Math.
NO.102
www.sugakukobo.com

会報２０１０年４月

数学工房

新年度のスタート！

みなさまいかがお過ごしでしょうか。いよいよ新年度を迎え、今年度はどの講座を取ろうか、など会員の皆さんはあれこれ思案をめぐらせていることと思います。

さて、近年の閉塞した状況を打破するためにはイノベーションが必要と言われていますが、Google や Microsoft のような発明でイノベーションを起こしてきた企業を見ると、発明の根底の部分では数学的な基礎付けが不可欠だったように思えます。そこで我々も世の中にイノベーションを起こすつもりで数学に取り組んではいかがでしょうか。きっと取り組み姿勢や理解の度合いが変わってくるのではないでしょうか。何はともあれ、今年度も数学の勉強に励んでいきましょう。

(会報編集委員　増田)

集　中　講　座　案　内

2010年5月

◆Zorn の補題とフィルター

[日時]

2010 年 5 月 1 日(土)　　14:00－18:00
2010 年 5 月 2 日(日)　　11:00－16:00

[内容]

（1）イントロダクション　Cauchy の関数等式
（2）Zorn の補題
（3）無限次元線型空間
（4）フィルター
　1）基本的な性質
　2）フィルターとコンパクトの特徴付け
　3）Tikonov の定理

◆古典解析の真珠

[日時]

2010 年 5 月 4 日(火)　　14:00－18:00
2010 年 5 月 5 日(水)　　11:00－16:00

[内容]

（1）イントロダクション
　関-Bernoulli の冪和の探究
（2）Bernoulli 多項式
（3）Euler の三角級数展開
　1）Euler の公式
　2）ある三角級数
　3）Bernoulli 多項式との関係
　4）Zeta の特殊値
（4）Euler の和公式と Poisson の和公式

[料金]

集中講座の料金は以下のようになっています。

1 日セミナー　　料金¥10,000(学生¥8,000)
2 日セミナー　　料金¥16,000(学生¥12,000)

◆ガイダンス

[日時]

2010 年 4 月 29 日(木)　　13:00－14:00

[場所]

数学工房教室

[費用]

無料

◆‘10 年春の懇親会のお知らせ

おつまみお飲み物付きで懇親会を下記の日程で開催します。当日は研究会や、会の運営に参加されている会員にお話しをしてもらいます。それから、中央大学の諏訪先生が、北イタリアのパドヴァ大学でのサバテカルから１年ぶりにお帰りになりましたので、パドヴァでのお話を中心に北イタリア数学事情などをうかがいたいと思います。普段知り合うことの少ない会員の交流が目的です。奮ってご参加ください。なお教室の収容力の問題がありますので、参加ご希望の方は早めにお申し込みください。

[日時]

2010 年 4 月 29 日(木)　　14:30－17:30

[場所]

数学工房教室

[会費]

¥1, 500

[申し込み先]

sugakukobo@w5.dion.ne.jp

夏 学 期 講 座 案 内

2010年5月～8月

2010 年夏学期講座は、入門 6 講座、初級 2 講座、中級 2 講座を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	入門解析教程	5 月 21 日	入門
I.B	Fourier 解析	5 月 8 日	入門
I.C	休講		
I.D	初等線型代数と微積分	5 月 16 日	入門
I.E	Hilbert 空間への招待	5 月 14 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	5 月 15 日	入門
I.S	位相解析との対話	5 月 19 日	入門
E.A	位相と解析序説	5 月 9 日	初級
G.	抽象線型代数	5 月 16 日	初級
M.A	Schwartz 超関数	5 月 16 日	中級
M.B	多様体上の解析学	5 月 15 日	中級

◆I.A　入門解析教程
（1）イントロダクション
（2）解析関数
（3）微分法と微積分の基本定理

◆I.B　Fourier 解析
（1）Fourier 解析の L^2 理論
（2）$L^1(R)$上の Fourier 変換
（3）Fourier-Stieltjes 変換
（4）多次元空間における Fourier 変換
（5）トピックス

◆I.C　秋学期より開講いたします。

◆I.D　初等線形代数と微積分
（1）イントロダクション
（2）数ベクトル
（3）内積とノルム
（4）直行性
（5）多次元の基本図形
（6）線型写像と行列算法
（7）微分の概念 I

