Math.
NO.105
www.sugakukobo.com
会報２０１１年４月

数学工房

巻頭言

早いものであの恐ろしい出来事があってからもう 1 カ月になります。大きな余震が続き、日常の平安からは、程遠い状態ですが皆様の状況はいかがでしょうか。震災そして津波の被害にあわれた方、御親族、友人知人が被災された方に、この場をかりてあらためて、心からのお見舞いを申しあげます。尚、数学工房の会員にも若干該当する地域に在住する会員がいらっしゃいますが、確認しえたところでは、幸いにも、とにかく御無事のようです。

数学工房は直接物理的な損害はありませんでした。講座も震災翌日の講座の移動だけで済みましたが、やはり、講座によっては中途で半分近い人が出られなくなったりとか、それなりの影響を被っています。

◆凄まじい災厄を知ったとき最初によぎったのは、モンテーニュのことでした。若いころは微温的で中途半端に感じて、かつては見向きもしなかったモンテーニュの評伝を仕事の行き帰りに読み始めていたのです。平明で気張ったところのない思索。しかしそのような姿勢がいかに大変なことか。このような災厄に直面して、改めて目を覚まされた思いです。彼の生きた時代を考えれば、過激な言葉に自己陶酔することに比べてはるかに難しい道です。彼の生きた時代、ルネッサンスと言えば聞こえはいいですが、この時代のヨーロッパがどんな状態かと思い起こせば、相次ぐ、天災や戦乱による流浪，餓え、伝染病、無秩序による暴行略奪、どれほど不安と恐怖にさらされていたか。都市を離れた自然の世界は魔物が跋扈する暗黒の世界だったのです。今の日本は、いろいろ陰りが見えてきたといっても、モンテーニュの生きた時代とは大違いで、こんなに豊かで安全であった時期は世界史の水準で言ってもなかったと思っていたのですが、そのような私たちの意識が思い込みに過ぎない、この思想家の同時代人が直面した不確かさ、無力を思い起こすことになりました。中世の人が東西を問わず宗教に頼ったように、気がついてみれば、科学技術と呼ばれる神話に頼って祈っております。

かつてモンテーニュがその一人の先駆けであったように、そろそろ次の時代の幕を開ける思索者が生まれているかもしれません。何か、自分も試されているような気がしました。

◆私たちが学ぶ、現在の数学も、この時代を潜り抜けてきました。西ヨーロッパ世界が、東方の光に覚醒し、古代ギリシャの数学を翻訳と注釈の中で再発見した時に、私たちが今学ぶ数学が誕生しました。この時代の知識のある人々にとって、古代から蘇った、数学的秩序の厳然たる輝きは暗黒の中で大いなる希望であり祈りであったと思います。数学工房の役割として、時空を超えて継承されたMathematics の中に込められたこのメッセージを大切にしたいと思います。

◆今年の数学工房については 1 月の会報 104 号ですでに述べましたが、今年度は去年の秋から始めた表現論の講座の一環として Lie 群の講座も開始します。現在開講中の初級関数論は今年度いっぱいをかけて 大域的 Cauchy の定理と留数解析までを予定しています。中級の解析のための多様体はしばらくお休みをいただいて構想も新たに第一歩から始めます。

多様体や複素関数論の基礎知識がある会員のためには Lie 群と関連して複素多様体の基礎を、何らかの形でやる予定です。Siegel の解析数論はとりあえず、全 2 巻のうち第 1 巻まで続ける予定です。解析数論のレジュメを作っているうちに副産物として、代数の入門コース、解析学演習の構想がまとまりました。IA も解析数論の成果を生かして、改定する予定です。この講座の延長として、優れた講義録や論文をじっくりと読みこなす講座をその分野の専門家の助けも借りながら、提供したいと思っています。関数解析学ついては、Fourier 解析、超関数論、作用素論が何とか形になってきましたので、一度まとめたいと思います。

