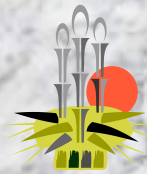


Math.

NO.104
www.sugakukobo.com

会報2011年1月



数学工房



年末年始のご挨拶



新年明けましておめでとうございます。今年もよろしくお願いします。

Analytische Zahlentheorie の講座をやるようになってから、毎日少しずつの時間ですが、C. L. Siegelのレクチャーノートに臨書の精神で、余計な注釈を加えずに読んでいます。Siegelに導かれてあの偉大なDirichletやChybeshev, Mertinsたちの素晴らしいアイデアに出会い、親しく話すことができるのはとても楽しいことです。久しぶりに若いころのわくわくした感じを味わっています。こういうところで出会った型は、しばしば形を変えて、好いアイデアとしてあちらこちらに出現します。数学に習熟してきますと慣れや惰性に流されて進めてしまう部分があります。たまには身に付いた垢を落とし感性を研ぎ澄ます時間は大切ですね。新年は書き初めの代わりにこのテキストの一節を書き写すつもりです。

■■■ 2010年から11年へ ■■■

ここ2年、入門解析教程から中級に至る解析学の整備を行いました。2010年秋学期までに、Fourier変換、超関数、Hilbert空間上の作用素は一応区切りのよいところまで進んでいます。解析のための多様体入門も、11年春学期にRiemann多様体上の調和解析まで一応区切りがつきます。解析学系の講座の充実を図るという目標はある程度達成されたと思います。今年は、初級の一般位相と解析を終えた人向けに、中級解析教程と入門複素関数論+初級関数論の整備をしようと考えています。2010年から新たな2講座(解析数論と表現論の講座)が始まりました。C. L. Siegelのレクチャーをもとにした解析数論の講座は、なるべく丁寧に、しかしオリジナルの香気を損なわぬよう心がけて続けます。このシリーズの延長として講義録や論文を、読み進む体験をしていただくコースを続けたいと思っています。また夏学期からLie群と不変積分も始まります。来年度はもう一つ大きい変化があります。今までは全ての講座を私一人で持っていました。今年から、数学工房に新しい講師が誕生します。夏学期から一部講座を、試行的に講師として会員の鈴木桜子さんをお願いすることにしました。当面は確率論を中心とした入門講座を担当していただきます。数学工房は最近敷居が高くなったという声も聞きます。教育経験も豊かな彼女の持ち味を活かしてもらい、今までの会員より少し広い層の社会人にも、まがい物でない数学の学びの機会を提供したいと思っていますのでよろしくご支援ください。後のページに自己紹介と講師としての抱負等が載っていますのでご覧ください。おいおい分担を増やしていただいて、きたるべき世代交代に備えていこうと思います。

■■■ テレビ局取材の顛末と数学工房 ■■■

なぜか、去年はマスコミからいくつか取材の申し込みを受けました。いままではお断りしていたのですが、担当者が熱心で、意図も真面目そうだったことから、2つの民放の取材を承知しました。2-3時間かけてどちらも講義風景と受講者へのインタビューが撮影されました。結局何のことはない、一方は没、もう一方はイントロでちらっと出ただけということになりました。なんともしまらない話で、会員の皆様にご迷惑をかけましたことを、この場を借りてお詫び申し上げます。担当ディレクターからは長時間の取材で、会員の皆様にご迷惑をおかけしたにもかかわらず取材をうまく活かしかねなかったというお詫びの文面をいただきました。