◆I.E　Hilbert 空間への招待
（1）内積空間
（2）距離空間と位相から
（3）Hilbert 空間の幾何学
（4）Hilbert 空間の典型例
（5）トピックス

◆I.F　数学の基本語彙と文法
（1）Σの用法と数学的帰納法
（2）集合の代数
（3）写像
（4）トピックス

◆IS　位相解析入門との対話
第 3 章　Lebesgue 積分

◆G　抽象線型代数
（1）線型空間、部分空間
（2）従属、独立、基底、次元
（3）基本的な線型空間

◆EA　位相と解析序説

◆MA　Schwartz 超関数、超関数の Fourier 変換
（1）緩増加超関数
　1）急減少関数の空間
　2）緩増加超関数
　3）1 点を台とする超関数の構造
　4）緩増加超関数の直積と畳み込み
（2）Fourier 変換
　1）急減少関数の Fourier 変換
　2）緩増加超関数の Fourier 変換
　3）諸性質
　4）Fourier 変換と畳み込み
　5）演習

◆MB　ベクトル場に働く基本的な作用素
（1）共変テンソル場の変換
（2）微分形式に働く種々の作用素
（3）多様体上のコホモロジー
（4）多様体の向き付け

［料金］
各講座とも 1 講座￥30, 000（税込）、学生￥21, 000（税込）。途中参加の場合、参加回数×￥5, 000＋￥2, 000（テキスト代・手数料）です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします。

会 員 か ら の メ ッ セ ー ジ

このコーナーでは数学工房で学習されているみなさんからのメッセージを掲載していきます。会員のみなさんには数学工房での講座の感想や自分の数学に対する思いなど、自由に書いていただきます。今回は鈴木桜子さんからのメッセージです。

■数学工房や数学との関わりについて(鈴木桜子)

初めまして。2009 年 12 月に会員に復帰しました鈴木桜子と申します。皆さんよろしくお願い致します。ここでは、数学工房や数学との関わりについてお話ししたいと思います。

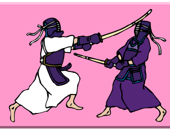
私が数学工房と出会ったのは、12 年前でした。当時は予備校で数学の講師をしていましたが、化学出身であった私は大学できちんと数学を勉強しなかったということもあって、専門的な数学への憧れが強く、独学で数学書を読んだりしていました。大学程度の数学（解析、代数、確率統計の基礎）を学ぶために、某大学の主催する通信教育も始め、レポート作成や試験を受けて単位をとったりと試行錯誤をしていました。しかし、我流では砂漠を歩き回っているような感覚で限界を感じ、学びの道しるべを探していたところ、数学工房の存在を知って入会しました。

その頃は上の子がまだ 2 歳で手がかかる上に仕事も大変忙しく、なかなか腰を据えて数学と向き合う時間を作ることは出来ませんでした。しかし数学工房で学んだ数学（微積分や位相の初歩）は、専門外の私にとって良い意味でカルチャーショックであり、非常に難しかったけれども不思議と満足感がありました。数学工房で「自分の手と頭を使って数学をする楽しさ」を知ってしまった私は、数学にどっぷり浸かって基礎から勉強したいと思うようになりました。それで、下の子の出産を機に仕事を減らし、思いきって数学科に編入しました。

いざ大学で数学を学んでみると、情けないことに、理解したことよりも理解できないことが遥かに増えてしまいました。そんなわけで、もっと勉強が必要だと思い、勢いで修士課程、博士課程まで進学してしまいましたが、相変わらず分からないことだらけです。「これだけ長い間勉強したのに？！」と言われそうですが・・・。大学院では、確率論の極限定理について研究しましたが、このテーマを選んだきっかけは、高校生向けの参考書の付録に、中心極限定理と大数の法則に関する初等的な説明があって、その部分が非常に面白く感じてずっと気になっていたからだと思います。

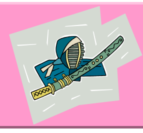
大学に通っていた約 8 年間は、仕事と大学と家庭で手いっぱいで数学工房から足が遠のいていましたが、大学での勉強に区切りがつき、非常勤講師として大学数学教育に関わるようになったのを機に、会員復帰することにいたしました。現在、数学工房では、I.F（数学の基本語彙と文法）I.S（位相解析を読む）を受講していますが、新たな発見や学ぶことが沢山あり、毎回の講義を非常に楽しみにしています。私にとって数学を学ぶと言うことは、生涯追い求めていく修行なのかも知れません。そして数学工房は、数学を共通の目的とした人達が切磋琢磨し合う道場のような存在だと思っています。このような貴重な場を大切にし、脳味噌が動く限り数学と関わりながら歩んでいこうと思っています。

