エレガントな解答を求む　日本評論社　数学セミナー　８月号　出題について

「エレガントな解答を求む」の数学セミナー１１月号の解答と解説が割り当てられたページ数を大幅に超過してしまいましたので、数学セミナー編集部の入江さんと相談の上、オリジナルをホームページに掲載することにしました。この機会にもっと詳細な解説を付け加えようかとも思ったのですが、時間不足で今回は断念しました。いずれ、この内容に付け加えた改訂版を作りたいと思っています。計３５名の方から解答を頂きました。２０代４名　、３０代３名、４０代９名、５０代９名、６０代７名　７０代２名　８０代１名となりました。

本門の出題者の狙いは、Lagrange 恒等式

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2\sum_{k=1}^{n}\beta_k{}^2-\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2=\sum_{j<k}\left(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j\right)^2$$

の意味を洞察してよい拡張（一般化）とバリエーションを見つけてもらうことでした。

（１）で出題者が 出題文中で恒等式が Cours d’analyse 中で Cauchy によって示され、Cauchy の不等式の証明に使われたと述べたことが仇になり（？）、「Cauchy の不等式のよい拡張」と問いを解された方が半数近くに上がりました。その結果主問題（３）で多くの方が Hoelder の不等式を挙げその証明をされました。Schwarz の不等式にせよ、Hoelder の不等式にせよ、有名な証明を知っている事が却って、足枷になり、１,２の例外を除き、方向が違っても取り上げようという気になるほどの面白みのある結果は、残念ながら見出せませんでした。

■　問題１ Lagrange 恒等式の導出

２次式の基本変形によるもの、数学的帰納法、微分法、左辺の形に注目して行列型にした物となる。正解は２５名、基本的な等式の取り扱いなので論理の不備、式変形が不明確な解答は正解に数えませんでした。お一人、Cauchy－Binet 型の行列式の等式をよく知られているとして、天下りに与えて、特別な場合とした解答がありました。見抜かれたとおりですが、これはバランスを失した解答に思われます。それならば、使われた型の恒等式が何故自然な一般化であるかを、問題（３）で洞察すべきでした。

1) ２次式の基本変形による証明

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2\sum_{k=1}^{n}\beta_k{}^2=\sum_{j,k}\alpha_j{}^2\beta_k{}^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_j{}^2\beta_j{}^2+\sum_{j<k}\alpha_j{}^2\beta_k{}^2+\sum_{j<k}\alpha_k{}^2\beta_j{}^2$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\beta_j\alpha_k\beta_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2\beta_j{}^2+\sum_{j<k}\alpha_j\beta_k\alpha_k\beta_j+\sum_{k<j}\alpha_j\beta_k\alpha_k\beta_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2\beta_j{}^2+2\sum_{j<k}\alpha_j\beta_k\alpha_k\beta_j$$

第１式から第２式を引くと、

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2\sum_{k=1}^{n}\beta_k{}^2-\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2=\sum_{j<k}\alpha_j{}^2\beta_k{}^2-2\sum_{j<k}\alpha_j\beta_k\alpha_k\beta_j+\sum_{j<k}\alpha_k{}^2\beta_j{}^2$$

$$=\sum_{j<k}\left(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j\right)^2$$

2)Geam行列の展開

左辺を行列形にすると計算の見通しがよいだけでなく、幾何学的な意味も分かりやすい。

$a=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n),b=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$

$$\text{左辺}=\det\begin{pmatrix}\langle a,a\rangle\langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle\langle b,b\rangle\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\alpha_j\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_j\sum_{k=1}^{n}\beta_k\beta_k\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\beta_k\begin{vmatrix}\alpha_j,\alpha_k\\ \beta_j,\beta_k\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j<k}\alpha_j\beta_k\begin{vmatrix}\alpha_j,\alpha_k\\ \beta_j,\beta_k\end{vmatrix}-\sum_{j<k}\alpha_k\beta_j\begin{vmatrix}\alpha_j,\alpha_k\\ \beta_j,\beta_k\end{vmatrix}=\sum_{j<k}\begin{vmatrix}\alpha_j,\alpha_k\\ \beta_j,\beta_k\end{vmatrix}^2$$

$G(a,b):=\begin{pmatrix}\langle a,a\rangle\langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle\langle b,b\rangle\end{pmatrix}$を線形系$(a,b)$のGeam行列と言う。

３）その他　数学的帰納法によるもの、この場合は、省略。

４）微分法

$b=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$を任意に選び固定する。

$F(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n):=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^2\sum_{k=1}^{n}\beta_k{}^2-\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)^2-\sum_{j<k}\left(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j\right)^2$ とおいて

$\frac{\partial F}{\partial\alpha_k}=0$ (k=1,2⋯n) かつ$\mathbb{R}^n$は連結だから$F=\text{const.}$ $F(0,0\cdots0)=0$ より結論が従う。

■　問題２Lagrange 恒等式の積分型への一般化と Bunyakovsky-Cauchy 不等式

ここでは Lagrange 項等式の積分型とそこからの帰結として Schwarz の不等式

を得るのが本来の意図である。判別式を使う Schwarz の証明はあまりにもエレガントでよく知られているが、これをバカの一つ覚えの用に使うと逆に多くの知見を見落とすことになります。
ところで、何故かの有名な不等式が Bunyakovsky-Cauchy と言われなかったかということですが、ひとつは、彼の報告が読まれていなかったこと（やはりロシアはヨーロッパからすれば東の辺境です。ちなみに西の辺境がスペイン、これは今日でもあまり変わりありません）もう一つは結果だけで証明がなかった。これは私見ですが、Cauchy の証明で Lagrange 項等式の積分化は一目で分かりますので、Cauchy の仕事からの自明な帰結と見たのではないかと推察します。ともあれ、この本来 Bunyakovsky が見切ったであろう恒等式がここでの主題です。