位相と解析の講座では、今期は抽象位相を扱います。基礎コースは開集合系からフイルターまで

を扱います。
関数解析の素養があるかたにたいしては、今年は単発で、局所凸空間と関数空間、弱位相、Sobolev 空間などを考えています。
最後になりましたが、会員の鈴木桜子さんに夏学期は IF（数学の基本語彙と文法）と講読講座を担当していただく予定です。
◆天災は固より悲惨ですが、それに大きな上塗りをしたのが人災です。不思議なことに案外人は歴史に学ばない。何も思いあがっているのは原発関係だけではありません。残念ながら、この世界には懲りない予備軍がたくさんいます。
せめて、私たちは数学を一歩一歩誠実にやることを大切にしたいと思います。数学を粗末にやったことによる影響は長いスパンになるととんでもない結果として出てくるでしょう。
今年度も常と変らず、自分の足で数学の世界をあるけるように、困難をも楽しみつつ、一歩一歩数学の技量を向上させることを目指しましょう。
35 億年、何度も絶滅の危機を乗り越えて生き延びてきた私たちの先祖を思いながら。
皆様の夏学期の講座料の一部分は、図書など教育関係に特定した義援金として出させていただきますのでよろしくお願いします。

数学工房　桑野耕一

集　中　講　座　案　内

2011年5月

◆測度の構成、拡張、直積測度
[日時]
2011 年 5 月 3 日(火)　14:00－18:00
2011 年 5 月 4 日(水)　11:00－16:00
[内容]
（0）　イントロダクション
（1）　Caratheodory 外測度
（2）　Hopf の拡張定理
（3）　完備化
（4）　直積測度と Fubini の定理

◆凸関数と Gamma 関数
[日時]
2011 年 5 月 1 日(日)　11:00－16:00
[内容]
（1）　凸関数の一般論
（2）　対数凸
（3）　Gauss 積
（4）　Gamma 積分
（5）　Gamma 関数のいくつかの性質
[料金]
集中講座の料金は以下のようになっています。
1 日セミナー　料金¥10,000(学生¥8,000)
2 日セミナー　料金¥16,000(学生¥12,000)

◆数学工房‘11 年春の懇親会と小講義のお知らせ
「統計科学の数学、最近の話題から」というタイトルで会員の逸見昌之さん（統計数理研究所）が話をしてくださいます。奮ってご参加ください。人数に限りがあるので、お早めにお申し込みください。
[日時]
2011 年 4 月 30 日(土)　14:00－16:00
[場所]
数学工房教室
[会費]
¥2,000（軽食、飲み物付き）
[申し込み先]
sugakukobo@w5.dion.ne.jp

夏 学 期 講 座 案 内

2011年5月～8月

2011 年夏学期講座は、5 月 14 日(土)から開講予定です。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.B	複素関数論の展開	5 月 15 日	初級
I.C	位相群の表現	5 月 21 日	中級
I.D	初等線型代数と微積分 I	5 月 22 日	入門
I.E	Hilbert 空間上の作用素	5 月 21 日	初級
I.F	数学の基本語彙と文法	5 月 21 日	入門
I.H	代数系入門	5 月 20 日	入門
E.A	抽象位相への案内	5 月 22 日	初級
G.I	表現と実在	5 月 15 日	初級
I.G	講読講座	5 月 25 日	入門
I.S	解析数論	5 月 14 日	初級
M.C	Lie 群と Lie 環	6 月 25 日	中級

◆I.B　複素関数論の展開
（1）Reimann の延長定理
（2）正則関数の一致の定理
（3）Cauchy の評価と最大原理
（4）Liouville の定理
◆I.C　位相群の表現
＜1＞ 位相群 G の表現加群

（１）位相群Ｇの表現加群
（２）直和表現、テンソル積表現、双対表現、共役表現
（３）コンパクト群の共役表現と双対表現

◆I.D　初等線形代数と微積分Ｉ
（１）数ベクトル空間
（２）内積・直交性
（３）線型部分空間、Span、商空間
（４）行列と線型写像
（５）随伴と写像の微分法

◆I.E　Hilbert 空間上の作用素
（１）レゾルベントとスペクトル
（２）自己共役作用素
（３）スペクトル定理
（４）Hilbert 空間の典型例
（５）トピックス

◆I.F　数学の基本語彙と文法
（１）Σの用法と数学的帰納法の様々な用法
（２）集合の代数
（３）写像

◆IH　代数系入門
（１）群と半群、変換群
（２）部分群、正規部分群、群準同型
（３）群の作用と商空間
（４）Abel 群と指標群
（５）可換環とイデアル
（６）既約剰余類と Fermat の小定理
（７）円分多項式と Fibonatti 型数系

