

Math.

NO.101
www.sugakukobo.com

会報2009年12月



数学工房



年末年始のご挨拶



年末と年始を兼ねて一言ご挨拶を。

早いもので、ついこの間、秋学期のアナウンスをしたと思っておりましたら、もう冬の集中セミナーや2010年度春学期講座を計画する時期にきています。予定を立てるときが一番大変です。生来の怠け者のせい、ああでもないこうでもないとなかなかまとまらず、いつもあたふたしています。一旦始めますと、今度はブレーキがかからなくて困るのですが。

◆◆ 大きな地図を描く



さて、会員の皆さんが数学工房で学ばれる目的は様々であろうと思いますが、最低限、数学語としての集合論、歴史的視点も含めた解析学の考え方、初等線形代数と多変数の微積分のアイデア、抽象線型代数、一般位相は、是非とも身につけていただければと思います。これらの項目は、簡単とは申しませんが、現代の数学といえるほどのものに近づくためには、どうしても通らねばならない関門です。その次の段階では、その基本を活かして、学び知ったことの相互関係や事柄の意味を考え直しながら、大きな地図を描くように心がけるとよいと思います。だんだんご自身の数学の世界が豊かなものになってくるでしょう。そこまで行きますと、微積分や線型代数においても、全く違う様相が見えてくるはずです。この段階で始めて、必修教程の本当の意味が分かると思います。たぶん、知識のなさに気づき、真に知ることの喜びを感じられるのではないのでしょうか。純粋な学び、理解の喜びという意味では、現役で数学を専攻している学生より皆さんの方が、はるかに幸福な立場にいらっしゃると思います。是非とも生涯の喜びの種をしっかりと身につけ、より高い境地を目指してください。十全とはいきませんが、入門から中級まで、そのような基本理念に沿って会員の皆さんの手助けになるような講座を提供するつもりです。

◆◆◆ 私自身の計画

今年から来年にかけての私自身の計画をご紹介します。知識の整理もかねながら、今までの入門解析教程、初等線形代数と微積分の上に、解析学アドバンスコースの教程をまとめたいと思います。内容は、積分論や関数解析の入門編を含み、超関数論的な解析学、偏微分方程式の基礎理論にいたるようなものを考えています。楽しみにしてください。それでは、またセミナーや研究会でお目にかかりましょう。

桑野耕一 2009年暮れ



冬期集中セミナー・ガイダンス案内

2009年12月～2010年1月



(1) 微積分の考え方 I

レベル入門

[日時]

2009年12月13日(日) 11:00 - 17:00

[内容]

解析学の基本理念は近似です。近似計算そのものの起源は古いものです。面積や体積を求めるというような実用と結びついて、古代から行われてきました。それが17世紀に極限に結びついたとき、無限解析と呼

ばれる現在の微積分・代数の直接の先祖が誕生しました。このような立場からIでは、補間法、初等超越関数の発見、微分法を扱います。IIでは、積分の代数化、剰余評価が一般論として確立されていく様子を見ます。

0. イントロダクション

Newtonの多項式補間と差分近似

1. 古典的解析関数

2. 局所近似としての微分法



(2) 微積分の考え方Ⅱ レベル入門
[日時]

2010年1月9日(土) 11:00 - 17:00

[内容]

0. 微積分の基本定理 積分の代数化
1. 剰余評価の考え方
2. 剰余付き Taylor 公式



(3) Hilbert 空間上の作用素のスペクトル分解
レベル初・中級

[日時]

2009年12月19日(土) 14:00 - 18:00

2009年12月20日(日) 11:00 - 16:00

[内容]

線型代数で学んだように、正射影の1の分解は、全空間を互いに直交する部分空間の和に分解します。また対称変換は、射影作用素によりスペクトル分解されます。

今回のテーマは、その無限次元バージョンです。無限次元では、連続する添え字をパラメータとする正射影族や、連続的な固有値を取り扱うことになります。有限次元線型代数における結果と無限次元の結果をどのように統合するのでしょうか。構造をよく見るとスペクトル分解は Stieltjes 積分に見えてくるでしょう。このようにして、有限次元代数の方法を自然に拡張しようとするれば、作用素の空間における解析学の研究が必然的になってくるということが分かります。