連続型恒等式の発見

まず,Lagrange項等式で$\sum\to\int \quad \alpha\to \mathrm{f}\ \{1,2\cdots,n\}\to \mathrm{I}=[\alpha,\beta]$と置き換えれば

$$\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{f}^2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{g}^2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)-\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^2=\frac{1}{2}\int_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$=\int_\mathrm{J}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 　　ここでJ$=\left\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\alpha\le\xi\le\eta\le\beta\right\}$と予想される。

ここでは、 $\mathrm{f,g:I}\to\mathbb{R}$ を連続としよう。すると各辺は意味を持ち、証明は初等的な逐次積分と重積分の運用である。

1)以下は野崎氏の証明

$$\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\mathrm{g}^2(\eta)\int_\alpha^\beta \mathrm{f}^2(\xi)\mathrm{d}\xi+\mathrm{f}^2(\eta)\int_\alpha^\beta \mathrm{g}^2(\xi)\mathrm{d}\xi-2\,\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\eta)\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta$$

$$=2\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{f}^2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{g}^2(\eta)\mathrm{d}\eta\right)-2\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\eta)\mathrm{d}\eta\right)$$

一方、第 1 項は

$$\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\int_\mathrm{J}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\int_\mathrm{K}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

ここで,K$=\left\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\alpha\le\eta\le\xi\le\beta\right\}$

今、変換$\sigma(\xi,\eta)=(\eta,\xi)$はJをKに等長に写すから$|\det\sigma|=1$

$$\int_\mathrm{K}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_\mathrm{K}\left(\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)-\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)\right)^2\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_\mathrm{J}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2|\det\sigma|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_\mathrm{J}\left(\mathrm{f}(\xi)\mathrm{g}(\eta)-\mathrm{f}(\eta)\mathrm{g}(\xi)\right)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

コレが示すべきことであった。

この等式の系として Bunyakovsky 不等式が得られる。等号成立条件は f が項等的に 0

であるか、そうでなければ、$g=\lambda f$ なる定数 λ が存在することである。等号成立条件のミスが目立ちました。

念のために,等号成立条件を導いておきます。
$f=0$ なら明らかに等号が成立するので, $f\neq 0$　とする。

$$0=\left(\int_\alpha^\beta f^2(\xi)d\xi\right)\left(\int_\alpha^\beta g^2(\xi)d\xi\right)-\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)d\xi\right)=\frac{1}{2}\int_{I\times I}\left(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)\right)^2 d\xi d\eta$$

f,gの連続性より $f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)=0$　が任意の $\xi,\eta\in I$ について成立する。
f の仮定から、 $f(\xi_0)\neq 0$ を満たす $\xi_0\in I$ が存在する。 $f(\xi_0)g(\eta)=f(\eta)g(\xi_0)$

これから $g=\lambda f$ ただし $\lambda=\dfrac{g(\xi_0)}{f(\xi_0)}$　がえられる。

半数近い回答者が積分型では Schwarz の判別式を使う証明をそのままかいています。関数の積分可能性について不確かな記述が目立ちました。無論この出題では積分論の知識は、仮定していませんから、連続関数と Riemann 積分の範囲で扱えば十分です。

２）Schwarz の方法の対称化

一般化の問題に繋がるので、Schwarz の不等式の証明をツギのように対称化しましょう。

$f,g:\mathbf{I}\to\mathbb{R}$　は連続関数。　$\Delta(t,s):=\int_\alpha^\beta\left(t\,f(\xi)-sg(\xi)\right)^2 d\xi$ を考える。

$\Delta(t,s)$ を展開すると、$\Delta(t,s)=t^2A-2tsB+s^2C=(t,s)\begin{pmatrix}A,B\\B,C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix}$　$\Delta(t,s)\geq 0$ より対称行列

$\begin{pmatrix}A,B\\B,C\end{pmatrix}$ は非負である。　よって $\mathrm{Det}\begin{pmatrix}A,B\\B,C\end{pmatrix}\geq 0$　　これが示すべきことである。

但し $A=\int_\alpha^\beta\left(f(\xi)\right)^2 d\xi$, $B=\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)d\xi$　$C=\int_\alpha^\beta\left(g(\xi)\right)^2 d\xi$

等号成立条件は $\mathrm{Det}\begin{pmatrix}A,B\\B,C\end{pmatrix}=0$　の必要十分条件は、(t_0,s_0) が存在して $\begin{pmatrix}A,B\\B,C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0\\s_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

だから $\Delta(t_0,s_0)=0$　　f, gの連続性より $t_0f-s_0g=0$ と同値である。

３）微分法を利用する方法　（波多野氏の解答）

Lagrange 項等式の右辺の積分を逐次積分で置き換えるのがポイント

$$\int_J\left(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)\right)^2 d\xi d\eta=\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\eta\left(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)\right)^2 d\xi d\eta$$

$$\Theta(y):=\left(\int_\alpha^y f^2(\xi)d\xi\right)\left(\int_\alpha^y g^2(\xi)d\xi\right)-\left(\int_\alpha^y f(\xi)g(\xi)d\xi\right)^2-\int_\alpha^y\int_\alpha^\eta\left(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)\right)^2 d\xi d\eta$$

yで微分すると$\Theta'(y)=0$をえる。$\Theta(y)=\mathrm{const}$ が任意の$y\in[\alpha,\beta]$について成立する。$\Theta(\alpha)=0$により恒等式が従う。

■　問題３　Lagrange 恒等式の一般化とその帰結

もし、Lagrange 恒等式の Hoelder 型への拡張と言うものがあれば無論ここで取り上げる物になりますが、残念ながらそのような解答はありませんでした。出題者自身も、そのような方向は考えていませんでした。

山田氏は　Lagrange 恒等式の一般化として次の二つをあげています。

但し、見通しを良くするためにベクトル記法に変えてあります。

＃1)　Cauchy-Lagrange恒等式

$a_1a_2,\cdots,a_r\in\mathbb{R}^n$ $(r\le n)$　$a_k=(\alpha_{k1}\alpha_{k2}\cdots,\alpha_{kr})$ $(1\le k\le n)$

$$\det G(a_1a_2,\cdots,a_r)=\begin{vmatrix}\langle a_1,a_1\rangle\cdots\langle a_1,a_r\rangle\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \langle a_r,a_1\rangle\cdots\langle a_r,a_r\rangle\end{vmatrix}=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n}\begin{vmatrix}\alpha_{j_1 1}\alpha_{j_1 2}\cdots\alpha_{j_1 r}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{j_r 1}\alpha_{j_r 2}\cdots\alpha_{j_r r}\end{vmatrix}^2$$

