを乗り越え損なうようです．数学科といえども例外ではありません.）

10 回目の今回は皆さんおなじみの相加相乗平均不等式とその発展を材料として数学とは何をすることかを考えましょう．

19 世紀の初めに現在の微積分学の不等式による方法を確立した巨人 Cauchy による有名な証明から初めて約 1 世紀後の Jensen による鮮やかな，しかも重要な一般化，凸不等式と凸関数のクラスの発見そして凸関数の特徴付けまでを論じます．

この話が若い皆さんが将来本格的に数学を勉強される際に少しでもヒントになれば幸いです．

最後に私のつたない話を熱心に聴いて下さった参加者の皆さんと，機会と場所を提供して下さり，いつものように裏側から支えてくださった，代表の吉本さんをはじめとする SEA のスタッフに感謝します．特に私の多少わかりにくい処のある講義を受験生の実用にも十分に耐えるような，熱意の伝わってくるノートにまとめてくださった関谷さんをはじめとする SEA のスタッフに感謝いたします．

数学工房 桑野耕一 2012 年 6 月

はじめに

このノートは2012年4月29日にSEA科学教育研究会にて行われた数学工房の公開講座「不等式から始めよう（解析学への入門）」での桑野耕一先生の講演をもとに作成したものです．

今年は高校生のみなさんにとっても馴染み深い「相加・相乗平均の不等式」のお話でした．講義は2変数の場合の相加・相乗平均の不等式の証明から始まり，次に n 変数の場合にCauchy，Ehlers，Jacobsthalによる証明法が紹介されました．そして，対数関数と図形の凸性の関係を見抜くことにより，Jensenの凸関数の概念へと発展していきました．そして，凸関数の特徴付けをいくつか紹介しました．

受験においては，相加・相乗平均の不等式をいかにうまく使えるかということが重要です．しかし，今回の講座ように，１つの不等式から出発してそこから新しい数学的概念を発見していくというスタイルは，数学のみならず，医学などの全ての理系分野にとって大切な姿勢だと思います．

とても素晴らしい講演をしていただいた桑野先生と参加してくれた生徒のみなさんのために，少しでも力になれればとこのノートを執筆しました．執筆にあたり，参考資料を提供してくださった吉本先生・杉村先生・犬飼先生に感謝します．特に，犬飼先生が独自に作られたノートには大変お世話になりましたので，この場を借りてお礼申し上げます．このノートが少しでも参加者のみなさんの役に立てれば幸いです．

2012年6月
ノート作成者　関谷雄飛

このノートの読み進め方

目次を見ながら以降の文章を読むと，分かりやすいと思います.

まずは,「1. 相加・相乗平均の不等式」を読んでください. n 変数の相加・相乗平均の不等式のいろいろな証明法が集めてあり，多面的なものの見方を養うことができると思います.「1.4. 凸性を用いた幾何学的別証」は次章に繋がる重要な部分なので，読み飛ばさないでください.

次に,「2. 凸関数」に進んでください.
この章は初級コースと上級コースの 2 コースを用意しました.

初級コースは「2.1. 凸関数と Jensen（イェンゼン）の不等式」までです. 凸関数の定義を理解すること，また凸性と Jensen の不等式が同値であることを理解することが目標です. その結果，2 階微分を使って凸性が判定できることを認めれば，凸関数から相加・相乗平均の不等式が導かれることを証明できます.

上級コースは「2.2. 凸関数の特徴付け」までです. 凸関数にはさまざまな特徴付けがあることを，証明も含め理解することが目標です. その結果，なぜ「2 階微分が正ならば凸」が正しいかを（直観を使わずに）理解できることになります. この部分を読まなければ意味がない，といっても過言ではありませんが，証明を読むにはそれなりの力が必要ですのでコース分けをしました.

さらに余力のある読者は「3. 付録」も読むとよいでしょう. 特に,「3.4. いろいろな例」では，凸関数から有名不等式を導くことにより，いかに凸関数が有用であるかが理解できます.

もちろん上級コースまで読むことを強く期待しますが，自分の力にあったところまでを読んでもらえばよいと思います.

目 次

0　記号・用語集

・集合の記号

　$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体の集合

　$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体の集合

　$f : I \to \mathbb{R}$ ⋯ I を定義域とする関数 $f(x)$

1　相加・相乗平均の不等式

相加・相乗平均の不等式

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ のとき，

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \ (n \geqq 2)$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときである．

以下では，Cauchy, Ehlers, Jacobsthal の 3 通りの証明法を紹介します．

1.1　Cauchy（コーシー）の証明

Cauchy の証明法は ① $n = 2$ の場合 ② $n = 2^k$ の場合 ③ n が一般の場合の 3 段階に分けて証明します．

相加・相乗平均の不等式 ($n = 2$ **の場合**)

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ のとき，

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1 x_2}$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = x_2$ のときである．

（証明） まず，次のように同値変形ができる．

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1 x_2} &\iff (x_1 + x_2)^2 \geqq 4x_1 x_2 \\ &\iff (x_1 - x_2)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$(x_1 - x_2)^2 \geqq 0$ は真なので，$\dfrac{x_1 + x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1 x_2}$ が成り立つ．

等号成立は $(x_1 - x_2)^2 = 0 \iff x_1 = x_2$ のときである．　□

相加・相乗平均の不等式 ($n = 2^k$ **の場合**)

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_{2^k} \geqq 0$ のとき，

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \geqq (x_1 x_2 \cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \ (k \geqq 1)$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2^k}$ のときである．

（証明） k に関する数学的帰納法で証明する．

(i) $k = 1$ のときは，既に示した．

(ii) $k=\ell$ のとき，主張が成り立つと仮定する．$k=\ell+1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{\ell+1}}}{2^{\ell+1}} &= \frac{(x_1+\cdots+x_{2^\ell})+(x_{2^\ell+1}+\cdots+x_{2^{\ell+1}})}{2^{\ell+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^\ell}}{2^\ell}+\frac{x_{2^\ell+1}+\cdots+x_{2^{\ell+1}}}{2^\ell}\right) \\ &\geqq \left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^\ell}}{2^\ell}\cdot\frac{x_{2^\ell+1}+\cdots+x_{2^{\ell+1}}}{2^\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\ell=1\text{ の場合}) \\ &\geqq \left\{(x_1\cdots x_{2^\ell})^{\frac{1}{2^\ell}}\cdot(x_{2^\ell+1}\cdots x_{2^{\ell+1}})^{\frac{1}{2^\ell}}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= (x_1x_2\cdots x_{2^{\ell+1}})^{\frac{1}{2^{\ell+1}}}\end{aligned}$$

等号成立は $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^\ell}}{2^\ell}=\dfrac{x_{2^\ell+1}+x_{2^\ell+2}+\cdots+x_{2^{\ell+1}}}{2^\ell}$ かつ $x_1=x_2=\cdots=x_{2^\ell}$ かつ $x_{2^\ell+1}=x_{2^\ell+2}=\cdots=x_{2^{\ell+1}}$ のとき，つまり $x_1=x_2=\cdots=x_{2^{\ell+1}}$ のときである．したがって $k=\ell+1$ のときも主張は成り立つ[1].

(i), (ii) より，すべての自然数 k に対して主張は成り立つ． □

相加・相乗平均の不等式 (n が一般の場合)

$x_1\geqq 0, x_2\geqq 0,\ldots,x_n\geqq 0$ のとき，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\ (n\geqq 2)$$

が成り立つ．等号成立は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときである．

（証明） n が 2 のベキ乗，つまり $n=2^k$ $(k\geqq 1)$ の場合は既に示した．n が 2 のベキ乗でないとき，$n<2^k$ となるような，ある自然数 k が存在する．$\ell=2^k-n$, $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ とおくと，2^k の場合の相加・相乗平均の不等式より

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+\overbrace{x+\cdots+x}^{\ell}}{2^k}\right)^{2^k}\geqq x_1x_2\cdots x_n\overbrace{x\cdots x}^{\ell} \quad \cdots(*)$$

となるが，

$$(\text{左辺})=\left(\frac{nx+\ell x}{2^k}\right)^{2^k}=\left(\frac{2^kx}{2^k}\right)^{2^k}=x^{2^k}$$

より，$(*)$ の両辺を x^ℓ で割って

$$x^n=x^{2^k-\ell}\geqq x_1x_2\cdots x_n$$
$$\therefore\ \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

等号成立は，$x_1=\cdots=x_n=x\left(=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$ のとき，すなわち $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときである． □

[1]講義では「帰納法が完成した」という言い回しを使っていました．伝統的に使われているそうです．

1.2　Ehlers（エラーズ）の証明

Ehlers の改良

次の 2 つの命題は同値である．

(A)　（相加・相乗平均の不等式）$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ ならば,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \ (n \geqq 2)$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときである．

(B) $y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_n > 0$ が $y_1y_2\cdots y_n = 1$ をみたすならば,

$$y_1+y_2+\cdots+y_n \geqq n \ (n \geqq 2)$$

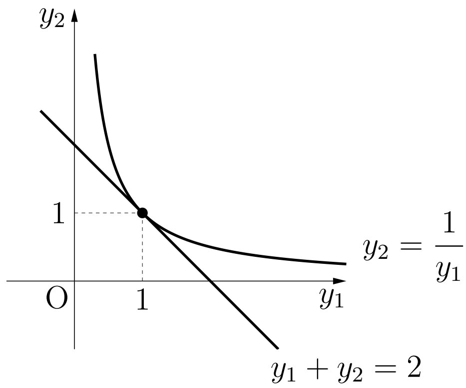
が成り立つ．等号成立は $y_1 = y_2 = \cdots = y_n (= 1)$ のときである[a].

