Math.
NO.103
www.sugakukobo.com

会報２０１０年８月

数学工房

夏　の　ご　挨　拶

厳暑お見舞い申し上げます。夏学期講座は各講座とも終了しました。超関数の Fourier 変換と Hilbert 空間上の作用素を終えたところで、そろそろ私の頭の中は、秋学期講座の構想へと移ってまいりました。

ところで、数学にはいろいろな楽しみ方があります。数学好きといっても、その人の本来の傾向を反映して様々です。最近は数学ブームだそうで、先日、新聞社から取材の申し込みまで受けてしまいました。ただ、担当の記者さんの話を聞いていると、数学工房はとあまりにスタンスが違うので丁重にお断りしました。Riemann 予想や、Poincare’予想に挑み続ける数学者の姿勢に、あこがれや共感をもつ人たちが一緒に勉強する市民サークルのような場所だと、どうも思われたようです。

この取材の話をしたところ、勧めてくれる人があったので、数学工房のスタンスで Riemann-Zeta をめぐるいくつかのトピックスを、今回の夏季集中講座からとりあげることにしました。どうぞお楽しみに。

数学工房で提供する数学の楽しみは、20 世紀までの数学の方法をしっかり学び御自身の力で使いこなし、自分の足で数学の世界をトレッキングする楽しみです。今後もそのようなつもりで講座を充実していきますので、これからもお付き合いください。

2010 年　8 月　　数学工房　桑野耕一

夏季集中講座と秋学期講座のご案内

夏季集中講座

■確率論における収束の概念（入門・初級）
8 月 7 日（土）・8 日（日）

(0) 準備
(1) 確率分布の収束
(2) 確率変数の収束の種々のモード
(3) The Low of Large Numbers
(4) Central Limit Theorem
(5) Poisson’s Low of Small Numbers

■ Lebesgue 式積分と測度（一般論）（初級）
8月21日（土）・22日（日）

1. シグマ加法族と可測空間、測度、測度空間
    1. シグマ加法族と可測空間
    2. 可測写像、可測関数
    3. 単関数の代数
    4. 測度、測度空間
2. 測度による積分
    1. 積分の定義
    2. 収束性に関する基本定理

■ Riemann-Zeta をめぐってＩ（フリー）

8月28日（土）・29日（日）

(1) Euler 積とDirichlet 級数
(2) Zeta 関数に関係する様々なDirichlet 級数
(3) Dirichlet 級数と数論的関数

■ 超関数の諸公式 （初中級）

9月5日（日）

(1) 概略
(2) 超関数のテンソル積、畳み込み積
(3) 急減少関数
(4) 超関数の Fourier 変換

■ 一様構造とFilter （初中級）

9月 12 日（日）

(0) Filter の概略
(1) 一様構造と一様空間
(2) 完備性
(3) 一様連続性
(4) 前有界・コンパクト

＜時間＞
1日セミナーは、 11:00－17:00
2日間のセミナーは、1日目 14:00－18:00
2日目 11:00－16:00

＜料金＞
会員 1日セミナー￥10,000（学生￥8,000）
2日セミナー￥16,000（学生￥12,000）

お申し込みに際しては、工房のホームページも合わせて、ご参照ください。
http://www.sugakukobo.com/

＜お申し込み、お問い合わせ先＞
sugakukobo@w5.dion.ne.jp

秋学期講座

開講講座は
入門 **I.A.、I.B.、I.C.、I.D.、I.E.、I.F.、 I.S.**
初級 **G 、E.A.**
中級 **M.B.**
の 10 講座です。I.B.、I.C.、I.F.、E.A.が新講座です。またI.A.、I.E.は一定の素養があれば途中参加も可能です。

--入門--

I.A. 微積分の基本定理

9 月 17 日(金)開講 19:00—21:00

（１） 微分法再論
（２） 定積分の概念
（３） 微積分の基本定理
（４） 微積分の基本定理から導かれる諸公式
（５） トピックス

I.B. 複素関数論（正則性とはなにか）

9 月 25 日(土) 開講 14:00－16:00

（１） 複素数系・複素平面
（２） 複素級数
（３） Cauchy-Rieman方程式
（４） 正則関数 調和関数
（５） 複素線積分

I.C. 位相群上の不変積分と表現論

9月24日(金) 開講 19:00－21:00

（１） 有限群上の表現
（２） 局所コンパクト群上のHaar測度の概略
（３） 局所コンパクト群上の表現

I.D. 初等線型代数から微積分へ

9 月 19 日(日) 開講 11:00－13:00

（１） 基本図形の有向体積
（２） 基本図形の作るユークリッド空間
（３） 領域上の関数の積分
（４） 曲面上の関数の積分

I.E. Hilbert空間への招待 線型作用素

9 月 25 日(土)開講 17:00－19:00

（１） 線型作用素の概念
（２） 有界線型作用素のクラス
（３） 閉作用素、可閉作用素

I.F. 数学の基本語彙と文法

9月18 日(土) 開講 17:00－19:00

（１） Σ記法と数学的帰納法
（２） 集合と写像
（３） トピックス

I.S. 位相解析入門を読む (Lebesgue 積分 II)