この取材を通じて初めて知ったのですが、大人の数学ブームといわれるものが取材の背景にあるようです。大人向けの数学教室で検索すると数学工房のHPが目立つらしく、その結果、取材の申し込みとなります。取材のねらいからするとミスマッチのようにも思いますが、取材したくなるようです。図らずも、数学工房のHPが、大変に有効であることが分かりました。また、この機会に、あらためて数学の教育にかかわる過去の運動や数学のブーム、数学愛好者の層の変化、数学工房の歴史なども多少思い出し整理することができたことは収穫でした。この作業を通じて、はっきりしたのは、数学工房の原点です。それは、産業界の要請や、文部科学省の枠と無関係であることを活かし、数学を通して、数学の力で善き生を実現する手助けをするということです。上述の目的に賛同して下さる会員が、会報やHPまたは催し物などをボランティアで支えてくださっています。このことが、恐らく他所と違う数学工房最大の特徴です。改めて、数学工房を支えてくださっている会員の皆さんに感謝いたします。

■■■ 大人の数学ブーム ■■■

昨今、流行っている数学の学び直しの中で理解しがたいのは、良い歳をした大人が、それなりのちゃんとした本を読まず、中学や高校の教科書、あるいは数学とは程遠い、よくわかと称するまがい

物を、なぜ読まねばならぬのかということです。啓蒙書でも良いものはあります。よいものを本気で読まぬ限り、理解にも、幸福にも結びつきません。本といえるほどの本は、読みえぬものです。それでもなおかつひたすら読む。簡単に読めてしまうようなものはそもそも学ぶに値することが書いてありません。基礎稽古は簡単に読めぬものを読むための稽古なのです。それでは、またセミナーでお目にかかりましょう。

桑野耕一 2010 年 12 月年の暮れに



冬期集中セミナー・ガイダンス案内

2010年12月～2011年1月

(1) Lebesgue 式積分と測度 (一般論) レベル初級
[日時]2011 年 1 月 8 日(土) 14:00 – 18:00
2011 年 1 月 9 日(日) 11:00 – 16:00

[内容]0. 基本概念の概略, 1. 積分可能な関数の基本的な性質, 2. 収束定理とその帰結, 3. 測度の構成 (概略)

(2) 統計モデルと行列解析入門 レベル入門・初級
[日時]2010 年 12 月 18 日(土) 14:00 – 18:00
2010 年 12 月 19 日(日) 11:00 – 16:00

[内容]0. 基本概念 多次元分布, 1. 行列値関数の確率測度による積分, 2. 平均・分散共分散行列, 3. 多変量正規分布と関連する諸量

(3) Riemann Zeta-function と関数等式、解析接続 レベル初級

[日時]2010 年 12 月 25 日(土) 14:00 – 18:00
2010 年 12 月 26 日(日) 11:00 – 16:00

[内容]0. 解析学からの準備, 1. 和公式と Zeta の積分表示, $\text{Re}(s) > 0$ の領域への解析接続, 2. Zeta 関数等式, 3. いくつかの別証明 (Riemann の原証明を含む), 4. Hamburger による Zeta の特徴付け, 5. 有理形関数としての Riemann- Zeta と零点

(4) Matrix Algebras 入門 (行列代数と線形代数) レベル 入門・初級

[日時]2010 年 12 月 11 日(土) 14:00 – 18:00

2010 年 12 月 12 日(日) 11:00 – 16:00

[内容]1. 行列の代数と線形写像の方法, 2. 練習問題, 3. 冪等行列と射影, 4. 一般化逆

(5) 一様空間 レベル初級・中級

[日時]2011 年 1 月 16 日(日) 14:00 – 18:00

[内容]0. 一様構造の基本知識 まとめ, 1. Cauchy Filter と一様連続, 2. 全有界性とコンパクト, 3. 擬距離と擬距離空間, 4. 擬距離空間と一様構造, 5. 一様空間の完備化

(6) 数学工房ガイダンス

[日時]

2011 年 1 月 15 日(日) 13:30 – 15:30

[内容]

数学工房の考え方、講座の概要のガイダンスです。講座の取り方等の個別の相談も承ります。筆記用具をご持参下さい。新入会の方も自由にご参加下さい。

(ガイダンス参加費：無料)

諸般の都合により、1 月は懇親会を休止します。そのかわり 4 月 30 日 (土) に統計数理研究所の逸見昌之先生の小講義と懇親会を新講師の鈴木桜子さんの紹介を兼ねて数学工房の教室でやる予定です。