[a] $y_1 = \cdots = y_n$ が成り立つならば，条件から $y_1 = \cdots = y_n = 1$ が言える．

（補足） $n = 2$ のときは，不等式

$$y_1 + y_2 \geqq 2 \quad (y_1y_2 = 1)$$

の意味をグラフを使って解釈することができる．直線 $y_1 + y_2 = 2$ は曲線 $y_1y_2 = 1$ に図のように接するので，不等式は曲線が直線よりも上側にあることを意味している．



（証明）(A)⇒(B)．(A) が成り立つとする．$y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_n > 0$ が $y_1y_2\cdots y_n = 1$ をみたすとき，(A) において $x_j = y_j \ (1 \leqq j \leqq n)$ とおけば，(B) を得る．

(B)⇒(A)．(B) が成り立つとする．$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ について，もし $x_j = 0$ なるものがあるときは (A) の不等式は自明．よって，$x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ の場合について考える．$x_1x_2\cdots x_n = \alpha^n \ (\alpha > 0)$ とする．このとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n\alpha$$

を示せば十分である．

$$y_j = \frac{x_j}{\alpha} \ (1 \leqq j \leqq n)$$

とおけば，$x_j>0$ と仮定したから $y_j>0$ である．さらに，$y_1y_2\cdots y_n=\dfrac{x_1\cdots x_n}{\alpha^n}=1$ が成り立つ．よって $y_1,y_2,\ldots,y_n$ は (B) の条件をみたすので，

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_n &\geqq n \\ \therefore x_1+x_2+\cdots+x_n &\geqq n\alpha. \end{aligned}$$

等号成立は $y_1=y_2=\cdots=y_n$ すなわち $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときである．したがって，(A) が成り立つ． □

Ehlers の不等式

$y_1>0,y_2>0,\ldots,y_n>0$ が $y_1y_2\cdots y_n=1$ をみたすならば，

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqq n\ (n\geqq 1) \qquad \cdots①$$

が成り立つ．等号成立は $y_1=y_2=\cdots=y_n(=1)$ のときである．

（証明） n に関する数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，（左辺）$=y_1=1$，（右辺）$=1$ より①は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき主張が成り立つと仮定する．
$n=k+1$ のとき，$y_1>0,y_2>0,\ldots,y_{k+1}>0$ が $y_1y_2\cdots y_{k+1}=1$ をみたすとする．**必要ならば項の順序を取り替えて** $y_1\geqq 1$ **かつ** $y_2\leqq 1$ **としてよい**[2]．$(y_1-1)(y_2-1)\leqq 0$ より，

$$y_1y_2+1\leqq y_1+y_2$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{k+1} &\geqq 1+y_1y_2+y_3+\cdots+y_{k+1} \\ &\geqq 1+n \end{aligned}$$

ここで最後の不等式は，k 個の数 $(y_1y_2),y_3,\ldots,y_{k+1}$ が条件 $(y_1y_2)>0,y_3>0,\ldots,y_{k+1}>0$ かつ $(y_1y_2)y_3\cdots y_ky_{k+1}=1$ をみたすことから帰納法の仮定より従う．等号成立は「$y_1=1$ または $y_2=1$」かつ $y_1y_2=y_3=\cdots=y_{k+1}$，すなわち $y_1=y_2=\cdots=y_{k+1}(=1)$ のときである．よって，$n=k+1$ のときも主張は成り立つ．

(i), (ii) よりすべての自然数 n について主張は成り立つ． □

[2]念のため証明しておく．$y_j<1\ (1\leqq j\leqq k+1)$ とすると，$y_1y_2\cdots y_{k+1}<1$ となり $y_1\cdots y_n=1$ に矛盾する．よって，少なくとも 1 つの y_j は $y_j\geqq 1$ であるので，それを y_1 と取り替えればよい．y_2 の方も同様である．

練習問題 相加・相乗平均の不等式

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad (n \geqq 2)$$

（等号成立は $x_1=\cdots=x_n$ のとき）を数学的帰納法に微分法を組み込んで証明せよ．

（ヒント）$n=k(\geqq 2)$ のときに不等式を仮定し，$n=k+1$ のとき，$x_j=y_j^n$ $(j=1,2,\ldots,k+1,\ y_j \geqq 0)$ とおいて，

$$f(t)=y_1^n+\cdots+y_k^n+t^n-ny_1y_2\cdots y_kt \quad (t \geqq 0)$$

を考えてみよ．

解答は 24 ページに記載．

1.3 Jacobsthal（ヤコブスタール）の証明

以下，$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ とする．

相加平均[3]を $A_n := \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

相乗平均[4]を $G_n := \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

と表す．この記号を使うと相加・相乗平均の不等式は次のように書かれる．

$$A_n \geqq G_n.$$

Jacobsthal の不等式

$$A_n - G_n \geqq \frac{n-1}{n}(A_{n-1}-G_{n-1}) \ (n \geqq 2)$$

等号成立は $G_n = G_{n-1}$ のときである．

◇ Jacobsthal $\Longrightarrow$ 相加・相乗

Jacobsthal の不等式から相加･相乗平均の不等式が次のように導かれる．Jacobsthal の不等式を繰り返し用いて

$$A_n-G_n \geqq \frac{n-1}{n}(A_{n-1}-G_{n-1}) \geqq \cdots \geqq \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{2}(A_1-G_1)$$

となるが，$A_1-G_1=x_1-x_1=0$ より，$A_n \geqq G_n$ が成り立つ．等号成立は $G_n = G_{n-1}=\cdots=G_1$，すなわち $(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}=(x_1\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=\cdots=(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}=x_1$ の

[3]算術平均（**A**rithmetic mean）とも呼ばれる．
[4]幾何平均（**G**eometric mean）とも呼ばれる．

ときであるが，これは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ と同値である． □

Jacobsthal の不等式から相加・相乗平均の不等式は導けるが，逆は成り立たない．つまり，相加・相乗平均の不等式と同値な条件ではない．Jacobsthal の不等式の方が，$A_n - G_n$ と $A_{n-1} - G_{n-1}$ の値がどのくらい離れているかを表している分多くの情報を含んでいるのである．

◇ Jacobsthal の不等式の証明

以下，3つのステップに分けて，Jacobsthal の不等式を証明する．

(1) $x \geqq 0$ に対して，不等式 $x^n \geqq nx - (n-1)$ が成り立つ[5]．等号成立は $x = 1$ のときである．

（証明） $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$ と因数分解できるので，

$$
\begin{aligned}
\text{（左辺）} - \text{（右辺）} &= x^n + n - 1 - nx \\
&= (x^n - 1) - n(x-1) \\
&= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - n(x-1) \\
&= (x-1)\{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x - (n-1)\} \\
&= (x-1)\{(x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \cdots + (x-1)\} \\
&= (x-1)^2\{(x^{n-2} + \cdots + 1) + (x^{n-3} + \cdots + 1) + \cdots + 1\} \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は $x = 1$ のときである． □

(2) $A_n = \dfrac{G_{n-1}}{n}\left\{(n-1)\dfrac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\dfrac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n\right\}$ $(n \geqq 2)$ が成り立つ．

（証明） A_n を式変形して，右辺に一致することを示す．

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_n}{n} \\
&= \frac{(n-1)A_{n-1} + x_n}{n} \\
&= \frac{G_{n-1}}{n}\left\{(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \frac{x_n}{G_{n-1}}\right\} \qquad \cdots①
\end{aligned}
$$

ところで，$(G_n)^n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ より，

$$
x_n = \frac{(G_n)^n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = \frac{(G_n)^n}{(G_{n-1})^{n-1}} \qquad \cdots②
$$

②を①に代入すれば，求める不等式を得る． □

[5] Bernoulli（ベルヌーイ）の不等式と呼ばれる．

(3) **（Jacobsthal の不等式の証明）**

(1) の不等式において，$x=\dfrac{G_n}{G_{n-1}}$ とすると

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n \geqq n\frac{G_n}{G_{n-1}}-(n-1) \qquad \cdots ①$$

となる．等号成立は $x=\dfrac{G_n}{G_{n-1}}=1$，すなわち $G_n=G_{n-1}$ のときである．すると (2) より，

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{G_{n-1}}{n}\left\{(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}+\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n\right\} \\ &\geqq \frac{G_{n-1}}{n}\left\{(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}+n\frac{G_n}{G_{n-1}}-(n-1)\right\} \qquad (①\text{より}) \\ &= \frac{n-1}{n}A_{n-1}+G_n-\frac{n-1}{n}G_{n-1} \end{aligned}$$