9月8 日(水) 開講 19:00－21:00

（１） 2乗可積分関数のHilbert空間
（２） p乗可積分関数の空間
（３） Fourier変換
（４） 完備な空間の諸性質

―初級―

G 抽象線型代数 II

9月19 日（日）開講　14:00－16:30

（１）　線型写像
（２）　双対空間と座標写像・双対空間
（３）　行列表示と座標変換
（４）　線型変換
（５）　射影と直和

E.A 距離空間と位相 II

９月 26 日（日）開講　14:00－16:30

（１）　距離関数、距離空間
（２）　近傍系、開集合系、閉集合系、閉包、開核
（３）　点の位相的分類
（４）　点列の基本的性質・完備性
距離空間の正規性

―中級―

M.B.　多様体　微分形式の積分

９月 18 日(土)開講　14:00―16:00

（１）　コンパクトな台をもつ微分形式の積分
（２）　Stokesの定理
（３）　写像度
（４）　DivergenceとLaplacian
（５）　楕円型微分作用素の一性質

[料金]

各講座とも1講座￥30,000（税込）、学生￥21,000（税込）。途中参加の場合、参加回数×￥5,000＋￥2,000 (テキスト代・手数料)です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。

テキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします

最新の情報については、必ず工房のホームページを、ご確認ください。
http://www.sugakukobo.com/

[お申し込み・お問い合わせ先]

sugakukobo@w5.dion.ne.jp

会　員　か　ら　の　メ　ッ　セ　ー　ジ

今回は、桑野道場へも多く投稿をいただいている鈴木史朗さんに、鈴木さんと数学、そして数学工房とのかかわりについて、原稿をお寄せいただきました。鈴木さんは、現在、福島県で高校の先生をなされています。

年に数回ではありますが、工房のセミナーに参加し、早いもので１０年近くになります。毎度、桑野先生はじめ工房の皆様方に温かく迎えていただいたおかげで今日に至っております。学生時代、工房との出会い、現在の高校数学についてお話しをしたいと思います。

大学では代数（類体論）を早川先生(中大理工)に教わりました。都数会（都内数学科の集まり）にも顔を出し、東大生たちとセール「数論講義」を輪読しました。彼らの能力に圧倒されましたが、とても貴重な経験でした。当初、代数系に進もうとしていたのですが、「代数では食っていけないので解析にしなさい」と解析の栗林先生からアドバイスを受け、解析系に進路を変えました。大学院では、黒田成俊先生（東大・学習院大名誉教授）に師事し、特異積分作用素など実解析を学びました。当時の学内には相川さん（北大理教授）や倉田さん（首都大東京理工教授）もいらして、とても贅沢な環境で過ごしていたと感じます。

院の卒業と同時に地元の公立高校に勤めたこともあり、数学のみの環境とは縁遠い生活を送っておりました。が、仕事も慣れ、もう一度「勉強」をしたい考えておりました。そんな折、「サイエンス社」発行の冊子を通じて数学工房と出会いました。神田のとある教室でセミナーが行われているのを知り、興味津々で上京しました。

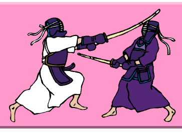
そこで行われていたのは、まさに数学そのものが創造された時点に立ち戻り、その苦悩や喜びやを再度実感してみようという、かつて経験したことのない形態のセミナーで、その魅力に取りつかれてしまいました。それから10年、普段なら退屈な2時間あまりの帰路の電車内も、セ

ミナーのノートを読み返したり、「宿題」を考えたりと有意義な時間を過ごすのが習慣となっています。また、日本数学会のセミナーにも足を運んでいますが、こちらはアブストラクト発表ということもあり、情報交換会のような感じは否めません。いろいろな方面に手をのばしても、やはり戻ってくるのは紙と鉛筆の数学の時、そしてそれに心地よい刺激を与えてくれるのが「数学工房」なのです。