[備考] 集中セミナー参加費

2 日のセミナー：会員 16000 円(学生 12000 円)

1 日のセミナー：会員 10000 円(学生 8000 円)



春 学 期 講 座 案 内

□□ 入門講座

■I. A 解析教程Ⅲ(19 世紀解析学の始まり)

- (1) 平均値定理
- (2) 剰余付 Taylor 公式
- (3) Fourier 級数論の始まり
(古典解析と近代解析の分水嶺)

Newton, Leibniz の微積分学の基本定理に端を発した古典解析学は、18 世紀末には「解かれるべき問題は全て解かれた。残されたのは楕円関数の理解や三角級数展開からの諸問題のように手のつけようの無い問題ばかりである。」と、当時巨匠 Lagrange が嘆いています。次の世代の態度は基礎を掘り下げ問題の対象を明確にする方向でした。このような解析学の歩みを剰余付 Taylor 定理と Fourier 級数論を例に見て行きます。

■I. D 初等線形代数と多次元の微積分 (多変数の微積分の基本定理)

- (1) 曲面上の積分と Gram 行列
- (2) C^r 級関数
- (3) 多次元の高階微分
- (4) Gradient, Laplacian の座標不変な定義
- (5) 剰余付 Taylor の定理

(6) Hessian と極値

多変数の微積分のアイデアを知りたい人に最適の講座です。多次元 Euclid 空間の幾何学的直観を背景にし初等線型代数と微積分の意味を扱います。応用数学に登場する諸量の意味が明確になるでしょう。多様体上の解析の本質的な部分はこの中に現れます。初等線型代数、微積分にある程度習熟している方なら途中参加可能です。

■I. F 数学の基本語彙と文法 (数学の記述の作法)

[1] 総和記号と数学的帰納法

- (1) Σ
- (2) 数学的帰納法
- (3) 非順序和

[2] 集合論からの概念と記号法

- (1) 集合の算法
- (2) 写像の像と原像
- (3) 写像の算法

[3] 変換群

どの分野の数学をやるにせよ、現代の数学をやるには必須の技術的知識です。この部分に難点があると本格的に数学をやる際の躓きの石になり



ます。長年の経験ではこの部分が不確かな方が多い！なるべく早いうちの履修をお勧めします。

□□ 入門・初級講座

■I. B 複素関数論(Cauchy 理論と応用)

[1] 複素線積分

- (1) 曲線の微積分
- (2) 複素線積分線積分に関する基本定理

[2] Cauchy の積分定理・積分公式

複素関数の Cauchy 理論の基礎付けを行います。前半で複素微分形式の「微積分の基本定理」を確立します。実1変数と比較すると、積分可能条件に平面トポロジーが本質的にかかわります。局所的な Cauchy の積分定理、積分公式を導き、いくつかの帰結を追求します。曲線、トポロジーの取り扱いが直感的な範囲にとどめます。一般位相の概念が本質的な役割を果たすことを見るには絶好の材料です。EA と同時履修もよいでしょう。

■I. S Analytisch Zahlentheorie 2

(Dirichlet の素数定理と L 関数)

- (1) Dirichlet の L 関数と算術級数上の素数定理
- (2) Dirichlet 級数の一般論

Siegel の解析数論の Goettingen における 1968 年の講義のマニスクリプトに沿った紹介です。中心テーマは Dirichlet の素数定理の証明です。始めに mod m の既約剰余類上の指標 χ に対応する L 級数 $L(s, \chi)$ たちが導入され、対応する Euler 積を用いて $p \equiv a \pmod{m}$ なる素数のクラスを分離します。この証明の鍵が、 $L(1, \chi) \neq 0$ を主指標と異なる χ について示すことで、Mertins の組み合わせ論的な証明が示され、それから、一般の Dirichlet 級数とその複素領域への拡張をもちいて新証明が示されます。これが、複素関数論の研究が解析数論に現れた理由を示唆しています。