0. 準備

1. 対称作用素、自己共役作用素
2. 単位分解
3. 正の定符号列と Stieltjes 測度
4. Unitary 作用素のスペクトル分解
5. スペクトル分解定理

固有値問題、作用素値関数に続きます。



(4) Multi-linear Algebras
テンソル代数、外積代数 レベル 初・中級

[日時]

2010年1月16日(土) 14:00 - 18:00

2010年1月17日(日) 11:00 - 16:00

[内容]

多変数の微積分を構造的に理解しようとするとき、テンソル表示はきわめて有用です。取り分け多様体上の解析学を展開する場になるのは、接空間の上に構成されるタンジェント束とその上のテンソル場です。この集中では、多重線型代数として、線型代数的な部分のみに焦点をあわせます。純粋な予備知識としては、抽象線型代数のみで事足ります。多様体上の解析学の準備として、あるいは線型代数と多変数の微積分の理解を深めたい方に最適です。

0. インTRODクシヨン

1. 多重線型写像の空間
2. 対称共変テンソル、交代共変テンソル
3. 交代共変テンソルの外積代数

(5) 確率統計の数学的基礎
期待値と確率測度の積分 レベル入門

[日時]

2009年12月26日(土) 14:00 - 18:00

2009年12月27日(日) 11:00 - 16:00

[内容]

確率変数の期待値が存在するとして、確率測度の積分を近似することを考えますと、必然的に Lebesgue の近似和のアイデアがあらわれます。しかもその結果



を分布関数の言葉で読み直しますと、数直線あるいは n 次元 Euclid 空間上の Riemann-Stieltjes 積分があらわれます。結果として確率測度の積分の存在が確立できるのです。この考え方は参考書や教科書にはありません。詳細な数学的解析を研究するのならともかく、やたらに Lebesgue 積分の結果を引用するのは賢明とは思えません。ただし、応用で使いこなすには、積分論の確率論研究での必然性を理解し、構造を理解することは必要です。

0. 準備

1. 確率測度の積分と Stieltjes 測度の積分
2. 期待値と特性量
3. 母函数、特性関数

確率変数列の種々の収束概念、大数の弱法則・強法則に続きます。

(6) 可換代数演習
多項式環、形式冪級数環のイデアルの構造
レベル 初・中級

[日時]

2010年1月24日(日) 11:00 - 17:00

[内容]

Atiyah-Macdonald Introduction to Commutative Algebra 第2章練習問題1-5を中心に解説と演習を行います。前回は、可換環を素イデアルの空間上の関数環と見るという現代的な双対原理をテーマにしました。

今回は、基礎的な問題に戻って、可換代数の理論の最も基本的な対象である多項式環と形式冪級数環のイデアルを演習の形で取り上げます。可換環 A を係数とする多項式環は、構造上十分に一般的な性格をもち、第1章で扱ったイデアルの一般論の理解が容易になるでしょう。



(7) 函数解析学演習
超関数の諸公式の導出 レベル 初・中級

[日時]

2010年3月21日(日) 11:00 - 17:00

[内容]

応用の世界では多くの特別な超関数があり、その間の関係を示す多くの公式があります。これらの諸公式はどのように導出するのでしょうか。結局は超関数の概念の正しい理解と、公式で問題にされている量の理解、そして微積分の基本的な計算能力です。多様な式の織り成す曼荼羅を楽しみつつ、超関数概念の理解を深めましょう。冬期の集中セミナーとしてはきわめて変則ですが3月の集中です。会員の強いご希望もあり1日集中のオプションセミナーです。

(8) 数学工房ガイダンス・懇親会

[日時]

2010年1月10日(日) 13:30 - 15:00(全体の説明)
15:00 - 16:00(個別の相談)

[内容]

数学工房の考え方、講座の概要のガイダンスです。講座の取り方等の個別の相談も承ります。筆記用具をご持参下さい。新入会の方もご自由にご参加下さい。(ガイダンス参加費：無料)

ガイダンスの後に、懇親会が予定されています。今回は、ご自身の一番好きな定理、あるいは好きな数学者、このような数学をやりたいなど、通常の自己紹介に加えて、数学的自我介绍を肴に楽しみたい。題して「数学の初夢」。奮ってご参加ください。幹事は