幾何学的には,$\mathbb{R}^n$内の、一つの頂点を共有するr本のベクトル$a_1a_2,\cdots,a_r$の作る平行２ｒ面体のｒ次元体積の平方が$\binom{n}{r}$個の直交成分の体積の平方になると言う平行２ｒ面体のピュタゴラスの定理です。

＃2)関数型の一般化

$f_1, f_2,\cdots f_r$ $I=[\alpha,\beta]$ が連続な時

$$\det G(f_1, f_2,\cdots f_r)=\begin{vmatrix}\langle f_1, f_1\rangle\langle f_2, f_1\rangle\cdots\langle f_r, f_1\rangle\\ \langle f_1, f_1\rangle\langle f_2, f_2\rangle\cdots\langle f_r, f_2\rangle\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \langle f_1, f_r\rangle\langle f_2, f_r\rangle\cdots\langle f_r, f_r\rangle\end{vmatrix}=\int_J\begin{vmatrix}f_1(\xi_1)f_2(\xi_1)\cdots f_r(\xi_1)\\ f_1(\xi_2)f_2(\xi_2)\cdots f_r(\xi_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_1(\xi_r)f_2(\xi_r)\cdots f_r(\xi_r)\end{vmatrix}^2 d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

ただし、$\langle f_j, f_k\rangle=\int_\alpha^\beta f_j(\xi)f_k(\xi)$ $1\le j,k\le n$

以上の結果から古典的なCauchy-Bunyakovsky不等式の直接の一般化が得られる。

任意の$a_1a_2,\cdots,a_r\in\mathbb{R}^n$ $(r\le n)$　にたいして$G(a_1a_2,\cdots,a_r)\ge 0$ 等号成立は$a_1a_2,\cdots,a_r$が線形従属

また任意の $f_1, f_2,\cdots f_r$ $I=[\alpha,\beta]$にたいして$G(f_1, f_2,\cdots f_r)\ge 0$等号成立は $f_1, f_2,\cdots f_r$が線形従属

この不等式の証明そのものはSchwarzの方法の一般化を用いた方が簡明である。

すなわち$0 \le \left\| \sum_{j=1}^{r} \tau_j a_j \right\|^2 = (\tau_1 \cdots \tau_r) G(a_1 a_2, \cdots, a_r) \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_r \end{pmatrix}$ Gram行列$G(a_1 a_2, \cdots, a_r)$は非負.

よって$\det G(a_1 a_2, \cdots, a_r) \ge 0$　とすればよい。　関数系の証明も同様。

3）Cauchy-Binetの恒等式

田島さんは一般化としてCauchy-Bineの恒等式を挙げられていましたが、それは正しい古典的な形でかくと

$a_1 a_2, \cdots, a_r, b_1 b_2 \cdots, b_r \in \mathbb{R}^n \ (r \le n) \ \ a_k = (\alpha_{k1} \alpha_{k2} \cdots, \alpha_{kr}), b_k = (\beta_{k1} \beta_{k2} \cdots, \beta_{kr})$

$$\det G(a_1 a_2, \cdots, a_r : b_1 b_2 \cdots, b_r) = \begin{vmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle \langle a_1, b_2 \rangle \cdots \langle a_1, b_r \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle \langle a_2, b_2 \rangle \cdots \langle a_2, b_r \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle a_r, b_1 \rangle \langle a_r, b_2 \rangle \cdots \langle a_r, b_r \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n} \begin{vmatrix} \alpha_{j_1 1} \alpha_{j_1 2} \cdots \alpha_{j_1 r} \\ \alpha_{j_2 1} \alpha_{j_2 2} \cdots \alpha_{j_2 r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{j_r 1} \alpha_{j_r 2} \cdots \alpha_{j_r r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{j_1 1} \beta_{j_1 2} \cdots \beta_{j_1 r} \\ \beta_{j_2 1} \beta_{j_2 2} \cdots \beta_{j_2 r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_{j_r 1} \beta_{j_r 2} \cdots \beta_{j_r r} \end{vmatrix}$$

4) Cauchy-Binet連続型

$$\det G(f_1, f_2, \cdots f_r : g_1, g_2 \cdots g_r) = \begin{vmatrix} \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_1 \rangle \cdots \langle f_r, g_1 \rangle \\ \langle f_1, g_2 \rangle \langle f_2, g_2 \rangle \cdots \langle f_r, g_2 \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle f_1, g_r \rangle \langle f_2, g_r \rangle \cdots \langle f_r, g_r \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \int_J \begin{vmatrix} f_1(\xi_1) f_2(\xi_1) \cdots f_r(\xi_1) \\ f_1(\xi_2) f_2(\xi_2) \cdots f_r(\xi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(\xi_r) f_2(\xi_r) \cdots f_r(\xi_r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1(\xi_1) g_2(\xi_1) \cdots g_r(\xi_1) \\ g_1(\xi_2) g_2(\xi_2) \cdots g_r(\xi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_1(\xi_r) g_2(\xi_r) \cdots g_r(\xi_r) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_r$$

$\langle f_j, g_k \rangle = \int_\alpha^\beta f_j(\xi) g_k(\xi) d\xi \ \ 1 \le j,k \le n$