□□ 初級講座

■G 抽象線形代数

(内積空間上の作用素のクラス)

[1] 内積空間

- (1) 内積空間と例
- (2) 内積空間の幾何 I
- (3) 内積空間の幾何 II

[2] 作用素の一般論

- (1) adjoint
- (2) 対称変換と正射影
- (3) 等距離変換
- (4) 2 次形式の最大原理

一般位相と並び現代数学の根幹であり初中級以上の講座を受講するにはこの習熟は必須です。今期は内積空間を一般的な形で学びます。内積空間 I では直交性と正射影定理、II では線形形式の表現定理と近似定理、直交化を扱います。後半では内積空間上の線形写像の一般論として adjoint とその構造、対称変換、正射影等を扱います。抽象の方法を身につける基本の型稽古であり、多くの計量をもつ線形理論が統一された方法で簡明に扱えます。関数解析や Riemann 多様体上の理論の理解には決定的な役割を果たします。

■E. A 連結性・コンパクト性

- (0) 実数値連続関数
- (1) 連結の特徴付け
- (2) 連結性の諸性質
- (3) $\mathbb{R}^n$ の領域、
- (4) 連結成分
- (5) コンパクト性の定義。コンパクト集合の基

本的性質

(6) コンパクト集合上の連続関数。

数学工房の基礎で、まさに型の稽古からできています。初中級以降のどの講座も一般位相についての習熟を要求しています。今期は関数論の講座も同時に開講されますので位相の働きを理解したい方は同時に IB をとることをお勧めします。連結性とコンパクト性が関数論の中で根源的な役割を果たすのをみることになります。

□□ 初級講座

■I. C 代数学, 解析学特論(コンパクト群の表現)

- (1) 連続群の作用
- (2) 不変測度・不変積分
- (3) 位相群の表現
- (4) コンパクト位相群



位相群の基本事項をまとめた後、局所コンパクト群上の Haar 測度の存在と本質的一意性を基礎にして、コンパクト群の表現論を第1歩から扱います。線形代数と群論、一般位相の総合演習です。特別な知識は要求しませんが、線形代数と一般位相には習熟している必要があります。

■I. E Hilbert 空間上の作用素

(作用素の一般論)

- (1) Hilbert 空間の直和
- (2) 線形作用素の概念と基本的な性質
- (3) 作用素のグラフ
- (4) 閉作用素、可閉作用素
- (5) 作用素のアドジョイント

作用素の理論では、十分に大きな関数空間上で、解析的なオペレーションに由来する線形写像を同時に扱うという事情から、全空間では定義されず、元の空間の位相では連続でない作用素を扱います。代数的な理論と比べて泥臭く見えるのはそれゆえです。一般位相、線形代数の総合演習として線形代数の結果と対照し丁寧に進みます。一般位相と線形代数の初歩的な知識は要求します。

□□ 中級講座

■M. B 多様体の理論の展開

(微分形式の積分とその応用)

- (0) Stokes の定理とベクトル解析の諸定理
- (1) 内積空間上の交代形式
- (2) Riemann 多様体上の調和形式
- (3) 調和形式とコホモロジー、Kodaira-Hodge の理論への入門

2010 年秋学期で多様体の向き付け、体積要素、多様体上の積分、Stokes の定理を扱いました。今学期はその発展編で Divergence Theorem などベクトル解析の諸定理の発展編から始まり、Riemann 多様体上の調和形式までを扱い、コンパクト多様体上の Kodaira-Hodge の理論への入門とします。



<< 春学期講座カレンダー >>

月	日	曜日	略号	時間
1	21	金	I.A(1)	19:00~21:00
	22	土	I.S(1)	14:00~17:00
	23	日	I.B(1) E.A(1)	11:00~13:00 14:00~16:30
	28	金	I.F(1)	19:00~21:00
	29	土	I.C(1) I.E(1)	14:00~16:00 17:00~19:00
	30	日	I.D(1) G(1)	11:00~13:00 14:00~16:30