最後に、ここ数年の高校数学の現状について触れます。ゆとり教育の影響で教科書は薄くなり、以前は中学校や高校１年での履修していた内容が高校１年、２年に移行しています。内容も易化しているせいか、勉強せずとも適度に理解できる（？）ということで生徒の不勉強に繋がる悪循環を招いています。数学に限ったことではありませんが、ものの本質について考える時間という本来なら優先されるべき環境がないがしろにされているように思います。そんな中にあってやはり「数学工房」の存在価値は大きいと思います。

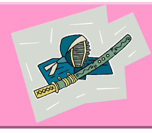
集中セミナーを始め、時間の許す限り出席を考えておりますが、地理的に遠いこともあり、参加者の方々とは多くの時間を共有することはかないませんが、ご容赦いただき、今後とも末永いおつきあいをお願いしたいと存じます。

福島県大熊町　鈴木史郎



入門桑野道場（第１４回）

/// 道場師範代　半田　生久太///



前回の問題

複素平面 $\mathbb{C}$ 上に $\mathbb{R}$ 線型独立な複素数 ω_1, ω_2 を任意にとり、ω_1, ω_2 で生成される平行四辺形網

$$B := (\mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) \cup (\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2)$$

を考える（図１左参照）。ただし、

$$\mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 := \{\gamma\omega_1 + m\omega_2 | \gamma \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}\}, \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2 := \{m\omega_1 + \gamma\omega_2 | m \in \mathbb{Z}, \gamma \in \mathbb{R}$$

とする。このとき、以下を示せ。

1. A を $\mathbb{C}$ の任意の離散かつ閉である部分集合とするとき、B を平行移動してAと交わらないようにできる。すなわち、$\exists c \in \mathbb{C}$ s.t.$(c+B) \cap A = \emptyset$. ここで、$c+B = \{c+b | b \in B\}$ のことである。（図１参照）
2. もっと一般に、A を $\mathbb{C}$ を任意の可算部分集合としても同様なことが成り立つ。
3. さらに、一般には以下のことは成り立つか？
   $(X, ||\cdot||)$: $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間
   A をXの任意の可算部分集合、B を $B \subset \partial B$ を満たすXの任意の部分集合とする。
   このときA を平行移動して B と交わらないようにできる。
   すなわち、$\exists c \in X$ s.t. $(c+A) \cap B = \emptyset$. ただし、∂B はB の境界のこと。
4. さらなる一般化、あるいは違う方向での一般化はあるか？

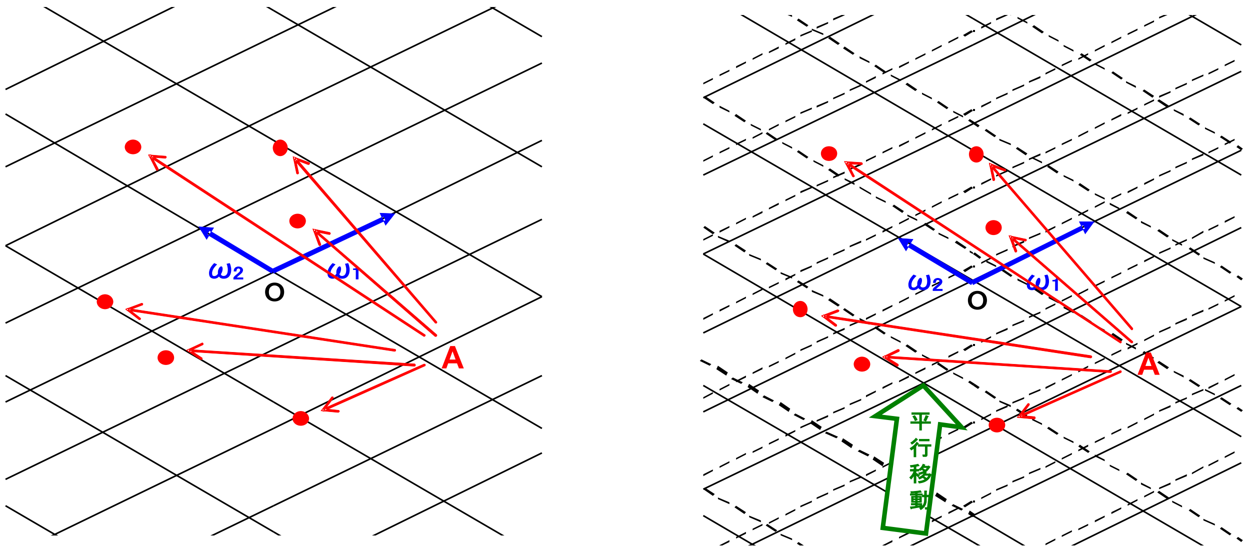


図 1 平行四辺形網(左図実線)を平行移動して可算集合Aと交わらないようにできる(右図実線)