◆EA　抽象位相への案内
（１）開集合導入の契機、距離的でない位相空間、擬距離空間
（２）近傍と点の位相的分類
（３）位相の比較、位相の階層、位相の生成
（４）連続写像

◆ＧＩ　抽象線型代数
（１）線型空間の定義と典型的な線型空間
（２）線型部分空間、部分空間の共通部分と和
（３）生成される線型空間、直和
（４）線型従属・独立
（５）次元と基底、座標写像
（６）抽象の用法

◆IG　講読講座
確率論のテキストを用いた講読が予定されています。

◆IS　解析数論（Siegel 解析数論を読む）
今期は 63p～102p を予定しています。いよいよ素数定理の複素関数論的証明に向かいます。
（１）Das Teiler Problem
（２）Der diskontierlische Faktor und Beweis Primzahlsatzes mit Restglied

◆MC　Lie 群と等質空間
（１）位相群まとめ
（２）位相群の等質空間、局所コンパクト群
（３）Lie 群と Lie 環
（４）１パラメータ部分群と指数写像

［料金］
各講座とも１講座￥30,000（税込）、学生￥21,000（税込）。途中参加の場合、参加回数×￥5,000＋￥2,000（テキスト代・手数料）です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします。

会員からのメッセージ

■数学工房との関わり(大沢誠)

神奈川県の私立中高一貫校で数学の教員をしている大沢です。教員として生徒を教えながら、数学工房の授業を受けています。今回そういった立場を踏まえて、数学工房との関わりについて書かせて頂きます。

私が初めて数学工房の講義を受けたのは２００１年で、それ以来３年程ブランクがありましたが、現在まで各学期の講座を週に２講座程度、更に、関連した集中セミナー等を受講しています。

最初に訪れたのは、まだお茶の水に教室があった頃で，ガイダンスから始まり入門・初級等の講義を受講しました。大学を卒業して２０年近く経ってからの本格的な数学の授業はとても新鮮で、桑野先生の判り易く格調高い講義のおかげで久し振りに数学を勉強する楽しみを味わえたことが強く印象に残っています。また、色々な職業や年齢の方が熱心に、自主的に数学を勉強している姿勢にも感銘を受け、励みになりました。

その後多忙になり、しばらく通えなかったのですが、余裕が出来たので、教室が駒込に移動してから中級の講義を中心に参加しています。自分にとって高度な内容の講座を取ってしまっているのに、あまり予習・復習をしないので、ほとんど写経のように黒板の内容をノートに書き、睡魔と戦いながら過ごしているのが現状です。しかし、桑野先生の講義の、厳密で飛躍のない進め方と、扱っている事柄への広い視野は充分に感じられ、しっかり復習すれば理解できるという希望を持たせてくれます。

このような状態ではありますが、それでもできるだけ欠かさずに講義に参加している理由は二つ考えられます。

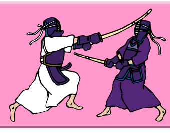
第一に、「桑野道場」という別名からもわかる

ように、本格的な数学を基礎から徹底的に、妥協を許さず叩き込まれることにより、抽象的な数学の世界に直接触れることができるという点です。現代の社会は先が見えにくく、何を信頼して良いかもなかなか判断できず、また筋道が通らないと感じられることも多々あります。そんな時、論理的にしっかりと構築された普遍的で恒久的な数学の世界を垣間見ると、さながら中世のゴシック建築の前に立ち、大伽藍を見上げているような気持ちになり，大きな安心感を得られます。また、深遠な数学の世界の全体像に基づいた桑野先生の講義を聞くと、それまで別個のものだと思っていた概念が、実は同じ対象を別の捉え方で見ていたに過ぎないということに気づかされ、それが理解できると、例えば山道を延々と登っていると突然視界が開け、今まで歩いてきた道と自分がいる場所がどのようにつながっているかが一瞬にして見渡せるような充実した気分が味わえます。

二番目は、教員としての授業に直接フィードバックできる点ですが、桑野先生の講義の方法は自分が授業をやる上でも非常に参考になります。ポイントを押さえ、先の展望を随所で確認しながら、受講者の理解度にも気を配っているのが良くわかります。質問や疑問にも即座に的確な答えが返り、またどんなに難しい内容でも妥協することなく、誠実に、しばしば時間を延長してまでもエネルギッシュに講義を行う姿には、しっかりした内容を伝授したいという情熱が感じられて、こちらも頑張らなくてはと言いう気になります。