月	日	曜日	略号	時間
2	4	金	I.A(2)	19:00~21:00
	5	土	I.S(2)	14:00~17:00
	6	日	I.B(2)	11:00~13:00
			E.A(2)	14:00~16:30
	11	金	I.F(2)	19:00~21:00
	12	土	I.C(2)	14:00~16:00
			I.E(2)	17:00~19:00
	13	日	I.D(2)	11:00~13:00
			G(2)	14:00~16:30
	18	金	I.A(3)	19:00~21:00
	19	土	I.S(3)	14:00~17:00
	20	日	I.B(3)	11:00~13:00
			E.A(3)	14:00~16:30
	25	金	I.F(3)	19:00~21:00
3	26	土	I.C(3)	14:00~16:00
			I.E(3)	17:00~19:00
	27	日	I.D(3)	11:00~13:00
			G(3)	14:00~16:30

月	日	曜日	略号	時間
3	12	土	I.C(4)	14:00~16:00
			I.E(4)	17:00~19:00
	13	日	I.D(4)	11:00~13:00
			G(4)	14:00~16:30
	18	金	I.A(5)	19:00~21:00
	19	土	M.B(1)	14:00~18:00
	20	日	I.B(5)	11:00~13:00
			E.A(5)	14:00~16:30
	25	金	I.F(5)	19:00~21:00
	26	土	I.C(5)	14:00~16:00
4			I.E(5)	17:00~19:00
	27	日	I.D(5)	11:00~13:00
			G(5)	14:00~16:30
	1	金	I.A(6)	19:00~21:00
	2	土	M.B(2)	14:00~18:00
	3	日	I.B(6)	11:00~13:00
			E.A(6)	14:00~16:30
	8	金	I.F(6)	19:00~21:00
	9	土	I.C(6)	14:00~16:00
4			I.E(6)	17:00~19:00
	10	日	I.D(6)	11:00~13:00
			G(6)	14:00~16:30
	16	土	M.B(3)	14:00~18:00



新講師鈴木桜子先生のご挨拶



来年度から新しく講座を担当させていただきます鈴木桜子と申します。よろしくお願い致します。

数学との出会いは、15年前に数学工房に足を踏み入れたのが始まりでした。当時、予備校や社会人向けの易しい数学の講座の講師をしていましたが、大学では数学は専門ではありませんでした。むしろ、大学1年の初めの数学の授業でいきなり「今から話すことは分からなくていいから」と前置きをされて $\varepsilon-\delta$ 論法が始まり、チンプンカンプンだったのを覚えています。高校の数学は得意でしたが、大学では試験は何とか凌いだものの、ずっと落ちコボレ気分でした。そんな私が予備校で大学受験数学を教えることになりました。教える側になると、分かっていたつもりが理解の甘さを思い知らされます。特に確率には苦戦しました。確率が数学の中に入っている理由が分かりませんでした。そんな時、ある参考書の付録で中心極限定理の初等的な説明を見て衝撃を受けました。確率は微積分や極限と言う厳密な数学上のルールに乗っている“数学”だったのです！それから無性に数学がやりたくなり、色々と本を読んでも核心に迫れぬまま、砂漠の中を歩く感覚でさまよっていた時に数学工房に出会いました。

桑野先生は、「分からなくて良い」はずの $\varepsilon-\delta$ 論法を道具として使ってデリケートな極限の問題を普通に議論され、「微積、線形代数、位相を学ばずして数学の世界を自由に歩けない。」と言われました。そこでまた衝撃を受けました。結局、それで覚悟が決まり、数学を本格的に学ぼうと大学の数学科に編入しました。確率論を専門に選び、大学院では確率の極限定理を研究しました。論文を何本か書き学会で発表したりするうちに、勢いで博士課程まで出てしまいました。