となる．よって，Jacobsthal の不等式

$$A_n-G_n \geqq \frac{n-1}{n}(A_{n-1}-G_{n-1})$$

を得る．等号成立は $G_n=G_{n-1}$ のときである． □

犬飼先生から微分法を用いた Jacobsthal の不等式の別証明を教えて頂いたので，25 ページに載せておく．元気な読者は一読してみよ．実に鮮やかな証明である．

1.4　凸性を用いた幾何学的別証

$x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$ と仮定する．

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

について，両辺対数をとると

$$\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \frac{1}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n).$$

（後で登場する凸関数との整合性のため,）両辺に -1 をかけて

$$-\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqq \frac{1}{n}(-\log x_1-\log x_2-\cdots-\log x_n).$$

この不等式を図を用いて理解しよう．

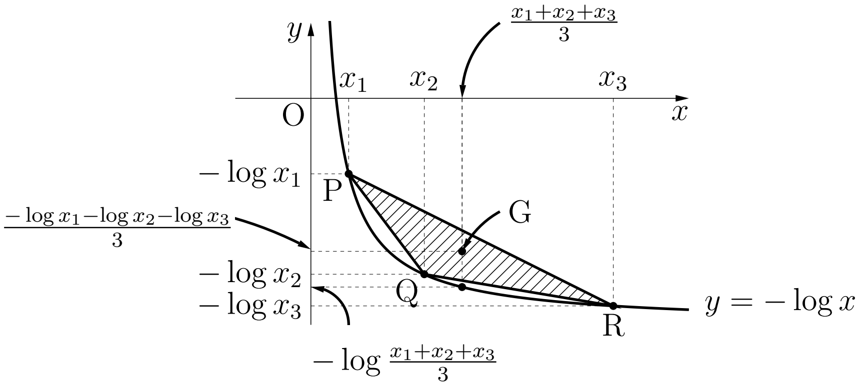
簡単のため $n=3$ の場合を考える．$0<x_1<x_2<x_3$ とし，$y=-\log x$ のグラフ上に 3 点

$$\mathrm{P}(x_1,-\log x_1), \quad \mathrm{Q}(x_2,-\log x_2), \quad \mathrm{R}(x_3,-\log x_3)$$

をとる．このとき，点

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{-\log x_1-\log x_2-\log x_3}{3}\right)$$

は 3 角形 PQR の重心である．



したがって，

$$-\log\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \leqq \frac{-\log x_1-\log x_2-\log x_3}{3}$$

が成り立つことは直観的に明らかである．

さらに直観を使おう．上の例では 3 角形の重心の場合を考えたが，「3 角形の重心」を「n 角形の内部の点」に置き換えても同様のことが成り立つはずである．n 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ から作られる n 角形の内部の点は，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ をみたす正の実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を使って

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n,\quad \lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n,)$$

と表すことができる．これを認めれば，次がいえる．

直観から一般化へ

$x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$，$\lambda_1>0, \lambda_2>0, \ldots, \lambda_n>0$ が $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ をみたすならば，

$$-\log(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n) \leqq -\lambda_1\log x_1-\lambda_2\log x_2-\cdots-\lambda_n\log x_n$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n \geqq x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$$

が成り立つ．等号成立は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときである．

（注意） $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$ とすると，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

となり，相加・相乗平均の不等式が得られる．よって上記の不等式は確かに相加・相乗平均の不等式の一般化になっている．

この直観を保証するものは何だろうか．先の例をとって考察してみると，$y=-\log x$ のグラフ上に 3 点をとって 3 角形を作った．その 3 角形とグラフとの関係はどのようになっていただろうか．図を見て分かる通り 3 角形はグラフより上側にある．なぜ上側にあるかといえば聞かれたらみなさんはどう答えるだろうか．おそ

らく「$y = -\log x$ のグラフが下に凸だから」と答えるのではないだろうか．ここに直観が潜んでいる．凸という言葉は日常的に使われる言葉なので，数学における凸の定義を知らなくても，それが凸だと頭が勝手に判断してしまうのである．

次章では関数が凸であるとはどういうことかを数学的にきちんと定義し，直観から得た一般化された相加・相乗平均の不等式を直観ではなく論理的に証明することを試みる．

2　凸関数

2.1　凸関数と Jensen（イェンゼン）の不等式

Jensen は Cauchy の仕事に触発され 1906 年に**凸関数**（*convex function*）を導入した．以下，I で区間（すなわち $[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$ のいずれか）を表し，

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

で I を定義域とする関数 $f(x)$ を表す[6]．なお，$I=(0,\infty)$ で区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ を表したりする．

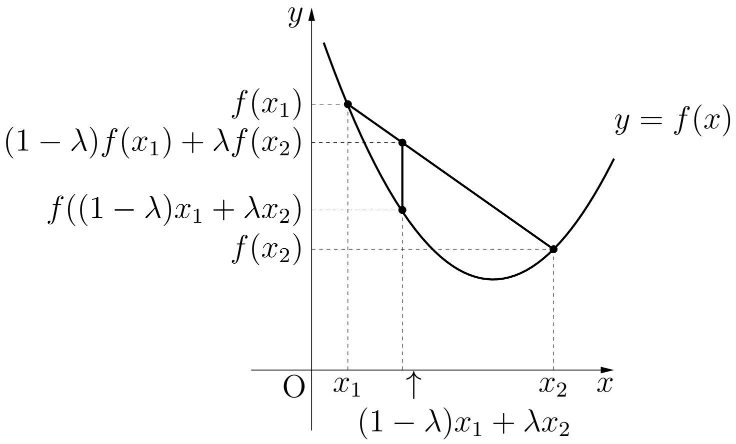
関数の凸性

関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が**凸**であるとは，すべての $x_1, x_2 \in I$ について

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

が成り立つこととする．

これは 2 点 $(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ を結んだ線分がグラフより上側にあることを意味する.（下図を参照）



Jensen の不等式

関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，次の 2 つは同値である．

(A) f が凸である．

(B) $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

が成り立つ[a]．

[a] 後述する狭義凸関数に対してのみ，等号成立条件 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ が成り立つ．

[6] 高校では関数を $f(x)$ と表すのが普通だが，大学で習う「集合と写像」の言葉を使えば $f : I \to \mathbb{R}$ と表すことができる．記号に慣れない人は「定義域を I とする関数 $f(x)$」と心の中で思えばよい．

以下，Jensen の不等式を証明する．まず，次が成り立つことを確認しておく[7]．

補題

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数に対して

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \in I$$

が成り立つ．

（証明） $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の中で最小のものを x_a，最大のものを x_b と書くと，

$$x_a = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x_a \leqq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \leqq (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x_b = x_b.$$

$x_a, x_b \in I$ より，$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in I$ が成り立つ． □

（Jensen の不等式の証明）

(B)⇒(A) の証明．(A) において $\lambda = 0$ または $\lambda = 1$ ならば不等式は自明である．よって，$\lambda \neq 0, 1$ としてよい．このとき，(B) において，$n = 2$，$\lambda_1 = 1 - \lambda$，$\lambda_2 = \lambda$ とすれば (A) を得る．

(A)⇒(B) の証明．

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

を n に関する数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のとき，（左辺）$= f(x_1)$，（右辺）$= f(x_1)$ より，(B) は成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき (B) が成り立つと仮定する．$n = k+1$ のとき，$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in I$，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_{k+1} > 0$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1$ をみたす実数について，$s = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ とおくと，$s > 0$ かつ $s + \lambda_{k+1} = 1$ が成り立つ．$\dfrac{\lambda_1}{s} + \cdots + \dfrac{\lambda_k}{s} = 1$ より，補題から，$\dfrac{\lambda_1}{s} x_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_k}{s} x_k \in I$ が成り立つ．ゆえに，

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \\
&= f\left(s\left(\frac{\lambda_1}{s} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{s} x_k\right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\
&\leqq sf\left(\frac{\lambda_1}{s} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{s} x_k\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \qquad \text{（凸の定義より）} \\
&\leqq s\left\{\frac{\lambda_1}{s} f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_k}{s} f(x_k)\right\} + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \qquad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})
\end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも (B) は成り立つ．

[7]補題は I が 1 次元の凸図形（26 ページ参照）であることを意味している．発展的な話になるが，I が凸図形ならば，多変数関数に対しても凸性を定義できるのである．

(i),(ii) より帰納法が完成した． □

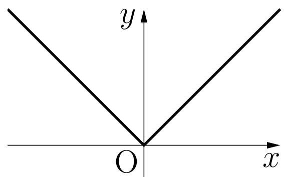
◇等号成立条件に関する注意

Jensen の不等式の主張の注釈に，「狭義凸関数に対してのみ，等号成立条件 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ が成り立つ」と書いた．狭義凸関数の定義は後で述べるとして，まずはこの等号成立条件が成り立たない例を挙げておく．

例 実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = |x|$$

を考える．任意の実数 x_1, x_2 と $\lambda \in [0,1]$ に対して，



$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| \leqq (1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2| \qquad \cdots ①$$