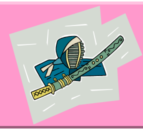
その他にも、教員という職業は、世界が狭くなりがちですが、数学工房には色々な職業の方がいて、数学を接点としてそういった方々と交流できることも魅力の一つです。これからも、数学工房との関わりを大切にしていきたいと思います。

写真１　大沢誠さん



入門桑野道場（第１６回）

/// 記　桑野道場師範代　半田生久太///



前回の問題

1. $s>1$ とするとき、

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-1/p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

を示せ。ただし、左辺の $\prod$ は素数全体にわたって積をとるものとする。すなわち、素数を小さい順に $p_1, p_2, \cdots$ とするとき、

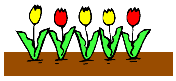
$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-1/p^s} = \lim_{m\to\infty} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{1}{1-1/p_\nu^s}$$

であると理解する。また、右辺の値が有限の値になること、すなわち、$s>1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$ は既知とする。

2. 以下 $s>1$ で $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ と表示することにする。このとき、以下で定義される数列 b, c, d はどんな数列（数論的関数）か説明せよ。（言葉で説明しても結構ですし、数式で示しても結構です。）

1）$s>1$ で $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b(n)}{n^s}$

2) $s>1$ で $(\zeta(s))^2=\sum_{n=1}^\infty \frac{c(n)}{n^s}$



3) $a>0$ を任意に取り、固定する。 $s-a>1$ で $\zeta(s-a)=\sum_{n=1}^\infty \frac{d(n)}{n^s}$

ただし、一般に $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^\infty \frac{g(n)}{n^s} \Rightarrow f(n)=g(n)\ (\forall n\in\mathbb{N})$ であることは、認めることにする。

解答

1. $1\sim m$ 番眼の素数を $p_1,\cdots,p_m$ とする。 $\frac{1}{1-1/p_\nu^s}=\frac{p_\nu^s}{p_\nu^s-1}>1(1\le\nu\le m)$ より、 $\left(\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}\right)_{m\in\mathbb{N}}$

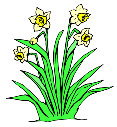
は単調増加数列である。 $1/p_\nu{}^s<1$ より、 $\frac{1}{1-1/p_\nu^s}=\sum_{\mu=1}^\infty p_\nu{}^{s\mu}\ (1\le\nu\le m)$ と書けるので、

$$\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}=\prod_{\nu=1}^m\left(\sum_{\mu=1}^\infty p_\nu{}^{-s\mu}\right)$$

となる。

すなわち、

$$\forall\varepsilon>0,\exists l_0\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}<\left(\sum_{\mu_1=1}^{l_0}p_1^{-s\mu_1}\right)\cdots\left(\sum_{\mu_m=1}^{l_0}p_m^{-s\mu_m}\right)+\varepsilon$$



となる。

ここで、 $M=p_1^{l_0}\cdots p_m^{l_0}$ とおくと、

$$右辺=\sum_{1\le\mu_1,\cdots,\le\mu_m\le l_0}(p_1^{\mu_1}\cdots p_m^{\mu_m})^{-s}+\varepsilon\le\sum_{n=1}^M n^{-s}+\varepsilon=\sum_{n=1}^M\frac{1}{n^s}+\varepsilon\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}+\varepsilon<\infty$$

となる。$\varepsilon>0$ は任意なので、$\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$ である。m も任意であるので、単調増加列 $\left(\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}\right)_{m\in\mathbb{N}}$

は上に有界である。したがって、極限をもち、

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$$

次に逆の不等号について示す。

任意の正整数 N をとって固定する。N の最大素因子を p_m とすると $N=p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$ とあらわせる。ただし、

$p_1<p_2<\cdots<p_m$ は小さい順に並べた素数で、 $e_j(1\le j\le m)$ は 0 以上の整数である。

$$\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu^s}=\left(\sum_{\nu_1=0}^\infty p_1^{-s\nu_1}\right)\cdots\left(\sum_{\nu_m=0}^\infty p_m^{-s\nu_m}\right)=\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_m}(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m})^{-s}\ge\sum_{n=1}^N n^{-s}$$