しかし学位を取った後、大学で講師をしながらも砂漠の中でさまよう感覚に逆戻りしてしまいました。いつのまにか学位を取る作業に終始し、自分の中に数学を育てることが出来なかったのが原因でした。原点回帰するため、再び数学工房に足を運びました。桑野先生の掲げる「自分の足で立ち数学の世界を自由に歩くための数学教育」の大切さに身を以て賛同した私は、自分の数学を育てつつお手伝いをすることに決めました。

最近の数学ブームで数学を学ぶ人が急増しましたが、数学工房会員のレベルは高く、一般的な数学好きな人が近寄りがなくなっているようです。それは素晴らしいことですが、より幅広い層に数学工房の数学を知って欲しいというスタンスで、講義を担当しようと考えています。未熟者ですが、共に歩んでいきたいと思いますので、よろしくお願い致します。



Photo1 新講師鈴木桜子先生



入門桑野道場(第15回)

/// 記 桑野道場師範代 半田伊久太 ///



前々回の問題から

問題 3.

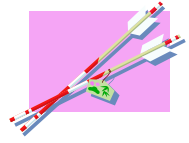
$(X, \|\cdot\|) : \mathbb{R}$ 上の Banach 空間

A を X の任意の可算部分集合, B を $B \subset \partial B$ を満たす X の任意の部分集合とする.

このとき A を平行移動して B と交わらないようにできる. 即ち, $\exists c \in X$ s.t. $(c + A) \cap B = \emptyset$.

ただし ∂B は B の境界のこと.

問題 4. さらに一般化あるいは違う方向での一般化はあるか?



前々回の問題解答

3. は前回会報に間に合わなかったのでコメントの形にしましたが簡単な反例がありました.

また 4. についてはいい一般化は見つけられませんでした.

3. の反例

$X := \mathbb{R}$ (1 次元ユークリッド空間),

$A := \sqrt{2}\mathbb{Q} = \{\sqrt{2}q | q \in \mathbb{Q}\}$, ただし $\mathbb{Q}$ は有理数全体.

$B := X \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: 無理数全体とする.

このとき A は可算集合, $B \subset \partial B$ を満たす. しかも任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $(c + A) \cap B \neq \emptyset$.

実際, $c \in \mathbb{R}$ が存在して $(c + A) \cap B = \emptyset$ が成立するとする. すると $c + A = c + \sqrt{2}\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$. したがって任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対して $c + \sqrt{2}q \in \mathbb{Q}$.

$q = 0$ のとき $c \in \mathbb{Q}$, また $q = 1$ のとき $c + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ より $c \notin \mathbb{Q}$ となり矛盾.

よって任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $(c + A) \cap B \neq \emptyset$.



前々回の問題解説 (と言いつつ)

3. は前々回の問題 2. を更に一般化したつもりでしたが簡単な反例がありました. $B \subset \partial B$ という条件が弱すぎたようです. 3. が正しくなかったので 4. は腰砕けになってしまいました. 申し訳ありませんでした. 前々回に延べました B を「うすい集合」としても反例があるようです.

前回の問題

$R > 0$ として開区間 $(-R, R)$ 上で C^n 級の実数値関数 f を考える. $0 < r < R$ となる任意の r をとって固定する. このとき以下の式を満たすように関数 $\varphi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{\varphi(x)}{n!}x^n \quad (x \in (-r, r))$$

ただし $\varphi(0) := f^{(n)}(0)$ とする. このとき $\|\varphi\|_{[-r, r]} \leq \|f^{(n)}\|_{[-r, r]}$ を示せ. ここで $[-r, r]$ 上の実数値関数 g に対して $\|g\|_{[-r, r]} := \sup\{|g(x)|; x \in [-r, r]\}$ のこととする.

解答

$\forall x \in [-r, r]$ をとって固定する. $|\varphi(x)| \leq \|f^{(n)}\|_{[-r, r]}$ を示せばよい. $x = 0$ のときは $\varphi(0) := f^{(n)}(0)$ より明らか. $x > 0$ のときを示す. $F(\xi) := f(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu - \frac{\varphi(x)}{n!}(x-\xi)^n$ ($\xi \in [-r, r]$) とおく.