＃1 離散の場合の導出

少し一般化して、基本ベクトルの代わりに、任意の正規直交底$(u_1 u_2 \cdots, u_n)$にたいして展開公式を導こう

$$\det G\left(a_1 a_2,\cdots,a_r\right)=\begin{vmatrix}\left\langle a_1,\sum_{j_1=1}^{n}\left\langle a_1,u_{j_1}\right\rangle u_{j_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_1,\sum_{j=1}^{n}\left\langle a_r,u_{j_r}\right\rangle u_{j_r}\right\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\langle a_r,\sum_{j_1=1}^{n}\left\langle a_1,u_{j_1}\right\rangle u_{j_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_r,\sum_{j=1}^{n}\left\langle a_r,u_{j_r}\right\rangle u_{j_r}\right\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_r}\left\langle a_1,u_{j_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_r,u_{j_r}\right\rangle\begin{vmatrix}\left\langle a_1,u_{j_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_1,u_{j_r}\right\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\langle a_r,u_{j_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_r,u_{j_r}\right\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{1\le k_1\le k_2\le\cdots k_r\le n}\ \sum_{\sigma\in S\left(k_1,k_2\cdots k_r\right)}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\langle a_1,u_{\sigma(k_1)}\right\rangle\cdots\left\langle a_r,u_{\sigma(k_r)}\right\rangle\begin{vmatrix}\left\langle a_1,u_{k_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_1,u_{k_r}\right\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\langle a_r,u_{k_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_r,u_{k_r}\right\rangle\end{vmatrix}$$

これから、

$$\begin{vmatrix}\left\langle a_1,a_1\right\rangle\cdots\left\langle a_1,a_r\right\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\langle a_r,a_1\right\rangle\cdots\left\langle a_r,a_r\right\rangle\end{vmatrix}=\sum_{1\le k_1\le k_2\le\cdots k_r\le n}\begin{vmatrix}\left\langle a_1,u_{k_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_1,u_{k_r}\right\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left\langle a_r,u_{k_1}\right\rangle\cdots\left\langle a_r,u_{k_r}\right\rangle\end{vmatrix}^2$$

特に　$u_k=e_k$ $(1\le k\le n)$ の時が上に挙げた式である。

以上の話しは、ｒ－ベクトルの空間の内積に対するピタゴラスの定理に他ならない。

＃２の導出

$$\det G\left(f_1,\ f_2,\cdots f_r\right)=\begin{vmatrix}\int_\alpha^\beta f_1\left(\xi_1\right)f_1\left(\xi_1\right)d\xi_1\cdots\int_\alpha^\beta f_r\left(\xi_r\right)f_1\left(\xi_r\right)d\xi_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_\alpha^\beta f_1\left(\xi_1\right)f_r\left(\xi_1\right)d\xi_1\cdots\int_\alpha^\beta f_r\left(\xi_r\right)f_r\left(\xi_r\right)d\xi_r\end{vmatrix}=$$

$$\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta\cdots\int_\alpha^\beta f_1\left(\xi_1\right)f_2\left(\xi_2\right)\cdots f_r\left(\xi_r\right)\begin{vmatrix}f_1\left(\xi_1\right)\cdots f_1\left(\xi_r\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r\left(\xi_1\right)\cdots f_r\left(\xi_r\right)\end{vmatrix}d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

$$=\int_{I^n} f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)\cdots f_r(\xi_r)\begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r)\end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

$S(1,2\cdots,r)$を$\{1,2\cdots,r\}$上の置換全体,$\sigma\in S(1,2\cdots,r)$に対して

$\hat{\sigma}$を$\hat{\sigma}(e_k)=e_{\sigma(k)}$ (k=1,2⋯n)で定まる線形変換なら等長だから

$\det\hat{\sigma}=\pm 1$　$J:=\{(\xi_1\xi_2\cdots,\xi_n)|\alpha\le\xi_1\le\cdots\le\xi_n\le\beta\}$

また、$J_\sigma=\{(\xi_{\sigma(1)}\xi_{\sigma(2)}\cdots,\xi_{\sigma(n)})|\alpha\le\xi_1\le\cdots\le\xi_n\le\beta\}$

すると$I^n=\bigcup_{\sigma\in S(1,2\cdots,r)} J_\sigma=\bigcup_{\sigma\in S(1,2\cdots,r)}\hat{\sigma}(J)$ 境界は重なるが積分に寄与しない。

最後の項を,分割して

$$\sum_{\sigma\in S(1,2\cdots,r)}\int_{J_\sigma} f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)\cdots f_r(\xi_r)\begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r)\end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

と記せば、$\hat{\sigma}(\vec{y})=\vec{x}$　$\vec{y}=(\eta_1\eta_2\cdots\eta_r)$　$\vec{x}=(\xi_1\xi_2\cdots\xi_r)$ とするなら、　$\xi_k=\eta_{\sigma^{-1}(k)}$

$$\int_{J_\sigma} f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)\cdots f_r(\xi_r)\begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r)\end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

$$=\int_J f_1(\eta_{\sigma^{-1}(1)})f_2(\eta_{\sigma^{-1}(2)})\cdots f_r(\eta_{\sigma^{-1}(r)})\begin{vmatrix} f_1(\eta_{\sigma^{-1}(1)})\cdots f_1(\eta_{\sigma^{-1}(r)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\eta_{\sigma^{-1}(1)})\cdots f_r(\eta_{\sigma^{-1}(r)})\end{vmatrix} d\eta_{\sigma^{-1}(1)} d\eta_{\sigma^{-1}(2)}\cdots d\eta_{\sigma^{-1}(r)}$$

$$=\int_J \operatorname{sgn}(\sigma) f_1(\eta_{\sigma^{-1}(1)})f_2(\eta_{\sigma^{-1}(2)})\cdots f_r(\eta_{\sigma^{-1}(r)})\begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r)\end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

の変形より

$$\sum_{\sigma\in S(1,2\cdots,r)}\int_{J_\sigma} f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)\cdots f_r(\xi_r)\begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r)\end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

$$=\int_J \sum_{\sigma\in S(1,2\cdots,r)} \operatorname{sgn}(\sigma) f_1\left(\eta_{\sigma^{-1}(1)}\right) f_2\left(\eta_{\sigma^{-1}(2)}\right)\cdots f_r\left(\eta_{\sigma^{-1}(r)}\right) \begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

$$=\int_J \begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r) \end{vmatrix}^2 d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r = \frac{1}{r!}\int_{I^n} \begin{vmatrix} f_1(\xi_1)\cdots f_1(\xi_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(\xi_1)\cdots f_r(\xi_r) \end{vmatrix}^2 d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_r$$