写真 1　鈴木桜子さん



入門桑野道場（第１３回）

/// 記　桑野道場師範代　半田生久太///



お詫び

前号の熊野さん(の知人)の解答のところで間違いがありました。以下のように訂正します。申し訳ありませんでした。なお、HP にある熊野さんの元の解答は正しい解答です。

(誤)

条件を満たす多項式 $P(x)$ が存在したとする。多項式 $P(x)-P(a), P(x)-P(b), P(x)-P(c)$ はそれぞれ $x-a, x-b, x-c$ で割り切れるので、

$$\exists Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{Z} \text{ s.t.} P(x)-P(a)=Q_1(x-a), P(x)-P(b)=Q_2(x-b), P(x)-P(c)=Q_3(x-c)$$

仮定から $c-b=Q_1(b-a), a-c=Q_2(c-b), b-a=Q_3(a-c)$ となる。辺々掛け合わせて、$|a-b|=|b-c|=|c-a|$ となる。このことから $a=b=c$ は容易にわかる。矛盾！

(正)

条件を満たす多項式 $P(x)$ が存在したとする。多項式 $P(x)-P(a), P(x)-P(b), P(x)-P(c)$ はそれぞれ $x-a, x-b, x-c$ で割り切れるので、

$$\exists Q_1(x),Q_2(x),Q_3(x)\in\mathbb{Z}[x] \text{ s.t.} P(x)-P(a)=Q_1(x)(x-a), P(x)-P(b)=Q_2(x)(x-b), P(x)-P(c)=Q_3(x)(x-c)$$

仮定から $c-b=Q_1(b)(b-a), a-c=Q_2(c)(c-b), b-a=Q_3(a)(a-c)$ となる。

あらためて $Q_1:=Q_1(b), Q_2:=Q_2(c), Q_3:=Q_3(a)$ とおくと $Q_1,Q_2,Q_3\in\mathbb{Z}$ であり、辺々掛け合わせて a,b,c が相異なることに注意すると $Q_1Q_2Q_3=1$ を得る。したがって、$|a-b|=|b-c|=|c-a|$ となる。このことから $a=b=c$ は容易にわかる。矛盾！

前回の問題

$(K,\mathcal{O})$ をコンパクト空間、f_n, f は K 上の実数値連続関数 $(n\in\mathbb{N})$ とする。さらに関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調（単調増加または単調減少）で、K 上 f に各点収束する。すなわち、任意の点 $x\in K$ に対して $f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$ となる。このとき関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上一様収束する。すなわち、$\|f_n-f\|_K\to 0\ (n\to\infty)$ となる。ただし、K 上の実数値関数 g に対して $\|g\|_K:=\sup\{|g(x)|; x\in K\}$ とする。K はコンパクト距離空間、あるいは有界閉区間としてかまわない。

前号の訂正：（誤）実数値 g に対して（正）実数値関数 g に対して

今回は解答者の常連である福島県の鈴木さんより解答をいただきました。修正・加筆して掲載します。そのほかに桑野先生の解答及び私（半田：特別な場合）の解答を掲載します。

桑野先生の解答

$g_n:=|f_n-f|\,(n\in\mathbb{N})$ とおくと、関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は以下の条件を満たす。

1. $g_n\ge 0\ (\forall n\in\mathbb{N})$
2. $g_n\in C(K)\ (\forall n\in\mathbb{N})$、すなわち関数 g_n は K 上連続($\forall n\in\mathbb{N}$)
3. 関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少
4. 関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上 0 に各点収束、すなわち任意の点 $x\in K$ に対して $g_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$

このとき関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が K 上 0 に一様収束することを示せばよい。

任意の $\varepsilon>0$ が与えられているものとする。このとき、任意の自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$U_n:=\{x\in K\mid g_n<\varepsilon\}$ とおくと、K の部分集合列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は以下の条件を満たす。

1. 各 $U_n(n\in\mathbb{N})$ は K の開集合
2. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は増大列、即ち $U_1\subset U_2\subset\cdots U_n\subset\cdots$
3. $K=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$