が成り立つので，$f(x)$ は凸である．Jensen の不等式は $n = 2$ の場合は①とまったく同じ不等式であることに注意しよう．ここで，$0 < x_1 < x_2$ をみたす実数 x_1, x_2 をとると，$x_1 \neq x_2$ であるが，

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = (1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2|$$

となり等号が成り立つ．よって，これは等号が成立するが $x_1 = x_2$ が成り立たない例になっている．

等号成立条件を成り立たせるためには，次の狭義凸関数の概念が必要である．

狭義凸関数

関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が狭義凸であるとは，相異なる $x_1, x_2 \in I$ について

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \ (0 < \lambda < 1)$$

が成り立つこととする．

関数 f が狭義凸であるとき，$x_1 = x_2$ ならば，ある $0 < \lambda < 1$ に対して（実際にはすべての $0 < \lambda < 1$ に対して）

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \qquad \cdots (*)$$

が成り立つ．逆に，$x_1, x_2 \in I$ に対して，ある $0 < \lambda < 1$ が存在して $(*)$ が成り立てば $x_1 = x_2$ でなければならない．よって，ある $0 < \lambda < 1$ に対して $(*)$ が成り立つことと $x_1 = x_2$ は同値である．

以上の議論より，f が狭義凸ならば Jensen の不等式の証明における等号成立条件は

$$\frac{\lambda_1}{s}x_1 + \frac{\lambda_2}{s}x_2 + \cdots + \frac{\lambda_k}{s}x_k = x_{k+1} \text{ かつ } x_1 = x_2 = \cdots = x_k$$

すなわち $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1}$ となる．

以上をまとめると

Jensen の不等式（狭義凸バージョン）

関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，次の 2 つは同値である．

(A’) f が狭義凸である．

(B’) $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときである．

◇これからの目標

ここまでの内容は入試問題としても取り上げられるような，高校生でも比較的理解しやすい内容である．ここからの目標は，$y = f(x)$ が凸関数であることを判定する便利な方法を見つけることである．凸関数の特徴づけはたくさんあるのだが，最も有用なのは次の 2 階微分を使うものである．使いやすい形で述べておこう．

2 回微分を用いた凸関数の判定法

関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について，I は開区間かつ f は I で 2 階微分可能であるとき，

$$f''(x) > 0 \quad (x \in I) \Longrightarrow f \text{ は狭義凸}$$

である．よって，このとき Jensen の不等式，すなわち $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときである．

「$f(x)$ の 2 階微分が正ならば，$y = f(x)$ のグラフは下に凸である．」という事実は，高校数学では当たり前のように使っていることであるが，このことをきちんと証明することが次節の目標である．

次節に進む前に，相加・相乗平均の不等式を上で述べた事実を用いて証明しておこう．Jensen の不等式の使い方が分かるはずである．

◇凸関数と Jensen の不等式を用いた相加・相乗平均の不等式の証明

$f(x) = -\log x$ とし，$I = (0, \infty)$ とする（I は開区間である）．このとき

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

より，f は狭義凸である．$x_1, \dots, x_n \in I$，$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ を $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数とする，と Jensen の不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} & -\log(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq -\lambda_1 \log x_1 - \cdots - \lambda_n \log x_n \\ \Longleftrightarrow \quad & \log(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geqq \log(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}) \end{aligned}$$

よって，次を得る．

一般化された相加・相乗平均の不等式

$x_1 > 0, \dots, x_n > 0$，$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数に対して

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \geqq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のときである．

特に，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，次を得る．

相加・相乗平均の不等式

$x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ をみたす実数に対して

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ．等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のときである．

ここまでの内容を整理しておこう．相加・相乗平均の不等式に幾何学的なアイデアを取り入れることにより，凸関数を導入し，凸関数と Jensen の不等式が同値であることを示た．さらに，2 階微分による判定法を紹介し，相加・相乗平均の不等式を凸関数と Jensen の不等式の同値性を用いて改めて証明した．ここまでででも，ある程度完結した話になっているので，ここまでで既に十分だ（もう限界！）という読者はここまでをしっかり読んでくれればよい．しかしながら，ここからが凸関数の理論の根幹をなす重要な部分である．凸関数と同値な条件として Jensen の不等式を紹介したが，他にも同値な条件が数多く存在し，その理論の奥深さ伺える．ここが数学の面白いところである．また入試にも出題されることもある内容を含むので，続きもぜひ読んで欲しい．

2.2　凸関数の特徴付け

前節に引き続き $I \subset \mathbb{R}$ は区間を表す．以下，凸関数に関するいろいろな特徴づけを紹介していく．

凸関数の特徴付け（その１）

関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して，次は同値である．

(A) f が凸である．

(C) すべての $x_1, x_2, x_3 \in I \quad (x_1 < x_2 < x_3)$ に対して

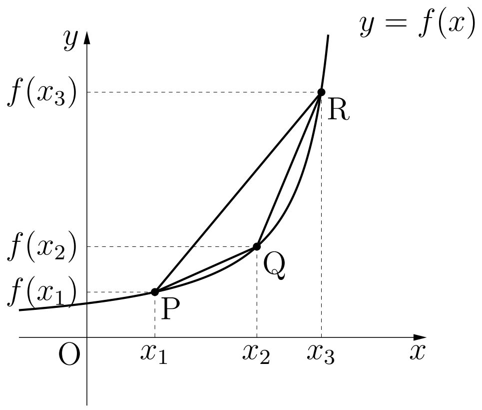
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が成り立つ．

条件 (C) は下図において，

$$(\text{PQ の傾き}) \leqq (\text{PR の傾き}) \leqq (\text{QR の傾き})$$

を意味している．



証明のために，条件 (C) に関する同値条件を述べておく．条件 (C) は連立不等式だが，3 つの辺のうちどれか 2 つをとってできる不等式と同値である．

条件 (C) の同値条件

$x_1 < x_2 < x_3$ のとき，次は同値である．

(1) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

(2) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$

(3) $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

(4) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

（証明） 一般に $a_1 > 0, a_2 > 0$ のとき，

$$\frac{b_1}{a_1} \leqq \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} \Longleftrightarrow \frac{b_1}{a_1} \leqq \frac{b_2}{a_2} \Longleftrightarrow \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} \leqq \frac{b_2}{a_2}.$$

が成り立つ．ここで，$a_1 = x_2 - x_1, a_2 = x_3 - x_2, b_1 = f(x_2) - f(x_1), b_2 = f(x_3) - f(x_2)$ とすれば (2)⇔(4)⇔(3) が言えて，さらに「(2) かつ (3)」⇔(1) なので (1)〜(4) の同値性が示された． □

凸関数の特徴付け（その１）の証明に戻る．

（証明） (A)⇒(C) の証明．(A) が成り立つと仮定する．$x_1, x_2, x_3 \in I$ が $x_1 < x_2 < x_3$ をみたすとき

$$x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3 \quad (0 < \lambda < 1)$$

とおける．条件 (C) の同値条件より，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$ を示せばよい．

$$x_2 - x_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3 - x_1 = \lambda(x_3 - x_1)$$

より，

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= \frac{f((1-\lambda)x_1+\lambda x_3) - f(x_1)}{\lambda(x_3-x_1)} \\
&\leqq \frac{(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_3) - f(x_1)}{\lambda(x_3-x_1)} \qquad \text{（凸の定義）} \\
&= \frac{\lambda(f(x_3)-f(x_1))}{\lambda(x_3-x_1)} \\
&= \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.
\end{aligned}$$

よって，示せた．

(C)⇒(A) の証明．(C) が成り立つと仮定し，すべての $x_1, x_3 \in I$ に対して，

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leqq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1) \qquad \cdots ①$$

が成り立つことを示す．$x_1 = x_3$ のときは，左辺と右辺が等しくなり①は成り立つ．よって，$x_1 < x_3$ と仮定してよい．

$$x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3 \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

とおくと，$\lambda = 0, 1$ のときは左辺と右辺は等しいので①は成り立つ．よって，$0 < \lambda < 1$ としてよい．すると，$x_1 < x_2 < x_3$ となるので (C) より，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

が成り立つ．$x_2 - x_1 = \lambda(x_3 - x_1)$，$x_3 - x_2 = (1-\lambda)(x_3 - x_1)$ より，

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \\
\Longleftrightarrow\ &(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_1)) \leqq \lambda(f(x_3)-f(x_2)) \\
\Longleftrightarrow\ &f(x_2) \leqq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) \\
\Longleftrightarrow\ &f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_3) \leqq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)
\end{aligned}$$