■♯ 1)の形のCauchy-Lagrange恒等式の最も重要な例として,例えば、$\mathbb{R}^n$のなかのr次元曲面M上の体積要素のJakobi行列式による表示（直交座標系による表示）を上げることができる。
これは体積要素を表すGram行列式にかんするCauchy-Lagrange恒等式にほかならない。
$\Omega\subset\mathbb{R}^r$を開集合　$M\subset\mathbb{R}^n$　が　滑らかな写像$\Psi:\Omega\to\mathbb{R}^r$で与えられているとしよう。
但し,$\operatorname{rank} d\Psi = r$.この時r次元曲面$M=\Psi(\Omega)$上の点$\Psi(\vec{t})$　$\vec{t}=(t_1,t_2\cdots,t_r)\in\Omega$　に於ける
r次元体積要素$dv(\vec{t})$は

$$dv(\vec{t})=\sqrt{G\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t_1},\frac{\partial\Psi}{\partial t_2}\cdots,\frac{\partial\Psi}{\partial t_r}\right)}dt_1 dt_2\cdots dt_r$$

で与えられる。$\Psi(\vec{t})=\left(\varphi_1(\vec{t})\varphi_2(\vec{t})\cdots\varphi_n(\vec{t})\right)$

についてCauchy-Lagrange恒等式を用いれば

$$dv(\vec{t})=\sqrt{\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n}\left|\frac{\partial\left(\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}\cdots\varphi_{j_r}\right)}{\partial\left(t_1,t_2\cdots,t_r\right)}\right|^2}\,dt_1 dt_2\cdots dt_r$$

ただし$\left|\dfrac{\partial\left(\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}\cdots\varphi_{j_r}\right)}{\partial\left(t_1,t_2\cdots,t_r\right)}\right| = \begin{vmatrix} \partial_{t_1}\varphi_{j_1}\partial_{t_2}\varphi_{j_1}\cdots\partial_{t_r}\varphi_{j_1} \\ \partial_{t_1}\varphi_{j_2}\partial_{t_2}\varphi_{j_2}\cdots\partial_{t_r}\varphi_{j_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \partial_{t_1}\varphi_{j_r}\partial_{t_2}\varphi_{j_r}\cdots\partial_{t_r}\varphi_{j_r} \end{vmatrix}$

特に,滑らかな曲線Ψについては

$$dv(t)=\|\Psi(t)\|dt=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\right)^2}\,dt$$

５）Cauchy-Binet 型の一般化
不等式は実とか複素でないと具合悪いが、Cauchy－Binet型の一般化なら
ツギのように定式化できる。

Vを体K上の有限次元線形空間。　n=dimV　B＝$\left(b_1 b_2 \cdots, b_n\right)$をVの基底

B*＝$\left(b^*{}_1 b^*{}_2 \cdots, b^*{}_n\right)$を双対基底。　$f_1 f_2 \cdots, f_r \in V$ $\phi_1\phi_2\cdots,\phi_r \in V^*$(V上のK-値線形写像）

$$\begin{vmatrix} \phi_1(f_1)\phi_1(f_2)\cdots\phi_1(f_r) \\ \phi_2(f_1)\phi_2(f_2)\cdots\phi_2(f_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \phi_r(f_1)\phi_r(f_2)\cdots\phi_r(f_r) \end{vmatrix} = \sum_{1\le j_1< j_2<\cdots< j_r\le n} \begin{vmatrix} b^*_{j_1}(f_1)b^*_{j_1}(f_2)\cdots b^*_{j_1}(f_r) \\ b^*_{j_2}(f_1)b^*_{j_2}(f_2)\cdots b^*_{j_1}(f_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b^*_{j_r}(f_1)b^*_{j_r}(f_2)\cdots b^*_{j_r}(f_r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1(b_{j_1})\ \ \phi_2(b_{j_1})\cdots\phi_r(b_{j_1}) \\ \phi_1(b_{j_2})\ \ \phi_2(b_{j_2})\cdots\phi_r(b_{j_2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \phi_1(b_{j_r})\ \ \phi_2(b_{j_r})\cdots\phi_r(b_{j_r}) \end{vmatrix}$$

特にVが内積空間、$\langle\ \rangle$がVの内積とする。　線形形式は表現定理より内積で

表示されるから、B＝$\left(b_1 b_2 \cdots, b_n\right)$をVの正規直交基底とすると、次の展開公式を得る。

$f_1 f_2 \cdots, f_r, g_1 g_2 \cdots g_r \in V$

$$\begin{vmatrix} \langle f_1,g_1\rangle\langle f_2,g_1\rangle\cdots\langle f_r,g_1\rangle \\ \langle f_1,g_2\rangle\langle f_2,g_2\rangle\cdots\langle f_r,g_2\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle f_1,g_r\rangle\langle f_2,g_r\rangle\cdots\langle f_r,g_r\rangle \end{vmatrix} = \sum_{1\le j_1< j_2<\cdots< j_r\le n} \begin{vmatrix} \langle f_1,b_{j_1}\rangle\langle f_2,b_{j_1}\rangle\cdots\langle f_r,b_{j_1}\rangle \\ \langle f_1,b_{j_2}\rangle\langle f_2,b_{j_2}\rangle\cdots\langle f_r,b_{j_2}\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle f_1,b_{j_r}\rangle\langle f_2,b_{j_r}\rangle\cdots\langle f_r,b_{j_r}\rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle b_{j_1},g_1\rangle\langle b_{j_1},g_2\rangle\cdots\langle b_{j_1},g_r\rangle \\ \langle b_{j_2},g_1\rangle\langle b_{j_2},g_2\rangle\cdots\langle b_{j_2},g_r\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle b_{j_r},g_1\rangle\langle b_{j_r},g_2\rangle\cdots\langle b_{j_r},g_r\rangle \end{vmatrix}$$