実際、

1. $(-\varepsilon,\varepsilon)$ は $\mathbb{R}$ の開集合で g_n の連続性より、$U_n=\{x\in K\mid g_n<\varepsilon\}=\{x\in K\mid -\varepsilon<g_n<\varepsilon\}=g_n^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ は K の開集合である。
2. 関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性より明らか。
3. 任意の点 $x\in K$ を定める。仮定からある自然数 $n_0\in\mathbb{N}$ が存在し、$g_{n_0}(x)<\varepsilon$ となる。よって、$x\in U_{n_0}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$ となる。したがって、$K\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$、すなわち、$K=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$ が成り立つ。

以上のことから $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K の開被覆である。

K はコンパクトなので $\exists n_1<\exists n_2<\cdots<\exists n_r$ s.t. $K=\bigcup_{j=1}^{r}U_{n_j}=U_{n_r}$ すなわち、任意の点 $x\in K$ に対して $g_{n_r}(x)<\varepsilon$ となる。さらに $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性より $n_r\le n\Rightarrow g_n(x)<\varepsilon$ が言える。これは関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が K 上 0 に一様収束することを意味する。

鈴木さんの解答

関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は「桑野先生の解答」と同様に定義すると同様の性質を持つ。関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が K 上 0 に一様収束することを示せばよい。

任意の $\varepsilon>0$ が与えられているものとする。

g は K 上各点収束するので、 $\forall x\in K\ \exists n_0=n_0(\varepsilon,x)$ s.t. $n_0\le n\Rightarrow g_n(x)<\varepsilon/2$ が言える。

g_{n_0} は K 上連続なので、同じ $x\in K$ に対して x の開近傍 U_x が存在して、$y\in U_x\Rightarrow |g_{n_0}(y)-g_{n_0}(x)|<\varepsilon/2$ が言える。

したがって、x の開近傍内の任意の点 $y\in U_x$ に対して、$g_{n_0}(y)\le|g_{n_0}(y)-g_{n_0}(x)|+g_{n_0}(x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ となる。

$\{U_x\}_{x\in X}\in K$ は K の開被覆で K はコンパクトだから、$\exists\{x_1,\cdots,x_r\}\subset K$ s.t. $K=\bigcup_{j=1}^{r}U_{x_j}$ となる。

$m_0:=\max\{n_0(\varepsilon,x_j);1\le j\le r\}$ とおく。任意の点 $x\in K$ に対してある $k(1\le k\le r)$ が存在して $x\in U_{x_k}$ となる。したがって、 $m_0\le n$ のとき $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性から $g_n(x)\le g_{m_0}(x)\le g_{n_0(\varepsilon,x_k)}(x)<\varepsilon$ となる。よって、$\|g_n\|_{\mathrm{K}}\to 0(n\to\infty)$ となり、関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上 0 に一様収束する。

半田の解答

(K,d) がコンパクト距離空間のときを示す。関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は「桑野先生の解答」と同様に定義すると同様の性質を持つ。 $M_n:=\max\{g_n(x)\,|\,x\in K\}$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)とおいたとき、 $M_n\to 0(n\to\infty)$ を示せばよい。

K はコンパクトなので、任意の自然数 n についてある点 $x_n\in K$ が存在し、 $M_n=g_n(x_n)$ となる。Weierstrass-Bolzano の定理から、点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{x_{\tau(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $a\in K$ が存在して $x_{\tau(n)}\to a\ (n\to\infty)$ となる。はじめから $x_n\to a(n\to\infty)$ としても一般性を失わない。

任意の $\varepsilon>0$ が与えられているものとする。関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の性質より、ある自然数 $n_1\in\mathbb{N}$ に対して $g_{n_1}(a)<\varepsilon/2$ である。

また、g_{n_1} の連続性から $\exists\delta>0$ s.t. $d(x,a)<\delta\Rightarrow|g_{n_1}(x)-g_{n_1}(a)|<\varepsilon/2$ が言える。さらに $x_n\to a\ (n\to\infty)$ により、 $\exists n_0\ge n_1$ s.t. $n_0\le n\Rightarrow d(x_n,a)<\delta$ が言える。

よって、 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性に注意して $n\ge n_0$ ならば、

$$0\le M_n=g_n(x_n)\le g_{n_1}(x_n)\le|g_{n_1}(x_n)-g_{n_1}(a)|+g_{n_1}(a)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\,.$$

すなわち、 $M_n\to 0\ (n\to\infty)$ となり、関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上 0 に一様収束する。