したがって、 $\sum_{n=1}^N\frac{1}{n^s}\le\prod_{\nu=1}^m\frac{1}{1-1/p_\nu{}^s}\le\prod_{\nu=1}^\infty\frac{1}{1-1/p_\nu{}^s}$ となる。 N は任意だから、

$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}\le\prod_{\nu=1}^\infty\frac{1}{1-1/p_\nu{}^s}$ となる。以上より、

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}=\prod_{\nu=1}^\infty\frac{1}{1-1/p_\nu^s}=\prod_{p:素数}\frac{1}{1-1/p^s}$$

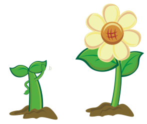
2. 以下は略解で、 $p_1<p_2<\cdots<p_m<\cdots$ は上と同じとする。

1) $\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{p:素数}(1-p^{-s})=\prod_{\nu=1}^\infty(1-p_\nu^{-s})=\sum\left((-1)^{\epsilon_1+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m+\cdots}p_1^{\epsilon_1}p_2^{\epsilon_2}\cdots p_m^{\epsilon_m}\cdots\right)^{-s}$ である。ここで、

$\epsilon_j=0,$ または 1 で、かつ高々有限個を除いて、 $\epsilon_j=0(j=1,2,\cdots)$ である。したがって、

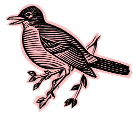
左辺$=\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}$とおくと、正整数 n に対して、$n=p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$ と素因数分解したとき（ただし、$1\le j\le m$ について e_j は 0 以上の整数)、

$$b(n)=\begin{cases}1 & (n=1\text{のとき})\\ (-1)^{e_1+\cdots+e_m} & (e_j\text{が}0\text{と}1\text{のみからなるとき})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$



となる。この b はメビウス関数と呼ばれ、通常は μ であらわす。

2) $(\zeta(s))^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right)^2=\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right)=\sum_{m,n}(mn)^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{dd'=n}(dd')^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\sum_{dd'=n}1=\sum_{n=1}^{\infty} c(n)n^{-s}$ となる。よって、$c(n)=\sum_{dd'=n}1$ は n の約数の個数を表す関数である。



3) $\zeta(s-a)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s-a)}=\sum_{n=1}^{\infty} n^{a}\cdot n^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s}$ となる。よって、$c(n)=n^a$ である。

解説

1. 有名なオイラー積です。素因数分解と等比級数の式を組み合わせると出てきますが、厳密にやろうとすると少し手こずるかも知れません。解答では両方の向きの不等式を示すという方針でやっています。
2. 上の解答はある程度厳密にやったので略解としました。ζ を少しいじると重要な数論的関数が出てくるのは面白いところです。

今回の問題

1. (X,d_X), (Y,d_Y)：距離空間、$f:X\to Y$：写像とするとき、以下の 2 つは同値であることを示せ。
   1) f は X 上一様連続である。
   2) $\varphi,\psi:\mathbb{N}:\to X$ を $d_X(\varphi(n),\psi(n))\to 0(n\to\infty)$ をみたす任意の X の点列とするとき、$d_Y(f\circ\varphi(n),f\circ\psi(n))\to 0(n\to\infty)$

   ただし、f が X 上一様連続であるとは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、以下の条件をみたす $\delta>0$ が存在することを言う。
   「$x,x'\in X$ かつ $d_X(x,x')<\delta$ であれば、$d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$」
2. (X,d_X), (Y,d_Y)：距離空間、$f:X\to Y$：連続写像とする。このとき (X,d_X) がコンパクトならば f は X 上一様連続であることを示せ。
3. 「関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続かつ有界ならば、f は $\mathbb{R}$ 上一様連続」は正しいか。正しければ説明し、間違いであれば判例を挙げよ。

問題について一言

今回は「一様連続」に関しての出題です.一様連続の概念はけっこう微妙で勘違いしやすいので（私も勘違いしていました)、出題しました。1 題でも解けたら是非解答をお送り下さい。

宛先と締め切り

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2011 年 5 月 31 日(火)
郵送の方は数学工房オフィス宛にお願いします。

数学工房　2011年4月20日発行
発行人　桑野耕一
編集人　編集Gr. 増田卓・坂口尚文・平田裕一・半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：080-6576-2691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp　(携帯、緊急用)
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com
数学工房　教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F　202-203
数学工房　オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401