◆このようなタイプの行列はしばしば現れる、

例えば、Vをn-1次以下の多項式関数の作るn次元線形空間、$\left\{x_1 x_2 \cdots, x_r\right\}$ を相異する点

(実または複素）のシステムとすれば,

$f_1 f_2 \cdots, f_r \in V$ $B=\left\{1,x,x^2\cdots,x^{n-1}\right\}$ $B^*=\left\{\delta,\delta^{(1)},\cdots,\delta^{(n-1)}\right\}$ ただし,$\delta^{(k)}(f)=f^{(k)}(0)$ $(1\le k\le n\text{-}1)$

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1)f_1(x_2),\cdots f_1(x_r) \\ f_2(x_1)f_2(x_2),\cdots f_2(x_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(x_1)f_r(x_2),\cdots f_r(x_r) \end{vmatrix} = \sum_{1\le j_1< j_2<\cdots< j_r\le n} \frac{1}{j_1!\ j_2!\cdots j_r!} \begin{vmatrix} f_1^{(j_1)}(0)f_2^{(j_1)}(0),\cdots f_r^{(j_1)}(0) \\ f_1^{(j_2)}(0)f_2^{(j_2)}(0),\cdots f_r^{(j_2)}(0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1^{(j_r)}(0)f_2^{(j_r)}(0),\cdots f_r^{(j_r)}(0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1{}^{j_1},x_2{}^{j_1}\cdots,x_r{}^{j_1} \\ x_1{}^{j_2},x_2{}^{j_2}\cdots,x_r{}^{j_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1{}^{j_r},x_2{}^{j_r}\cdots,x_r{}^{j_r} \end{vmatrix}$$

左辺のVan derMonde型行列式のCauchy-Binet型展開公式の一つ。

出題者がこのような事を考えた、

理由はChebyschev多項式系などの一般化の際にシステムを特徴付ける行列式を統一的に

理解しようとしたときだったと記憶している。

６）Chebyshev の順序不等式

Chebyshev の順序不等式を Cauchy と同じタイプの恒等式から得られる不等式

という指摘を Tezuka 氏がされていた。Chebyshev の順序不等式とは

f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 非減少関数、$p_j\geq 0$ (j=1,2⋯,n)は$\sum_{j=1}^{n}p_j=1$ を満たす正数列

任意の非減少列　$\xi_1\leq\xi_2\leq\cdots\leq\xi_n$　にたいして

$\left(\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)p_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}g(\xi_j)p_j\right)\leq\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)g(\xi_j)p_j$ が成立する。

連続バージョンは,例えば　p:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　　非負で$\int_{\mathbb{R}}p(\xi)d\xi=1$ を満たすとする。

f,g:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 非減少関数ならば、

$$\int_{\mathbb{R}}f(\xi)p(\xi)d\xi\int_{\mathbb{R}}g(\xi)p(\xi)d\xi\leq\int_{\mathbb{R}}f(\xi)g(\xi)p(\xi)d\xi$$

pは確率密度関数と理解されるからXを密度関数pを持つ確率変数とすれば、

この不等式は期待値の不等式　$E(f(X))E(g(X))\leq E(f\,g(X))$　を表しています。

連続型の時、対応する恒等式は、　u,v:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$に対して、内積を

$$\langle u,v\rangle:=\int_{\mathbb{R}}u(\xi)v(\xi)p(\xi)d\xi$$

とすればCauchy-Binet型の展開公式から直ちに得られます。

$$\int_{\mathbb{R}}f(\xi)g(\xi)p(\xi)d\xi-\int_{\mathbb{R}}f(\xi)p(\xi)d\xi\int_{\mathbb{R}}g(\xi)p(\xi)d\xi=\begin{vmatrix}\langle f,g\rangle & \langle e,g\rangle\\ \langle f,e\rangle & \langle e,e\rangle\end{vmatrix}$$

ただしeは$\mathbb{R}$上で定数１を取る関数。

$$\begin{vmatrix}\langle f,g\rangle & \langle e,g\rangle\\ \langle f,e\rangle & \langle e,e\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\int_{\mathbb{R}}f(\xi)g(\xi)p(\xi)d\xi & \int_{\mathbb{R}}g(\eta)p(\eta)d\eta\\ \int_{\mathbb{R}}f(\xi)p(\xi)d\xi & \int_{\mathbb{R}}p(\eta)d\eta\end{vmatrix}=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(\xi)\begin{vmatrix}g(\xi) & g(\eta)\\ 1 & 1\end{vmatrix}p(\xi)p(\eta)d\eta d\xi$$

ξとηを入れ替えて計算すれば

$$\begin{vmatrix}\langle f,g\rangle & \langle e,g\rangle\\ \langle f,e\rangle & \langle e,e\rangle\end{vmatrix}=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(\eta)\begin{vmatrix}g(\eta) & g(\zeta)\\ 1 & 1\end{vmatrix}p(\eta)p(\xi)d\xi d\eta$$

$$=-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(\eta)\begin{vmatrix}g(\xi) & g(\eta)\\ 1 & 1\end{vmatrix}p(\xi)p(\eta)d\eta d\xi$$

故に$\begin{vmatrix}\langle f,g\rangle & \langle e,g\rangle\\ \langle f,e\rangle & \langle e,e\rangle\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(f(\xi)-f(\eta)\right)\left(g(\xi)-g(\eta)\right)p(\xi)p(\eta)d\xi d\eta$

$\left(f(\xi)-f(\eta)\right)\left(g(\xi)-g(\eta)\right)\geq 0$ が任意の$(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$について成立するので不等式が従う。

　練習問題　　離散型のChebyschevの順序不等式に対応する恒等式を求めよ

７）その他　落合氏は一般の実内積空間の内積についての Schwarz 不等式は、一般の内積を持つ平面幾何にほかならぬ事を指摘され、初等幾何の証明を与えています。この件については「いわゆる Schwarz のトリック」についての解説