解答

1.は 2.の特殊な場合ですので、2.のみを示します。3.、4.については機会を改めて解説いたします。

2. ・考え方

B をω_1 に平行なもの全体(B_1とする)と ω_2 に平行なもの全体(B_2とする)に分けて考える。B_1, B_2 各々について背理法で命題が成り立つことを示して 2 つを組み合わせる。

・解答

$B_1 := \mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 , B_2 := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2$ とおくと、$B = B_1 \cup B_2$ であり、

$\exists t_1 \in [0,1)$ s.t. $(t_1\omega_2 + B_1) \cap A = \emptyset$, $\exists t_2 \in [0,1)$ s.t. $(t_2\omega_1 + B_2) \cap A = \emptyset$ が成り立つ。実際、

$\forall t \in [0,1)$ に対して $(t\omega_2 + B_1) \cap A \neq \emptyset$ とする。簡単のため $B_t := t\omega_2 + B_1$ とすると、

$B_t \cap B_s = \emptyset (t \neq s)$ であることは、(ω_1, ω_2 の線型独立性から)すぐ分かる。仮定から、

$\forall t \in [0,1)\, \exists b_t \in B_t \cap A$. 写像 $\varphi : [0,1) \ni t \mapsto b_t \in A$ を考えると $b_t \in B_t$ より φ は単写。

ところが、$[0,1)$ は非可算集合。これはA が可算であることに反する。したがって、

$\exists t_1 \in [0,1)$ s.t. $(t_1\omega_2 + B_1) \cap A = \emptyset$---(*). 同様にして、$\exists t_2 \in [0,1)$ s.t. $(t_2\omega_1 + B_2) \cap A = \emptyset$---(**).

$c := t_1\omega_2 + t_2\omega_1$ とすれば、$c \in \mathbb{C}$ が求めるものである。

実際、$c + B = (t_1\omega_2 + B_1) \cup (t_2\omega_1 + B_2)$ は容易に分かるので(*)、(**)より、$(c + B) \cap A = \emptyset$ が従う。

解説

1.は前回述べたように楕円関数の問題から派生したもので、2.はそれを少し一般化したものです。2. はいっぺんに条件を満たす$c \in \mathbb{C}$ を作ろうとすると難しいのですが(やる方法もあるとは思います)、2 つの部分に分けてやれば比較的容易にできるわけです。

また 2. で集合A の元の個数についての数学的帰納法で示した方がいらっしゃいました。ただ、このやり方ではA が任意の有限集合で成り立つことはいえますが、そこから直ちに可算集合の場合で成り立つことは従いません。まちがいやすいところなので注意します。

今回の問題

 $R>0$ として閉区間 $(-R,R)$ 上でC^n級の実数値関数f を考える。$0<r<R$ となる任意の r をとって固定する。このとき以下の式を満たすように関数
$\varphi:[-r,r]\to\mathbb{R}$ を定義する。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{\varphi(x)}{n!}x^n \qquad (x\in(-r,r))$$

ただし、$\varphi(0):=f^{(n)}(0)$ とする。 このとき、$\|\varphi\|_{[-r,r]}\le\|f^{(n)}\|_{[-r,r]}$ を示せ。ここで $[-r.r]$ 上の実数値関数,gに対して、$\|g\|_{[-r,r]}:=\sup\{|g(x)|;x\in[-r,r]\}$ のこととする。

問題について一言

 超関数のセミナーで桑野先生が提起された問題です。この問題は次の Taylor の定理を使えば直ちに分かります。

Taylor の定理:
$R>0$ として、開区間 $(-R,R,)$ 上でC^n級の実数値関数 f を考える。任意の$x\in(-R,R)$ に対して以下の条件をみたす$\theta(0<\theta<1)$ が存在する。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

 ただし、この定理を直接、使わないで証明してください。直接、使う場合はこの定理を証明して下さい(平均値定理、Rolle の定理等を用いて構いません)。

宛先と締切

 宛先 kuwanodojo@googlegroups.com
 締切 2010 年 10 月 31 日(日)
(郵送の場合は、数学工房のオフィスにお送りください)

数学工房 2010年8月2日発行
発行人 桑野耕一
編集人 編集Gr.
(坂口尚文・平田裕一・増田卓)
連絡先
オフィス電話:042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯):08065762691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail:sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail:monteverdi2007@erzeb.ne.jp(携帯、緊急用)
ホームページ:
http://www.sugakukobo.com
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401