したがって，①は成り立つ．よって，(A) が成り立つ． □

（補足） 行列式を用いると

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \geqq 0$$

と簡潔に表せる．

凸関数の特徴付け（その２）

I を開区間とする．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して，次は同値である．

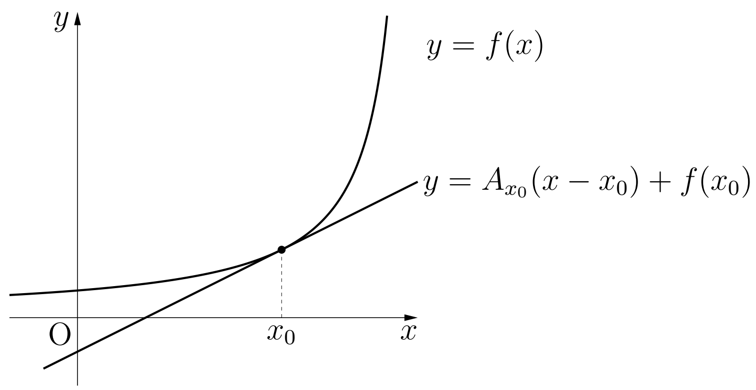
(A) f が凸である．

(D) すべての $x_0 \in I$ に対して，ある実数 A_{x_0} が存在して

$$f(x) \geqq A_{x_0}(x-x_0)+f(x_0) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

条件 (D) は $y=f(x)$ のグラフが直線 $y=A_{x_0}(x-x_0)+f(x_0)$ よりも上側にあることを意味している．



（証明） (A)⇔(C) であるので，(C)⇔(D) を示せばよい．

(C)⇒(D) の証明．$x_0 \in I$ とする．I は開区間なので $x_1 < x_0 < x_2$ をみたす $x_1, x_2 \in I$ をとることができて，(C) より

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

が成り立つ．$x_2 \to x_0+0$ のとき，すなわち x_2 を右側から x_0 に近づけるとき，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ は下に有界であり，(C) より単調に減少する．一般に，下に有界で単

調減少する関数は $x \to x_0+0$ で極限値を持つ[8]．この事実より，f の x_0 における右側微分係数 $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ が存在し

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqq f'_+(x_0)$$

が成り立つ．同様に $x_1 \to x_0-0$ とすれば，左側微分係数 $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ が存在し，

$$f'_-(x_0) \leqq f'_+(x_0)$$

が成り立つ．よって，$f'_-(x_0) \leqq A_{x_0} \leqq f'_+(x_0)$ をみたす実数 A_{x_0} を一つ適当に選べば，$x_0 < x$ のとき

$$A_{x_0} \leqq f'_+(x_0) \leqq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \iff f(x) \geqq A_{x_0}(x-x_0)+f(x_0)$$

が成り立ち，$x < x_0$ のとき

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqq f'_-(x_0) \leqq A_{x_0} \iff f(x) \geqq A_{x_0}(x-x_0)+f(x_0)$$

が成り立つ．また，$x = x_0$ のときは $f(x) \geqq A_{x_0}(x-x_0)+f(x_0)$ が成り立つことは自明であるので，(D) が示せた．

(D)⇒(C) の証明．$x_1 < x_0 < x_2$ をみたす $x_1, x_2 \in I$ をとると，(D) より

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leqq A_{x_0} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

となるので，(C) が成り立つ．(「条件 (C) の同値条件」を参照せよ.) □

少し脱線するが，実は I が開区間ならば凸関数は連続であることが示せる．

系（凸関数の連続性）

I が開区間のとき，凸関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は連続である．

（解答）$x_0 \in I$ とする．f は $x_0 \in I$ において右側微分係数を持つので，

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0+0} \{f(x)-f(x_0)\} = \lim_{x \to x_0+0} (x-x_0) \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \cdot f'_+(x_0) = 0.$$

よって，$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つ．同様に，$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ が成り立つので，$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ となり f が x_0 で連続であることが示せた． □

[8] この事実は高校生の読者にとっては見慣れないことだと思うので，ここでは認めることにしよう．大学（の数学科）で実数とは何かを学ぶと，理解できるようになる．

凸関数の特徴付け（その３）

I を開区間とする．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が微分可能ならば，次は同値である．

(A) f が凸である．

($\widetilde{\mathrm{D}}$) すべての $x_0 \in I$ に対して，

$$f(x) \geqq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

（証明） f が凸かつ $x_0 \in I$ で微分可能とする．このとき，$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ であるので，

$$f'_-(x_0) \leqq A_{x_0} \leqq f'_+(x_0)$$

から，$A_{x_0} = f'(x_0)$ となる．よって (D) と ($\widetilde{\mathrm{D}}$) は同値である． □

（注意） 一般に凸関数は微分不可能な点を持つが，微分不可能でも A_{x_0} は定まることに注意せよ．

凸関数の特徴付け（その４）

I を開区間とする．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が 2 階微分可能ならば，次は同値である．

(A) f が凸である．

(E) すべての $x \in I$ に対して

$$f''(x) \geqq 0$$

が成り立つ．

（証明） (A)⇔(C)⇔($\widetilde{\mathrm{D}}$) であるので，($\widetilde{\mathrm{D}}$)⇒(E) と (E)⇒(C) を示す．

($\widetilde{\mathrm{D}}$)⇒(E) の証明．($\widetilde{\mathrm{D}}$) より，$x_1, x_2 \in I$ が $x_1 < x_2$ をみたすとき，

$$f(x_2) \geqq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \quad \text{かつ} \quad f(x_1) \geqq f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2)$$

が成り立つ．これは

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqq f'(x_1) \quad \text{かつ} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqq f'(x_2)$$

と同値であるので，$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$ が成り立つ．ゆえに，$f'(x)$ は I において単調に増加する．

このとき，すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \geqq 0$ が成り立つことを示す．$h > 0$ を $x + h \in I$ となるようにとると $f'(x+h) \geqq f'(x)$ が成り立つ．また，$h < 0$ を $x + h \in I$ となるようにとると $f'(x+h) \leqq f'(x)$ が成り立つ．$h \neq 0$ で両辺を割る

と，いずれの場合も $\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \geqq 0$ を得る．f は 2 階微分可能なので $h \to 0$ として $f''(x) \geqq 0$ を得る．よって，(E) が示せた．

(E)⇒(C) の証明．$x_1 < x_2 < x_3$ をみたす $x_1, x_2, x_3 \in I$ をとる．f は I で微分可能なので，平均値の定理より，$x_1 < a < x_2 < b < x_3$ をみたすある $a, b \in I$ が存在して

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(a) \quad \text{かつ} \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(b)$$

が成り立つ．$f'(x)$ は I において微分可能なので，平均値の定理より，$a < c < b$ をみたすある $c \in I$ が存在して

$$f'(b) - f'(a) = f''(c)(b-a)$$

となる．$b-a > 0$ と (E) より $f''(c) \geqq 0$ であることから，$f'(a) \leqq f'(b)$ を得る．よって

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

となり，(C) が示せた．(「条件 C の同値条件」を参照せよ.) □

（注意） 不等式を考える際には，最大値・最小値の観点から等号成立条件が重要である．ところが前節で述べたように，狭義凸関数に対してのみ等号成立条件は成り立つ．

次の主張が目標としていたものである．

狭義凸関数の判定条件

I を開区間とし，関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が 2 階微分可能であるとする．このとき

$$f''(x) > 0 \;\; (x \in I) \quad \text{ならば} \quad f \text{ は狭義凸}$$

が成り立つ．

（証明） 条件 (A’), (C’), (E’) を次で定める．

(A’) f が狭義凸である．

(C’) $x_1, x_2, x_3 \in I$ $(x_1 < x_2 < x_3)$ に対して $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

(E’) $x \in I$ に対して $f''(x) > 0$

(C)⇒(A) の証明において $\leqq$ を $<$ に置き換えれば，(C’)⇒(A’) が得られる．また，(E)⇒(C) の証明において $\leqq$ を $<$ に置き換えれば，(E’)⇒(C’) が得られる．よって，(E’)⇒(A’) が成り立つ． □

最後に，平面図形の凸性と関数の凸性に関することを述べておく．平面図形 K が凸であるとは，K に含まれる 2 点 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ をとったとき，その 2 点を結ぶ線分

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \{(1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} \mid \lambda \in [0,1]\}$$

が K にすっぽりと含まれているときをいう．(付録参照)

凸関数と凸図形の関係は次のように述べられる．

凸関数の特徴付け（その５）

関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して，

$$G_f = \{(x,y) \mid f(x) \leqq y,\ x \in I\}$$

とおくとき，次は同値である．

(A) f が凸である.（関数として）

(F) G_f が凸である.（図形として）

（証明） (A)⇒(F) の証明．G_f から 2 点 $\overrightarrow{a} = (x_a, y_a), \overrightarrow{b} = (x_b, y_b)$ を選ぶ．このとき，G_f の定義から

$$y_a \geqq f(x_a), y_b \geqq f(x_b) \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．以下，$\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$(1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} = ((1-\lambda)x_a + \lambda x_b,\ (1-\lambda)y_a + \lambda y_b) \in G_f$$

を示す．$x_a, x_b \in I$ より

$$(1-\lambda)x_a + \lambda x_b \in I.$$

また，①および f は凸があることから，

$$\begin{aligned}(1-\lambda)y_a + \lambda y_b &\geqq (1-\lambda)f(x_a) + \lambda f(x_b)\\ &\geqq f((1-\lambda)x_a + \lambda x_b).\end{aligned}$$