会員の増田卓さんが引き受けてくださいました。お早めにお申し込みを。
[懇親会開始時間] ガイダンス終了後 16:30 開始
[懇親会会場] トラットリアイタリア(文京グリーンコート1F) 数学工房から徒歩約5分
[予算] 5000 円

[備考] 集中セミナー参加費
 2 日のセミナー：
 会員 16000 円(学生 12000 円)
 1 日のセミナー：
 会員 10000 円(学生 8000 円)



春 学 期 講 座 案 内

2010 年春学期講座は、入門 4 講座、初級 2 講座、中級 2 講座、フリー 1 講座の開講が決定しています。諸般の事情により変更になる場合もあります。また 5 人未満の場合は休講になる場合もありますので、あらかじめご了承ください。その場合は、事務手数料無しで振り替えあるいは払い戻しの処置を致します。

<< 春学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.B	Fourier 解析序説Ⅲ(函数空間と Fourier 解析)	1 月 23 日	入門
I.C	位相群(表原論を目指して)	1 月 22 日	入門
I.D	初等線型代数と微積分Ⅲ(領域の積分、多変数の高階導関数、Taylor 公式)	1 月 31 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	1 月 30 日	入門
E.A	位相と解析学序論(コンパクト空間からのトピックス、Baire Category 定理)	1 月 31 日	初級
G.	Hilbert 空間上の作用素	不定期	初級
M.A	Schwarz 超函数の基礎理論(テンソル積、接合積、パラメータの入った超函数)	2 月 7 日	中級
M.B	解析のための多様体入門Ⅲ(テンソル場、微分形式)	1 月 30 日	中級
I.S	位相解析入門との対話(加藤敏夫著、位相解析入門を読む。第 2 章内積と Hilbert 空間)	1 月 20 日	フリー

※I.G' 現代数学入門 複素数平面を通しての現代数学入門(存在と表現) 開講を検討中



<< 春学期講座カレンダー >>

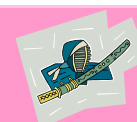
月	日	曜日	略号	時間
1	20	水	I.S(1)	19:00~21:00
	22	金	I.C(1)	19:00~21:00
	23	土	I.B(1)	14:00~16:00
	30	土	M.B(1) I.F(1)	14:00~16:00 17:00~19:00
	31	日	I.D(1) E.A(1)	11:00~13:00 14:00~16:00

月	日	曜日	略号	時間
2	3	水	I.S(2)	19:00～21:00
	5	金	I.C(2)	19:00～21:00
	6	土	I.B(2)	14:00～16:00
	7	日	M.A(1)	14:00～17:00
	13	土	M.B(2) I.F(2)	14:00～16:00 17:00～19:00
	14	日	I.D(2) E.A(2)	11:00～13:00 14:00～16:00
	17	水	I.S(3)	19:00～21:00
	19	金	I.C(3)	19:00～21:00
	20	土	I.B(3)	14:00～16:00
	21	日	M.A(2)	14:00～17:00
	27	土	M.B(3) I.F(3)	14:00～16:00 17:00～19:00
	28	日	I.D(3) E.A(3)	11:00～13:00 14:00～16:00
3	3	水	I.S(4)	19:00～21:00
	5	金	I.C(4)	19:00～21:00
	6	土	I.B(4)	14:00～16:00
	7	日	M.A(3)	14:00～17:00
	13	土	M.B(4) I.F(4)	14:00～16:00 17:00～19:00
	14	日	I.D(4) E.A(4)	11:00～13:00 14:00～16:00
	19	金	I.C(5)	19:00～21:00
	20	土	I.B(5)	14:00～16:00
	24	水	I.S(5)	19:00～21:00
	27	土	M.B(5) I.F(5)	14:00～16:00 17:00～19:00
	28	日	I.D(5) E.A(5)	11:00～13:00 14:00～16:00
	4	3	土	I.B(6)
4		日	M.A(4)	14:00～17:00
7		水	I.S(6)	19:00～21:00
10		土	M.B(6) I.F(6)	14:00～16:00 17:00～19:00
11		日	I.D(6) E.A(6)	11:00～13:00 14:00～16:00

入 門 桑 野 道 場 (第 1 2 回)