を兼ねてまとめて説明して置きました。

■問題４　**オープション問題**

１）Lagrange 恒等式のバリエーションという趣旨をよく活かした金井氏の解答を紹介する。

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{j=1}^{n}\beta_j-\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j+\beta_j}}\right)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j+\beta_j}}\right)^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}\right)^2 = (*)$$

（＊）にLagrange恒等式を使うと

$$(*)=\sum_{1\le j<k\le n}\left(\frac{\alpha_j\beta_k}{\sqrt{\alpha_j+\beta_j}\sqrt{\alpha_k+\beta_k}}-\frac{\alpha_k\beta_j}{\sqrt{\alpha_k+\beta_k}\sqrt{\alpha_j+\beta_j}}\right)^2$$

$$=\sum_{1\le j<k\le n}\frac{(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j)^2}{(\alpha_j+\beta_j)(\alpha_k+\beta_k)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{j=1}^{n}\beta_j-\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}=\sum_{1\le j<k\le n}\frac{(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j)^2}{(\alpha_j+\beta_j)(\alpha_k+\beta_k)}$$

よって右辺から,求める不等式が得られる。等号成立条件は,

$a:=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=0$ または$b:=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)=0$　または$b=\lambda a$なる

定数λが存在するときである。

２）

連続型の対応する恒等式は

$f,g:I\to\mathbb{R}$ を連続で正の値を取る関数とすると、

$\dfrac{f\,g}{f+g}:I\to\mathbb{R}$　は連続だから積分可能で、

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi\int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta (f(\xi)+g(\xi))\,d\xi\int_\alpha^\beta\frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi$$

$$=\int_J\frac{(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi))^2}{(f(\xi)+g(\xi))(f(\eta)+g(\eta))}d\xi d\eta$$

金井氏の取り扱いを用いれば、エレガントな証明になる。

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi\int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta (f(\xi)+g(\xi))d\xi\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi$$

$$=\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi\right)\left(\int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi\right)-\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi\right)^2$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(\frac{f(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\right)^2 d\xi\int_\alpha^\beta\left(\frac{g(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\right)^2 d\xi-\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\frac{g(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}d\xi\right)^2$$

ここでLagrangeの恒等式を用いれば、最後の項は,

$$\int_J\left(\frac{f(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\frac{g(\eta)}{\sqrt{f(\eta)+g(\eta)}}-\frac{f(\eta)}{\sqrt{f(\eta)+g(\eta)}}\frac{g(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\right)^2 d\xi d\eta$$

$$=\int_J\frac{\left(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)\right)^2}{\left(f(\xi)+g(\xi)\right)\left(f(\eta)+g(\eta)\right)}d\xi d\eta$$

３） 金井氏は、連続型の不等式は

連続関数$\frac{f}{\sqrt{f+g}},\frac{g}{\sqrt{f+g}}: I\to\mathbb{R}$ にSchwarzの不等式

を適用することにより、導かれた。

$$\int_\alpha^\beta\left(\frac{f(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\right)^2 d\xi\int_\alpha^\beta\left(\frac{g(\xi)}{\sqrt{f(\xi)+g(\xi)}}\right)^2 d\xi\geq\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}\right)^2$$

$$\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}\right)\left(\int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}\right)\geq\left(\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}\right)^2$$

故に左辺を展開すると

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi\int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi-\int_\alpha^\beta (f(\xi)+g(\xi))d\xi\int_\alpha^\beta \frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi\geq 0$$

４） 解説

金井氏のやり方は、ベクトルと行列で表せば意味がハッキリする。要点は内積を適切に取るとLagrange恒等式に帰着することである。

$a:=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$　$b:=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$ $\alpha_j>0$ $\beta_j>0$ $1\le j\le n$

$\mathbb{R}^n$の内積を$\langle x,y\rangle:=\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j\eta_j}{\alpha_j+\beta_j}$　により定義すると、

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{j=1}^{n}\beta_j-\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}=\begin{vmatrix}\langle a,a+b\rangle & \langle a,b\rangle\\ \langle a+b,a+b\rangle & \langle a+b,b\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\langle a,a\rangle & \langle b,a\rangle\\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle\end{vmatrix}$$

$u_j=\sqrt{\alpha_j+\beta_j}e_j$　$(1\le j\le n)$は、この内積に関する正規直交基底

この基底について一般化されたLagrange恒等式を適用すると,

$\xi_j=\langle a,u_j\rangle=\alpha_j/\sqrt{\alpha_j+\beta_j}$, $\eta_j=\langle b,u_j\rangle=\beta_j/\sqrt{\alpha_j+\beta_j}$　$(1\le j\le n)$

故に　$G(a,b)=\sum_{1\le j<k\le n}\begin{vmatrix}\xi_j,\eta_j\\ \xi_k,\eta_k\end{vmatrix}^2=\sum_{1\le j<k\le n}\frac{1}{(\alpha_j+\beta_j)(\alpha_k+\beta_k)}\begin{vmatrix}\alpha_j\beta_j\\ \alpha_k\beta_k\end{vmatrix}^2$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{j=1}^{n}\beta_j-\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}=\sum_{1\le j<k\le n}\frac{(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j)^2}{(\alpha_j+\beta_j)(\alpha_k+\beta_k)}=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j)^2}{(\alpha_j+\beta_j)(\alpha_k+\beta_k)}$$

対応する不等式と等号成立条件は直ちに得られる。

連続バージョンの恒等式は,

この導出も数列バージョンと同様に内積を　$u,v:I\to\mathbb{R}$ にたいして

$\langle u,v\rangle:=\int_\alpha^\beta\frac{u(\xi)v(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi$ とおけば、

左辺$=\begin{vmatrix}\langle f, f+g\rangle & \langle f,g\rangle\\ \langle f+g, f+g\rangle & \langle f+g,g\rangle\end{vmatrix}=G(f,g)$