$F(0) = f(x) - f(x) = 0, F(x) = f(x) - f(x) = 0$. したがって Rolle の定理から, $\exists \theta_x \in (0, 1)$ s.t. $F'(\theta_x x) = 0$.

一方, $F'(\xi) = \frac{dF}{d\xi} = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + \frac{\varphi(x)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}$.

$\xi = \theta_x x$ を代入して整理すると $F'(\theta_x x) = 0$ より $\varphi(x) = f^{(n)}(\theta_x x)$ を得る. $\theta_x x \in [0, x] \subset [-r, r]$ より $\varphi(x) \leq \|f^{(n)}\|_{[-r, r]}$. $x < 0$ のときも同様. よって証明された.

解説

解答はテイラーの定理の証明と本質的に同じものです。これ以外にも、部分積分を繰り返して使うものやコーシーの平均値定理を使うもの等あります。興味のある方は微積分の本を参照してください。

今回の問題



1. $s > 1$ とするとき $\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-1/p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を示せ。

ただし、左辺の $\prod$ は素数全体にわたって積をとるものとする。

即ち、素数を小さい順に $p_1, p_2, \dots$ とするとき $\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-1/p^s} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^m \frac{1}{1-1/p_\nu^s}$ であると理解する。

また右辺の値が有限の値になること、即ち $s > 1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$ は既知とする。

2. 以下 $s > 1$ で $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ と表示することにする。

このとき、以下で定義される数列 b, c, d はどんな数列（数論的関数）か説明せよ。
(ことばで説明してもいいですし、数式で表してもけっこうです)

(a) $s > 1$ で $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$

(b) $s > 1$ で $(\zeta(s))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$

(c) $a > 0$ を任意にとり固定する。 $s - a > 1$ で $\zeta(s - a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$

ただし、一般に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \Rightarrow f(n) = g(n) \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であることは認めることにする。



問題について一言

1. はオイラーが発見した式（オイラー積）として有名です。もちろん素因数分解の一意性や等比級数の式は既知とします。2. はディリクレ級数と呼ばれる級数です。ディリクレにより研究されました。

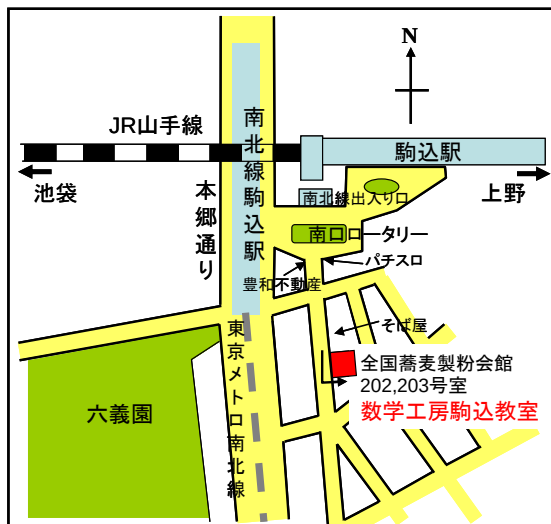
いずれも 2010 年の夏の集中セミナーで行った内容ですが (1. は 10 月から始まった「IS 解析数論序説」でも取り上げています)、解答お待ちしております。

宛先と締切

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2011 年 2 月 28 日 (月)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)



数学工房 2011年1月1日発行

発行人 桑野耕一

編集人 編集Gr.

(平田裕一・増田卓・坂口尚文)

連絡先

オフィス電話：042-495-6632

数学工房連絡専用(携帯)：080-6576-2691

連絡は極力eメールをご利用下さい。

e-mail : sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail : monteverdi2007@ezweb.ne.jp(携帯、緊急用)

ホームページ：

<http://www.sugakukobo.com>

数学工房 教室

〒170-0003

豊島区駒込1-40-4

全国蕎麦製粉会館2F 202-203

数学工房 オフィス

〒204-0023

清瀬市竹丘1-17-26-401