よって，$(1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} \in G_f$ となる．よって，$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] \subset G_f$ となるので，(F) が示せた．

(F)⇒(A) の証明. $a, b \in I$ とすると，G_f の定義から $\overrightarrow{a} = (a, f(a)), \overrightarrow{b} = (b, f(b)) \in G_f$ である．G_f は凸であるので，$\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$(1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} = ((1-\lambda)a + \lambda b,\ (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)) \in G_f$$

となる．すなわち，

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

となるので，(A) が示せた． □

凸関数の特徴づけ（まとめ）

関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，次は同値である．(ただし，(D),(D'),(E) は I を開区間，(D') は f が微分可能，(E) は 2 回微分可能と仮定する)

(A) f が凸である．

(B) (Jensen の不等式) $x_1, \ldots, x_n \in I$，$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたす実数に対して

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

が成り立つ．

(C1) $x_1, x_2, x_3 \in I$ が $x_1 < x_2 < x_3$ をみたすとき（(C2)〜(C4) も同様），

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が成り立つ．

(C2) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$ が成り立つ．

(C3) $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ が成り立つ．

(C4) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ が成り立つ．

(D) すべての $x_0 \in I$ に対して，ある実数 A_{x_0} が存在して

$$f(x) \geqq A_{x_0}(x - x_0) + f(x_0) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

($\widetilde{\mathrm{D}}$) すべての $x_0 \in I$ に対して，

$$f(x) \geqq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

(E) すべての $x \in I$ に対して

$$f''(x) \geqq 0$$

が成り立つ．

(F) $G_f = \{(x, y) \mid f(x) \leqq y,\ x \in I\}$ が凸である．(図形として)

（補足） I を開区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を関数とするとき，$f''(x) > 0$ ならば f は狭義凸である．このとき，等号成立条件 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ が成り立つ．

3　付録

3.1　6 ページの練習問題の解答

練習問題 相加・相乗平均の不等式

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqq (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad (n \geqq 2)$$

（等号成立は $x_1=\cdots=x_n$ のとき）を数学的帰納法に微分法を組み込んで証明せよ.

(i) $n=2$ のときは既に示した.

(ii) $n=k$ のとき，相加・相乗平均の不等式が成り立つと仮定する.

$n=k+1$ のとき，$x_1 \geqq 0, \ldots, x_{k+1} \geqq 0$ に対して，$y_j^{k+1}=x_j$ をみたす 0 以上の実数 y_j をとる．このとき，

$$f(t)=y_1^{k+1}+\cdots+y_k^{k+1}+t^{k+1}-(k+1)y_1\cdots y_k t \quad (t \geqq 0)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f'(t) &= (k+1)t^k-(k+1)y_1\cdots y_k \\ &= (k+1)\left(t^k-y_1\cdots y_k\right) \end{aligned}$$

増減表を書くと，

t	0	$\cdots$	$(y_1\cdots y_k)^{\frac{1}{k}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

最小値は

$$\begin{aligned} f((y_1\cdots y_k)^{\frac{1}{k}}) &= y_1^{k+1}+\cdots+y_k^{k+1}+(y_1\cdots y_k)^{\frac{k+1}{k}}-(k+1)(y_1\cdots y_k)(y_1\cdots y_k)^{\frac{1}{k}} \\ &= y_1^{k+1}+\cdots+y_k^{k+1}-k(y_1\cdots y_k)^{\frac{k+1}{k}} \\ &= x_1+\cdots+x_k-k(x_1\cdots x_k)^{\frac{1}{k}} \\ &\geqq 0 \quad \text{（帰納法の仮定より）} \end{aligned}$$

よって，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq 0$ が成り立つ．特に，$t=y_{k+1}$ とすれば，

$$\begin{aligned} f(y_{k+1}) &= y_1^{k+1}+\cdots+y_k^{k+1}+y_{k+1}^{k+1}-(k+1)y_1\cdots y_k y_{k+1} \\ &= x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}-(k+1)(x_1\cdots x_k x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

等号成立は $y_{k+1}=(y_1\cdots y_k)^{\frac{1}{k}}$ かつ $f((y_1\cdots y_k)^{\frac{1}{k}})=0$ のとき，すなわち $x_1=\cdots=x_k=x_{k+1}$ のときである．よって，$n=k+1$ のときも相加・相乗平均の不等式は成り立つ.

(i), (ii) より，すべての 2 以上の自然数 n について，相加・相乗平均の不等式が成り立つ. □

3.2 微分法を用いた Jacobsthal の不等式の証明

犬飼先生から教わった Jacobsthal の不等式の別証明を紹介する．

Jacobsthal の不等式

$$A_{n+1} - G_{n+1} \geqq \frac{n}{n+1}(A_n - G_n) \quad (n \geqq 1)$$

等号成立は $G_n = G_{n-1}$ のときである．

（証明） n を自然数とする．$x_1 \geqq 0, \ldots, x_{n+1} \geqq 0$ に対し，$y_j^{n+1} = x_j$ となる $y_j \geqq 0$ をとる．

$$f(t) = \frac{y_1^{n+1} + \cdots + y_n^{n+1} + t^{n+1}}{n+1} - (y_1 \cdots y_n t) \quad (t \geqq 0)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f(y_{n+1}) &= \frac{y_1^{n+1} + \cdots + y_n^{n+1} + y_{n+1}^{n+1}}{n+1} - (y_1 \cdots y_n y_{n+1}) \\ &= \frac{x_1 + \cdots x_n + x_{n+1}}{n+1} - (x_1 \cdots x_n x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \\ &= A_{n+1} - G_{n+1} \end{aligned}$$

となる．

$$f'(t) = t^n - (y_1 \cdots y_n)$$

より，増減表は

t	0	$\cdots$	$(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

となるので，$f(t)$ は $t \geqq 0$ において $t = (y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}}$ で最小値をとる．よって，

$$\begin{aligned} A_{n+1} - G_{n+1} &= f(y_{n+1}) \\ &\geqq f((y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}}) \\ &= \frac{y_1^{n+1} + \cdots + y_n^{n+1} + (y_1 \cdots y_n)^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} - (y_1 \cdots y_n)(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{n}{n+1}\left\{\frac{y_1^{n+1} + \cdots + y_n^{n+1}}{n} - (y_1 \cdots y_n)^{\frac{n+1}{n}}\right\} \\ &= \frac{n}{n+1}\left\{\frac{x_1 + \cdots x_n}{n} - (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\right\} \\ &= \frac{n}{n+1}(A_n - G_n) \end{aligned}$$

以上より，$A_{n+1} - G_{n+1} \geqq \dfrac{n}{n+1}(A_n - G_n)$ が示せた．等号成立は $y_{n+1} = (y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}}$，すなわち $x_{n+1} = x_1 \cdots x_n$ である．これは $G_{n+1} = G_n$ と同値である．　□

3.3　凸図形

次章に進むまえに，平面図形に対し凸性を導入しておく．$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ を xy-平面とする．以下，平面上の点 P とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を同一視する．２つのベクトル $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ を結ぶ線分を $[\,\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\,]$ と表すことにする．すなわち，

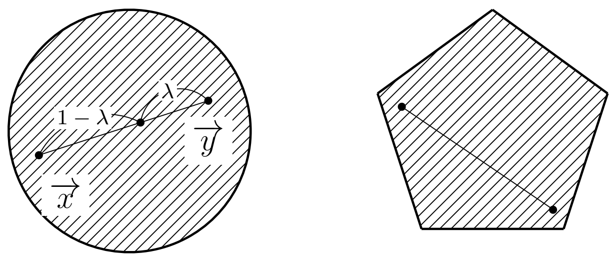
$$[\,\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\,] = \{(1-\lambda)\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

図形の凸性

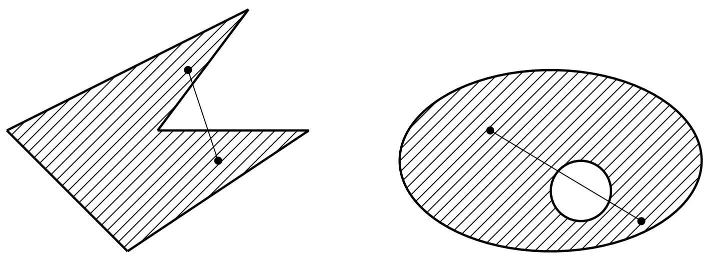
平面上の図形 $K \subset \mathbb{R}^2$ が凸とは，K に含まれる 2 つのベクトル $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ をとったとき，$[\,\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\,] \subset K$ となることと定義する．

つまり，K に含まれる 2 点をとったとき，その 2 点を結ぶ線分がすっぽりと K に含まれているとき，K は凸であるというのである．

凸図形の例



凸でない図形の例　（凹んでいるものや穴が空いているもの）



問題

図形 $K \subset \mathbb{R}^2$ が凸であるとする．$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ が K に含まれるベクトルであり，$\lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0, \ldots, \lambda_n \geqq 0$ が $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ をみたすならば $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$ もまた K に含まれる．