/// 記 桑野道場師範代 半田伊久太 ///



今回は問題 1. について、広島県の熊野さん、埼玉県在住の匿名希望さん、福島県の鈴木さん、また問題 2. について広島県の熊野さん、福島県の鈴木さんから解答を頂きました。3 人と私(半田)の解答を紹介します。

[前回の問題] 以下のことを示せ。

1. l, m, n を整数, $lmn \neq 0$ とする. このとき, $l + m + n = 0 \Rightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$.
2. a, b, c を相異なる整数とする. このとき, $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$ を満たす整数係数多項式 $P(x)$ は

存在しない。

【解答】

1. (a) 私 (半田) の解答

$R := \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ とおく. $l + m + n = 0$ より l, m, n は同符号ではない. 即ち $l > 0, m > 0, n < 0$ または $l < 0, m < 0, n > 0$ の場合を考えれば十分である.

i. $l > 0, m > 0, n < 0$ のとき

$$R = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{l+m} = \frac{l^2 + m^2 + lm}{lm(l+m)} > 0 \quad (*).$$

- $l = 1$ のとき $R = 1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = 1 + \frac{1}{m(m+1)}$
 $m \geq 1$ より $1 < R < 2$, 従って $R \notin \mathbb{Z}$.

- $m = 1$ のとき同様にして $R \notin \mathbb{Z}$.

- $l \geq 2$ かつ $m \geq 2$ のとき $R = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{l+m} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{l+m} = 1 - \frac{1}{l+m} < 1$.

(*) と合わせて $0 < R < 1$. 即ち $R \notin \mathbb{Z}$.

ii. $l < 0, m < 0, n > 0$ のとき

$l' = -l, m' = -m, n' = -n$ とおくと $l' > 0, m' > 0, n' < 0$ かつ $l' + m' + n' = -(l + m + n) = 0$ かつ $l'm'n' = -lmn \neq 0$. 従って i. より $\frac{1}{l'} + \frac{1}{m'} + \frac{1}{n'} = -R \notin \mathbb{Z}$. 即ち $R \notin \mathbb{Z}$.

(b) 熊野さんの解答

熊野さんからは 2 つの解答をもらってますが, 熊野さんがよりエレガントと言っている解答のみ紹介します.

$R := \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ とおくと $lm + mn + nl = Rlmn$ である. $R \neq 0$ に注意する. 実際, $R = \frac{lm + mn + nl}{lmn} = \frac{(l + m + n)^2 - (l^2 + m^2 + n^2)}{2lmn} = -\frac{l^2 + m^2 + n^2}{2lmn}$ となり $R \neq 0$. ここで $l + m + n = 0, lmn \neq 0$ を使った.

3 次式 $f(x) := (x - l)(x - m)(x - n)$ を考える. $f(x) = x^3 - (l + m + n)x^2 + (lm + mn + nl)x - lmn = x^3 + lmn(Rx - 1)$. ここで $l + m + n = 0, lm + mn + ml = Rlmn$ を使った. $f(\frac{1}{R}) = (\frac{1}{R} - l)(\frac{1}{R} - m)(\frac{1}{R} - n) = \frac{1}{R^3}$. よって $(1 - Rl)(1 - Rm)(1 - Rn) = 1$. したがってもし R が整数ならば $1 - Rl, 1 - Rm, 1 - Rn$ のうちの少なくともひとつは 1. たとえば $1 - Rl = 1$ ならば $R \neq 0$ より $l = 0$. これは仮定に反する.

(c) 匿名希望さんの解答

$R := \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ とおくと $n = -(l + m)$ から $R = \frac{l^2 + m^2 + lm}{lm(l+m)}$. ここで R の分母が常に偶数になることは容易に分かる. したがって R が整数とすると分子も偶数. このことから l, m はともに偶数である (これも容易にわかる). よって $l = 2^{l_1}L, m = 2^{m_1}M$ とかける. ここで $l_1, m_1 \geq 1, L, M$ は 2 を因数として含まない整数. $l_1 \leq m_1$ としても一般性を失わない. $R = \frac{2^{2l_1}L^2 + 2^{2m_1}M^2 + 2^{l_1+m_1}LM}{2^{l_1+m_1}LM(2^{l_1}L + 2^{m_1}M)} = \frac{L^2 + 2^{2(m_1-l_1)}M^2 + 2^{m_1-l_1}LM}{2^{m_1}LM(L + 2^{m_1-l_1}M)}$. ここで分子は奇数, 分母は偶数. これは R が整数であることに反する.