解説

1. 桑野先生は $U_n\subset K$ というううまい開集合を作ってあまりにも簡単に解かれています。こんなに簡単なのかと思うほどです。
2. 鈴木さんの解答はスタンダードなものです。EA のセミナーで桑野先生が示した解答とほぼ同じです。
3. 私（半田）の解答は K がコンパクト距離空間という特別な場合に示したものです。Weierstrass-Bolzano の定理を用いたのですが、思ったほど簡単にはなりませんでした。

今回の問題

複素平面 $\mathbb{C}$ 上に $\mathbb{R}$ 線型独立な複素数 ω_1,ω_2 を任意にとり、 ω_1,ω_2 で生成される平行四辺形網

$$B:=(\mathbb{R}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2)\cup(\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{R}\omega_2)$$

を考える(図 1 左参照)。ただし、

$$\mathbb{R}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2:=\{\gamma\omega_1+m\omega_2\mid\gamma\in\mathbb{R},m\in\mathbb{Z}\},\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{R}\omega_2:=\{m\omega_1+\gamma\omega_2\mid m\in\mathbb{Z},\gamma\in\mathbb{R}\}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

1. A を $\mathbb{C}$ の任意の離散かつ閉である部分集合とするとき、B を平行移動して A と交わらないようにできることを示せ。すなわち、任意の複素数 $c\in\mathbb{C}$ について $(c+B)\cap A=\varnothing$ が成り立つことを示せ。ここで、$c+B=\{c+b\mid b\in B\}$ である(図 1 参照)。
2. もっと一般に A を $\mathbb{C}$ の任意の可算部分集合としても同様なことが成り立つことを示せ。
3. さらに一般に以下のことは成り立つか。$(X,\|\cdot\|)$ を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間とし、A を X の任意の可算部分集合、B を $B\subset\partial B$ を満たす X の任意の部分集合とする。このとき A を平行移動して B と交わらないようにできるか。すなわち、ある点 $c\in X$ に対して $(c+A)\cap B=\varnothing.$ が言えるか。ただし、ただし ∂B は B の境界のことである。
4. さらなる一般化、あるいは違う方向での一般化はあるか。

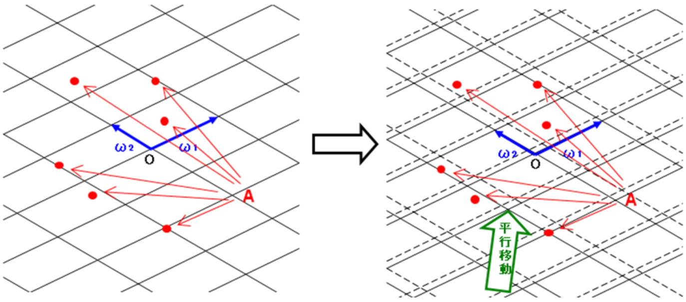


図 1． 平行四辺形網(左図実線)を平行移動して可算集合 A と交わらないようにできる(右図破線)

問題について一言

09 年夏の集中セミナー「楕円関数」のところで提起された問題です。「楕円関数を 1 つの平行四辺形の周のまわりで積分したいが、周上に変な点が乗らないよう平行移動できるか？」というのがきっかけで、それを一般化したものです（桑野先生出題)。問題 2.ができれば 1.はその特別な場合ですので問題 2.のみ解答くださって結構です。もちろん問題 1.のみの解答でも構いません。問題 3.は問題 2.を一般化したものですが正しいでしょうか？平行移動するのは A でも B でも実質同じなのでこの問題では A を平行移動することにしました。問題 3.のみの解答でも構いません。間違っている場合は反例を出してください。問題 4.は問題 3.とは違う一般化があるかという問題です。余裕がある方は考えてみてください。例えば問題 3.の条件「$B\subset\partial B$」の代わりに Baire のカテゴリー定理で用いられる用語である「B はうすい集合である」、あるいはもっと一般に「B は第一類集合である」としたら成り立つでしょうか？

解答をお待ちしています。

宛先と締め切り

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com

締切　2010 年 6 月 30 日(水)

郵送の場合は数学工房教室へお願いします。

数学工房　2010年4月20日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　編集Gr. 増田卓・坂口尚文・平田裕一
　　　　　・半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：080-6576-2691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp　(携帯、緊急用)
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com/
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401