＊関数についての定義域や滑らかさについての条件をはるかに一般的に出来るが、それについてはこのコーナーでの想定を超えているので扱わない。

同じ条件で、波多野氏の証明を紹介する。

$$\Theta(y)=\int_\alpha^y f(\xi)d\xi\int_\alpha^y g(\xi)d\xi-\int_\alpha^y(f(\xi)+g(\xi))d\xi\int_\alpha^y\frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi$$

$$\Theta'(y)=f(y)\int_\alpha^y g(\xi)d\xi+g(y)\int_\alpha^y f(\xi)d\xi$$

$$-(f(y)+g(y))\int_\alpha^y\frac{f(\xi)g(\xi)}{f(\xi)+g(\xi)}d\xi-\frac{f(y)g(y)}{(f(y)+g(y))}\int_\alpha^y(f(\xi)+g(\xi))d\xi$$

$$=\int_\alpha^y\frac{(f(\xi)g(y)-f(y)g(\xi))^2}{(f(\xi)+g(\xi))(f(y)+g(y))}d\xi$$

yについてαからβまで積分すると$\Theta(\beta)=\int_\alpha^\beta\int_\alpha^y \frac{\left(f(\xi)g(y)-f(y)g(\xi)\right)^2}{\left(f(\xi)+g(\xi)\right)\left(f(y)+g(y)\right)}d\xi dy$

$=\int_J \frac{\left(f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)\right)^2}{\left(f(\xi)+g(\xi)\right)\left(f(\eta)+g(\eta)\right)}d\xi d\eta$　これが示すべきことであった。

ζ氏はオープション問題（Milinの不等式）を拡張してCauchyの不等式と組み合わせ、御自身の不等式を得ている。

■　Schwarz の不等式は平面上の定理である（Schwarz のトリックについて）

このテーマに関係する話しをするたびに、教員の方から教えられている立場として、Schwarz の方法は鮮やかだが、根拠がわからない、学生（生徒）を納得させられない。この方法の根拠はという御質問を頂きます。そこで、最後にSchwarz の方法を幾何学的に考えて見ましよう。

一般の内積空間$\left(V\langle\ \rangle\right)$　が与えられているとき,よく御存知のように,Schwarzの方法でCauchy-Schwarzの不等式が証明されるわけです。これを幾何学的に見ます。

まず線形独立な$u,v\in V$が与えられたとする。

$W:=\mathrm{span}(u,v)=\left\{\xi u+\eta v \mid \xi,\eta\in\mathbb{R}\right\}$は２次元の部分空間,

従ってu,vにより張られる実平面上で考えれば十分なのです。

正確に言うと,

$\theta\left(\xi_1 e_1+\xi_2 e_2\right)=\xi_1 u+\xi_2 v\in W$ は同型対応で,$\mathbb{R}^2$に内積を$\langle x,y\rangle_\theta:=\langle\theta(x),\theta(y)\rangle$ $x,y\in\mathbb{R}^2$

として定義してやると、これが、Wのコピーになっているわけです。

逆にWは$\left(\mathbb{R}^2\langle\ \rangle_\theta\right)$と見て、平面幾何学が出来るわけです。

要するに,通常の平面に斜交座標が入った世界を考えている事になります。

$\phi(t):=tu-v$ $t\in\mathbb{R}$ は点$-v$　を通り　方向ベクトルu　を持つ直線です。

$\Theta(t)=\|tu-v\|^2$ は原点から、直線ϕ上の点$\phi(t)$への距離の平方です。

直線ϕと原点の距離：＝$\min_{t\in\mathbb{R}}\sqrt{\Theta(t)}$　これは、２次式の基本変形で計算できる。

$$\Theta(t)=t^2\|u\|^2-2t\langle u,v\rangle+\|v\|^2=\|u\|^2\left(t-\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}\right)^2+\frac{\|u\|^2\|v\|^2-\left(\langle u,v\rangle\right)^2}{\|u\|^2}$$

$\min_{t\in\mathbb{R}}\Theta(t)=\Theta(t_0)=\frac{\|u\|^2\|v\|^2-\left(\langle u,v\rangle\right)^2}{\|u\|^2}$　ただし $t_0=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$

特に,$\|u\|^2\|v\|^2-\left(\langle u,v\rangle\right)^2>0$

次の問題を解くと、意味が一層よく分かるでしょう。

◆　t_0u-vは直線ϕに直交する事を示せ

◆今述べた幾何から　u,vを辺とする平行四辺形の面積が$\sqrt{\|u\|^2\|v\|^2-(\langle u,v\rangle)^2}$である事を導け。

◆　正射影によりSchwartzの不等式を導け。

Schwarz　の方法は与えられた元（ベクトル）の部分空間のみで考える内在的議論である点が普遍的で強力なのです。それに対して Lagrange 恒等式を用いる方法は、あらかじめ与えられた全空間の直交系で展開しています。これは特定の座標に依存した方法です。最も具体的な計算は、この方が便利なことが多い。実際、曲線や曲面上の面素の具体的な基礎公式は面素の平方を表す Gram 行列式の Cauchy-Lagrange 展開で与えられています。

落合氏は（３）で恐らく上に述べた$(\mathbb{R}^2\langle\ \rangle_\theta)$を考えられたと思うのだが、正確な記述になっていなかった。氏は Herron の公式を天下りに使われた。むしろ氏は$(\mathbb{R}^2\langle\ \rangle_\theta)$で、Herron の公式が成立する事を証明したことになります。もしかすると氏は、私どもの大先輩なので、一般の計量幾何学をよく御存知であるのかもしれません。私達の年代から、大学の数学は「現代化」されたので、常識の範囲に食い違いが生じているかもしれません。

■　**最後に**

感想、お便りありがとうございました。解答の原稿時間に終われて四苦八苦してしまいましたが。問題を通じて、投稿された皆さんとの対話を楽しむことが出来ました。恐らく基礎的な問いだったので、この欄で活躍される猛者たちは却って戸惑われたのではないかと思います。また問いを Lagrange 恒等式の一般化に制限してスッキリすべきだったと反省しています。そのために題意が不明確になって、もっとエレガントな解答を見るチャンスを失ったかもしれないとおもっています。