(d) 鈴木さんの解答

$R := \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ とおいて R が整数だと仮定する.

まず l, m, n について互いに素の場合を考える.

$l + m + n = 0$ より $m + n = -l$. したがって $R = \frac{1}{l} - \frac{l}{mn} = \frac{mn - l^2}{lmn}$.

よって $lmnR = mn - l^2$. したがって $mn = l(mnR + l)$. すなわち mn は l で割り切れる. l, m, n は互いに素より $l = \pm 1$. $l = 1$ のとき $R = \frac{1}{l} - \frac{1}{mn}$ は整数ゆえ $-\frac{1}{mn}$ も整数. したがって $m = \pm 1, n = \pm 1$. 即ち l, m, n は全て奇数. よって $l + m + n$ は奇数. これは $l + m + n = 0$ に反する. $l = -1$ のときも同様. よって $R := \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ は整数でない.

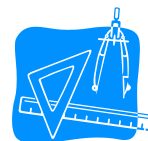
次に l, m, n が必ずしも互いに素ではない場合を考える.

l, m, n の最大公約数を B とする. 整数 l_0, m_0, n_0 が存在して $l = Bl_0, m = Bm_0, n = Bn_0$ と



かける. $l + m + n = 0$ より $l_0 + m_0 + n_0 = 0$ かつ l_0, m_0, n_0 は互いに素だから上の証明より $\frac{1}{l_0} + \frac{1}{m_0} + \frac{1}{n_0}$ は整数でない. $R := \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{m_0} + \frac{1}{n_0} \right)$ が整数であるとする $\frac{1}{l_0} + \frac{1}{m_0} + \frac{1}{n_0} = BR$ は整数となり矛盾する.

2. (a) 私 (半田) の解答



条件を満たす多項式 $P(x)$ が存在したとする. $P(x)$ は高々 2 次以下としてよい.

実際, $\deg(P(x)) \geq 3$ とする. $P(x)$ を $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割ると

$\exists r(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ s.t. $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)q(x) + r(x)$, $\deg(r(x)) < 3$.

ここで $P(a) = r(a) = b$, $P(b) = r(b) = c$, $P(c) = r(c) = a$ である. 従って $P(x)$ の代わりに $r(x)$ を選べばよい.

$P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ で $P(x)$ は高々 2 次以下なので Lagrange の補間法から

$$P(x) = \frac{b(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{c(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{a(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$P(x)$ の 2 次の係数を γ とすると $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{b}{(a-b)(a-c)} + \frac{c}{(b-c)(b-a)} + \frac{a}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{-b(b-c) - c(c-a) - a(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{a(b-c) - b(b-c) + b(c-a) - c(c-a) + c(a-b) - a(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \end{aligned}$$



$l := a-b, m := b-c, n := c-a$ とおくと $l, m, n \in \mathbb{Z}$ かつ $lmn \neq 0$ かつ $l + m + n = 0$.

従って, 1. より $\gamma = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$.

よって $P(x) \notin \mathbb{Z}[x]$. 即ち条件を満たす整数係数多項式 $P(x)$ は存在しない.



(b) 熊野さんの (知人の) 解答

熊野さんからは 2 つの解答をもらってますが, 熊野さんの知人の方がやった方法のみ紹介します.

条件を満たす多項式 $P(x)$ が存在したとする. 多項式 $P(x) - P(a)$, $P(x) - P(b)$, $P(x) - P(c)$ はそれぞれ $x-a$, $x-b$, $x-c$ で割り切れるので $\exists Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{Z}$ s.t. $P(x) - P(a) = Q_1(x-a)$, $P(x) - P(b) = Q_2(x-b)$, $P(x) - P(c) = Q_3(x-c)$. 仮定から $c-b = Q_1(b-a)$, $a-c = Q_2(c-b)$, $b-a = Q_3(a-c)$. 辺々掛け合わせて a, b, c が相異なることに注意すると $Q_1 Q_2 Q_3 = 1$ を得る. したがって $|a-b| = |b-c| = |c-a|$. このことから $a = b = c$ は容易にわかる. 矛盾!