（解答） n に関する数学的帰納法により証明する．

(i) $n = 1$ のとき，$\lambda_1 = 1$ より，$\lambda_1\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_1}$ は K に含まれる．

(ii) $n=k$ のとき，主張が成り立つと仮定する．$n=k+1$ のとき，$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_{k+1}}$ を K に含まれるベクトルとし，$\lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0, \dots, \lambda_{k+1} \geqq 0$ が $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1}=1$ をみたすとする．$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ のすべてが 0 ならば，明らかに主張は成り立つので，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ のうち少なくとも 1 つは 0 でないとしてよい．$s=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k(>0)$ とおくと，

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\cdots+\lambda_k\overrightarrow{a_k}+\lambda_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}}=s\left(\frac{\lambda_1}{s}\overrightarrow{a_1}+\cdots+\frac{\lambda_k}{s}\overrightarrow{a_k}\right)+\lambda_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} \quad \cdots ①$$

となる．ここで，$\dfrac{\lambda_1}{s} \geqq 0, \dots, \dfrac{\lambda_k}{s} \geqq 0$ は $\dfrac{\lambda_1}{s}+\cdots+\dfrac{\lambda_k}{s}=1$ をみたすので，帰納法の仮定より，$\dfrac{\lambda_1}{s}\overrightarrow{a_1}+\cdots+\dfrac{\lambda_k}{s}\overrightarrow{a_k}$ は K に含まれる．$s>0, \lambda_{k+1} \geqq 0$ は $s+\lambda_{k+1}=1$ をみたすので，凸の定義から①は K に含まれる．よって，$n=k+1$ のときも主張は成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n について主張は成り立つ． □

3.4 いろいろな例

講義では桑野先生によって，凸関数についての重要な性質がいくつか紹介された．ここでは，2 階微分を使った凸関数の判定条件と Jensen の不等式を用いて，いろいろな有名不等式が導かれることを見よう．この付録を書くにあたって，ノートを提供してくれた犬飼先生に感謝します．

例 1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする．$x \in I=(0,\infty)$ に対して

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}, \quad f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$$

より，$f(x)$ は I において狭義凸である．$\alpha,\beta \in I,\ p>0,\ q>0\ (p+q=1)$ として $f(p\alpha+q\beta) \leqq pf(\alpha)+qf(\beta)$．よって，

$$\frac{1}{p\alpha+q\beta} \leqq \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}$$

を得る．等号成立は $\alpha=\beta$ のときである．

例 2. $f(x)=x^p\ (p>1),\ I=(0,\infty)$ とする．

$$f'(x)=px^{p-1}, \quad f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$$

より，$f(x)$ は I で狭義凸である．

$x_1,\dots,x_n \in I,\ \lambda_1>0,\dots,\lambda_n>0, \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$ をみたす $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ に対して，Jensen の不等式より

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n) \leqq \lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$$
$$(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)^p \leqq \lambda_1x_1^p+\cdots+\lambda_nx_n^p \quad \cdots ①$$

等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のときである．ここで，

$$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0, b_1 > 0, \ldots, b_n > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

となる $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n, q$ をとり，

$$b_1^q + \cdots + b_n^q = B, \lambda_i = \frac{b_i^q}{B}, x_i = \left(\frac{a_i^p}{b_i^q}\right)^{\frac{1}{p}}$$

とすれば，①は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b_1^q}{B} \cdot \left(\frac{a_1^p}{b_1^q}\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \frac{b_n^q}{B} \cdot \left(\frac{a_n^p}{b_n^q}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p &\leqq \frac{b_1^q}{B} \cdot \frac{a_1^p}{b_1^q} + \cdots + \frac{b_n^q}{B} \cdot \frac{a_n^p}{b_n^q} \\
\frac{1}{B^p}(a_1 b_1^{q(1-\frac{1}{p})} + \cdots + a_n b_n^{q(1-\frac{1}{p})})^p &\leqq \frac{1}{B}(a_1^p + \cdots + a_n^p) \\
(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^p &\leqq B^{p-1}(a_1^p + \cdots + a_n^p) \\
a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &\leqq B^{1-\frac{1}{p}}(a_1^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \\
a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &\leqq (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

より次を得る．

Hölder（ヘルダー）の不等式

$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0, b_1 > 0, \ldots, b_n > 0$ と $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ となる $p > 1, q > 1$ に対して

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leqq (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．等号成立は $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \cdots = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$ のときである．

特に，$p = q = 2$ としてみると，次を得る．

Cauchy-Schwarz（コーシー・シュワルツ）の不等式

$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0, b_1 > 0, \ldots, b_n > 0$ に対して[a]

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

が成り立つ．等号成立は $\dfrac{a_1}{b_1} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ のときである．

[a]実際には，a_i, b_i が負や 0 の実数であっても成り立つ．

Hölder の不等式から次の Minkowski の不等式が導かれることが知られている．

Minkowski（ミンコフスキー）の不等式

$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0, b_1 > 0, \ldots, b_n > 0, r > 1$ に対して

$$\{(a_1 + b_1)^r + \cdots + (a_n + b_n)^r\}^{\frac{1}{r}} \leqq (a_1^r + \cdots + a_n^r)^{\frac{1}{r}} + \cdots + (b_1^r + \cdots + b_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

が成り立つ．等号成立は $\dfrac{b_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{b_n}{a_n}$ のときである．

例 3. Minkowski の不等式を，凸関数を使って導くこともできなくはないが，ここでは Minkowski の不等式の違う方向への一般化である，第 2 の Minkowski の不等式を紹介する．

$f(x) = (1+x^r)^{\frac{1}{r}}$ $(r>1)$ とし，$I=(0,\infty)$ とする．

$$f'(x) = \frac{1}{r}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-1}\cdot rx^{r-1} = x^{r-1}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-1}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (r-1)x^{r-2}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-1} + x^{r-1}\left(\frac{1}{r}-1\right)(1+x^r)^{\frac{1}{r}-2}\cdot rx^{r-1} \\ &= (r-1)x^{r-2}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-1} + (1-r)x^{2r-2}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-2} \\ &= (r-1)x^{r-2}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-1}\left\{1-\frac{x^r}{1+x^r}\right\} \\ &= (r-1)x^{r-2}(1+x^r)^{\frac{1}{r}-2} > 0 \end{aligned}$$

より，f は狭義凸である．$x_1,\ldots,x_n\in I$，$\lambda_1>0,\ldots,\lambda_n>0, \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$ をみたす $x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ に対して

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n) \leqq \lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$

$$(1+(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)^r)^{\frac{1}{r}} \leqq \lambda_1(1+x_1^r)^{\frac{1}{r}}+\cdots+\lambda_n(1+x_n^r)^{\frac{1}{r}} \quad \cdots ①$$

等号成立は $x_1=\cdots=x_n$ のときである．

ここで，$a_1>0,\ldots,a_n>0$, $b_1>0,\ldots,b_n>0$ に対して，

$$a_1+\cdots+a_n=A, x_1=\frac{b_1}{a_1},\ldots,x_n=\frac{b_n}{a_n},\lambda_1=\frac{a_1}{A},\ldots,\lambda_n=\frac{a_n}{A}$$

とすると①は次のように書き直せる．

$$\left\{1+\left(\frac{b_1+\cdots+b_n}{A}\right)^r\right\}^{\frac{1}{r}} \leqq \frac{a_1}{A}\left\{1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^r\right\}^{\frac{1}{r}}+\cdots+\frac{a_n}{A}\left\{1+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^r\right\}^{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{A}\{A^r+(b_1+\cdots+b_n)^r\}^{\frac{1}{r}} \leqq \frac{1}{A}\{(a_1^r+b_1^r)^{\frac{1}{r}}+\cdots+(a_n^r+b_n^r)^{\frac{1}{r}}\}$$

$$\{(a_1+\cdots+a_n)^r+(b_1+\cdots+b_n)^r\}^{\frac{1}{r}} \leqq (a_1^r+b_1^r)^{\frac{1}{r}}+\cdots+(a_n^r+b_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

第 2 の Minkowski（ミンコフスキー）の不等式

$a_1>0,\ldots,a_n>0, b_1>0,\ldots,b_n>0, r>1$ に対して

$$\{(a_1+\cdots+a_n)^r+(b_1+\cdots+b_n)^r\}^{\frac{1}{r}} \leqq (a_1^r+b_1^r)^{\frac{1}{r}}+\cdots+(a_n^r+b_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

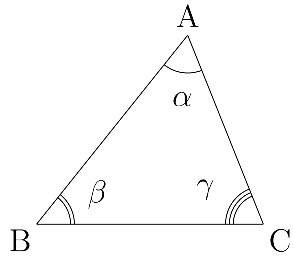
が成り立つ．等号成立は $\dfrac{b_1}{a_1}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$ のときである．

（補足） $n=2$ のときは，Minkowski の不等式と第 2 の Minkowski の不等式は一致していることに注意しよう．また，第 2 の Minkowski の不等式で $r=2$ としたものは，三角不等式の一般化になっている．

例 4. 3 角形の内角をそれぞれ α, β, γ とすると，

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

が成立する．等号成立は $\alpha = \beta = \gamma$ のときである．



$\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0, \sin\gamma > 0$ に相加・相乗平均の不等式を用いると

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \geqq (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^{\frac{1}{3}} \quad \cdots ①$$

等号成立は $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$ のときである．一方，$f(x) = -\sin x$ とおくと，$I = (0, \pi)$ において $f''(x) = \sin x > 0$ より，f は凸である．Jensen の不等式より

$$f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \leqq \frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{1}{3}f(\beta) + \frac{1}{3}f(\gamma)$$

$$\therefore -\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \leqq -\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}$$

$$\therefore \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geqq \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \quad \cdots ②$$

等号成立は $\alpha = \beta = \gamma$ のときである．①,②より

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqq \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3 \leqq \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ が成り立つのは，$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$ かつ $\alpha = \beta = \gamma$，すなわち $\alpha = \beta = \gamma \left(= \dfrac{\pi}{3}\right)$ のときである．

3.5 関連する入試問題など (吉本　響)

1. 実数 $a>0$ に対して, $f(a)=\dfrac{1}{a}$ と表す.

