問題

Cauchy による、有名な Cauchy の不等式の証明は Lagrange の恒等式を用いたものです。Lagrange の恒等式とは、

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ を任意の実数とするとき,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}\left(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j\right)^2$$

が成立する。というものです。

（1）Lagrange の恒等式を示してください。

（2）積分バージョンを定式化し証明してください。

（3）良い一般化を見つけて定式化して証明してください。

（4）オープション

次の恒等式は、初めて見た時、出題者は、不自然な妙な形だと思いましたが、面白いことに Lagrange の恒等式を導くときのテクニックが自然に、この場合にも使えます。そこでおまけです。

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}\right)=\sum_{1\le j<k\le n}\frac{\left(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j\right)^2}{(\alpha_j+\beta_j)(\alpha_k+\beta_k)}$$

が任意の正の実数の組$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$に対して成立する事を示してください。

この恒等式に対応する、積分の不等式を定式化して証明してください。

数学工房　桑野耕一