(c) 鈴木さんの解答

条件を満たす多項式 $P(x)$ が存在したとする. $n := \deg P(x)$ とおく. グラフを考えると $n \geq 2$ でなくてはならない. $n = 2$ の場合を考える. $P(x) = t_0 x^2 + t_1 x + t_2$ とおく. ここで $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ より $t_0 a^2 + t_1 a + t_2 = b$, $t_0 b^2 + t_1 b + t_2 = c$, $t_0 c^2 + t_1 c + t_2 = a$. 最初の式 - 2 番目の式, 2 番目の式 - 最後の式をすることにより $t_0(a^2 - b^2) + t_1(a-b) = b-c$, $t_0(b^2 - c^2) + t_1(b-c) = c-a$. これから $t_0(a+b) + t_1 = (b-c)/(a-b)$, $t_0(b+c) + t_1 = (c-a)/(b-c)$. 左の式 - 右の式をすることにより $t_0(a-c) = (b-c)/(a-b) - (c-a)/(b-c)$. したがって $t_0 = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a+a-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$. $l := a-b, m := b-c, n := c-a$ とおくと $l, m, n \in \mathbb{Z}$ かつ $lmn \neq 0$ かつ $l + m + n = 0$. 1. より t_0 は整数ではない. したがって $n = 2$ のときは証明された.

$n \geq 3$ のときも同様。(鈴木さんは一般の n に対しての証明もされましたが省略させていただきます。)



【解説】

1. 熊野さんの解答は対称性を使ったエレガントなものです。私も似たような解法を考えていたのですができませんでした。熊野さんの3次式を3次関数と見てその関数を調べてみたのですが・・・熊野さんはその関数の特殊値をうまく使って解かれています。

匿名希望さんの解答は与式を分子と分母に分けて観察し分子と分母の偶奇が違うことをうまく示しています。鈴木さんも巧みに式を変形してうまく矛盾を導いています。

私はうまい方法が見つからなかったもので、与式の値をパソコンでいくつか計算させて観測してみました。すると(解答の記号を使うと) $0 < |R| < 1$ または $1 < |R| < 2$ であることが予想できたので、その方針でやってみたものです。

2. 前回述べたようにこの問題は数学オリンピックで出題されたものです。もし条件を満たす多項式があったとすると問題1.を使い2次の係数が整数になりえないことを示しました。実はこの問題を解くときに問題1.を思いついたのです。鈴木さんも同様の方針で解かれています。また熊野さんの知人の方は対称性を使ったあまりにも見事な解答です。感動しました。こんな短く簡潔な証明があるとは思いませんでした。

※ 熊野さんから別解を何通りかいただいておりますが、全部紹介できませんでした。また鈴木さんからの解答も一部省略したり書き換えたりしております。そこでお二人の解答をオリジナルのまま数学工場のHPの「会員の広場」に掲載しますので参照して下さい。

【今回の問題】

以下のことを示せ。



K をコンパクト空間、 f_n, f は K 上の実数値連続関数 ($n \in \mathbb{N}$) とする。さらに関数列 $(f_n)_n$ は単調(即ち単調増加かまたは単調減少)で、 K 上 f に各点収束する(即ち $\forall x \in K$ に対して $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)$) とする。このとき関数列 $(f_n)_n$ は K 上一様収束する。即ち $\|f_n - f\|_K \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。ただし、 K 上の実数値 g に対して $\|g\|_K := \sup\{|g(x)|; x \in K\}$ のこととする。

【問題について一言】

桑野先生からの出題です。今回の問題は「ディニの定理」として有名です。一般にコンパクト空間で成り立ちますが、特別な場合である「 K がコンパクト距離空間」あるいは「 K が有界閉区間」でやってもかまいませんので解答をお寄せください。

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2010年2月28日(日)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします。)



数学工房 2009年12月1日発行
発行人 桑野耕一
編集人 編集Gr.
(平田裕一・増田卓・坂口尚文)



連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：080-6576-2691
連絡は極力eメールをご利用下さい。
e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail: monteverdi2007@ezweb.ne.jp(携帯、緊急用)
ホームページ：
<http://www.sugakukobo.com>
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401