(1) $0<a<b$ のとき, 次の不等式を証明せよ.
$$\frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(2) $0<a<b,\ 0<w<1$ のとき, 次の不等式を証明せよ.
$$wf(a)+(1-w)f(b)>f(wa+(1-w)b)$$

(3) $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$ のとき, $n\geqq 2$ に対して次の不等式が成り立つ.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)>f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$
このことを数学的帰納法で証明せよ.

('07　青山学院大, 経済)

解答

(2)
$$\begin{aligned}
\text{左辺}-\text{右辺}&=w\cdot\frac{1}{a}+(1-w)\cdot\frac{1}{b}-\frac{1}{wa+(1-w)b}\\
&=\frac{wb+(1-w)a}{ab}-\frac{1}{wa+(1-w)b}\\
&=\frac{\{(1-w)a+wb\}\{wa+(1-w)b\}-ab}{ab\{wa+(1-w)b\}}\\
&=\frac{w(1-w)a^2+\{(1-w)^2+w^2-1\}ab+w(1-w)b^2}{ab\{wa+(1-w)b\}}\\
&=\frac{w(1-w)(a-b)^2}{ab\{wa+(1-w)b\}}\\
&>0.
\end{aligned}$$

(1) (2) の不等式において $w=\dfrac{1}{2}$ とすればよい.

(3) (i) $n=2$ のとき, (1) より成り立つ.
(ii) $n=k(\geqq 2)$ のとき成り立つと仮定すると,
$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)&=f\left(\frac{k}{k+1}\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)\\
&<\frac{k}{k+1}f\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)+\frac{1}{k+1}f(a_{k+1})\ \left(\because (2)\text{ で } w=\frac{k}{k+1}\text{ とする}\right)\\
&<\frac{k}{k+1}\frac{1}{k}\left\{f(a_1)+\cdots+f(a_k)\right\}+\frac{1}{k+1}f(a_{k+1})\ (\because \text{帰納法の仮定})\\
&=\frac{1}{k+1}\left\{f(a_1)+\cdots+f(a_{k+1})\right\}
\end{aligned}$$
となり, $n=k+1$ のときも成り立つ.
(i), (ii) より任意の自然数 n に対して与式は成り立つ.

注

(2) は, $f(x)$ の凸性を証明したことになっている. 27 ページの例 1 では $f(x)$ が狭義凸であることから導いたが, ここでは直接示している. (3) は Jensen の不等式 (狭義凸バージョン) の特別な場合で, 12 ページの証明と同じことをやっている.

2. 関数 $f(x)$ がつねに $f''(x) > 0$ をみたしているものとする. また, n 個の正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の相加平均を A とする.

(1) p を定数とするとき, すべての x に対して, $f(x) \geqq f(p) + f'(p)(x-p)$ を示せ.

(2) $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geqq f(A)$ を示せ.

(3) (2) でとくに $f(x) = e^x$ とすることによって, $A \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$ を示せ.

('95 京都教育大)

解答

(1) $g(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)$ とおくと,
$g'(x) = f'(x) - f'(p)$,
$g''(x) = f''(x) > 0$ より $g'(x)$ は単調増加でかつ $g'(p) = 0$ ゆえ,

x		p	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

となり, $g(x) \geqq 0$.

$\therefore f(x) \geqq f(p) + f'(p)(x-p)$ (等号成立は, $x = p$ のとき)

(2) (1) より,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{f(p) + f'(p)(a_k - p)\}$$
$$= \frac{1}{n}\{(nf(p) - npf'(p)) + f'(p)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\}$$
$$= f(p) - pf'(p) + f'(p)A$$
$$= f(p) + f'(p)(A-p).$$

$p = A$ として, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geqq f(A)$.

(3) $(e^x)'' = e^x > 0$ ゆえ, (2) で $f(x) = e^x$ とおくと,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{a_k} \geqq e^A = e^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}} = e^{\frac{a_1}{n}}e^{\frac{a_2}{n}}\cdots e^{\frac{a_n}{n}} = \sqrt[n]{e^{a_1}e^{a_2}\cdots e^{a_n}}.$$

改めて e^{a_j} を a_j とおくと, $\dfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

注

$f(x)$ が 2 階微分可能のとき, 14〜21 ページの記号でいうと, (1) は (E')$\Rightarrow$($\widetilde{\mathrm{D}}$) を直接示し, (2) は ($\widetilde{\mathrm{D}}$) から (B') の特別な場合 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ の場合) を示したことになっている．さらに, このことから相加・相乗平均の不等式が示されたわけである.

3. (1) $a,\ b$ が正の実数で n が 2 以上の自然数のとき, 不等式

$$\left(\frac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n\ (n \geqq 2)$ を正の実数とするとき,

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$$

であり, 等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときに限ることを示せ.

('00 滋賀県立大, 環境科学, 工)

解答

(1) $t = \dfrac{a}{b}$ とおくと,

$$\left(\frac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} \iff \left(\frac{t+1}{n}\right)^n \geqq t\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdots (*)$$

であるから, $(*)$ を示せばよい.

$f(t) = \left(\dfrac{t+1}{n}\right)^n - t\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ とおくと,

$$f'(t) = \left(\frac{t+1}{n}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

ここで, $\dfrac{t+1}{n} > 0,\ \dfrac{1}{n-1} > 0$ であり,

かつ $\dfrac{t+1}{n} > \dfrac{1}{n-1} \iff t > \dfrac{1}{n-1}$ であるから,

t	0		$\dfrac{1}{n-1}$	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$

となり, $f(t) \geqq 0$ なので, $(*)$ が成立.

$\therefore \left(\dfrac{a+b}{n}\right)^n \geqq a\left(\dfrac{b}{n-1}\right)^{n-1}$.　(等号成立は $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{n-1}$ のとき)

(2) この命題 (等号成立条件も含む) を $n(\geqq 2)$ についての帰納法で示す.

i) $n=2$ のとき, 左辺 − 右辺 $=\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^2-a_1a_2=\left(\dfrac{a_1-a_2}{2}\right)^2\geqq 0$

(等号成立は $a_1=a_2$ のとき)

∴ 命題は成立.

ii) $n=k-1$ のとき命題が成り立つと仮定すると,

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}\geqq a_1a_2\cdots a_{k-1}\cdots(\sharp)$$

(等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}$ のとき) である.

このとき, (1) で, $n=k$, $a=a_k$, $b=a_1+\cdots+a_{k-1}$ とおくと

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k}{k}\right)^k\geqq a_k\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}$$

$$\geqq a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k.\quad ((\sharp)\text{ より})$$

(等号成立は, $\dfrac{a_k}{a_1+\cdots+a_{k-1}}=\dfrac{1}{k-1}$ かつ $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}$ より
,
$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=a_k$ のときである.)

であるから, $n=k$ のときも命題は成り立つ.

i,ii より, すべての自然数 n について命題は成立.

(1) の注

$$\text{与式}\iff\log\left(\frac{a+b}{n}\right)^n\geqq\log\left\{a\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\iff n\log\left(\frac{a+b}{n}\right)\geqq\log a+(n-1)\log\frac{b}{n-1}$$

$$\iff\log\frac{a+(n-1)\frac{b}{n-1}}{n}\geqq\frac{\log a+(n-1)\log\frac{b}{n-1}}{n}$$

であるから, $f(x)=\log x$ が凸であることから与式も導かれる.

参考文献

[1] Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities (MAA Problem Books Series.)*, Cambridge University Press.

[2] 桑野耕一, 数学講義のデザイン, 第 6 章 不等式の基本稽古, サイエンティスト社.

[3] 大関信雄・青柳雅計, 不等式, 槇書店.

[4] P.S.Bullen, *Handbook of means and their Inequality*, Mathematics and Its Applications, Springer.

[5] 風巻紀彦, 凸関数論, 横浜図書.

[6] Lars Hörmander, *Notions of convexity*, Birkhauser Boston.

[7] George Polya, Gabor Szego, *Problems and Theorems in Analysis I* : Series, Integral Calculus, Theory of Functions, Springer.