

Math.

NO.107
www.sugakukobo.com

会報2012年1月

数学工房



巻頭言



会員の皆様、本年もどうぞよろしくお願いいたします。

◆自分自身の中に数学の樹を育てる

数学工房では、数学の型を身につけることを、身につけることを大切にしています。しかし、それは自分で数学の世界を歩くための階梯にすぎません。「数学を自分のものにする」。数学工房でお手伝いできることは、その第一歩にすぎません。受け身で一回勉強して、それだけで終わりでは、学んだことは活きません。ご自身の数学の樹が育ち始めたらそれを大切に育ててください。数学が一生の親しい道連れになり、人生が豊かになると思います。

そのための第一歩として、できることから始めてみましょう。例えば、社会人なら仕事の行き帰りに、現在受けている講座の基本的な定義や命題を自分の言葉で整理するとか、気になっている公式を確かめるとかです。それぞれの立場で、少しずつでも時間を作って自律的に学ばれることが次につながる道ではないでしょうか。

◆時代を超えて

去年は、国内においても、また国外においても未曾有の天災に見舞われた年でした。それらをきっかけに、疲労した諸制度の欠陥があらわになり、政治経済に暗雲が立ち込めています。残念ながら、数理学もしばしば怠慢や犯罪のお手伝いとして使われ、また、いつそのようになってもおかしくない予備軍があちらこちらに散見されます。数学が（学校）教育において、もっとも馬鹿げた暗記科目になり果てている事実。多少とも事情を知る者の間では、長年の共通認識であるはずなのに、一つも事態が改善されていません。幼稚な政治家や、思いあがった企業家、学者などを笑えないところです。

歴史を振り返ると、ある時代の終わり、文明のある階梯での腐敗と終末は何度も繰り返されています。新しい時代の始まりが、きっと近いのかもしれませんが。未来のために、少しでも数学の良い型を残しておくことは、無駄ではあるまいと思います。

◆今年の講座

私の経験では、数学書や論文を一人で読まれている方がつまづかれているのは、案外高級なところではないようです。線形代数や位相の部分を漫然と勉強された結果でしょう。それどころか、基本語彙と文法に属する手の仕事の部分でつまづいている方もいかに多いことかと感じています。基本の大切、手の大切です。今年もこの大切を踏まえて講座の企画を立てていきます。

本来、解析学が中心だった数学工房で、「昨年は珍しく代数系の科目が目立った」と、会員の方からの感想がありました。これは、基本技術のバランスという観点を多少考慮した結果です。今年は、高度な予備知識がいる講座（そこから先はご当人の嗜好に沿って一人で行かれるよりありません）を整理して、解析学や多様体の中級講座を新規に基本から始める予定です。

1月の春学期から始まる新講座は「初級 解析教程」です。「数学とは何か？解析学とは何か？」という問いを歴史的な発見のアイデアに沿って辿った従来の「入門 解析教程」に対して、今回の「初級 解析教程」は、文字通り標準的な立場の解析学です。また昨年は開講しませんでした。今年は4月より「抽象線形代数 1-3」を開講いたします。この講座は、高度な数学の諸分野へ、将来、展開することを念頭に置いて作られています。例えば、数学工房の講座では多様体におけるグローバルな理論の見通しが、通常より良いものとなっているのは、この講座での習熟が聴講者に期待できるからです。

鈴木桜子講師の基本語彙と文法から始める確率論は集中セミナーで好評でしたが、同様のスタンスで秋学期から確率論の講座を計画しています。古典に学ぶ講座は、Siegel 先生の”Analytisch Zahlentheorie”の中から乗法的整数論を4学期にわたって行ってきましたが、昨年、いったん終了しました。今年は夏学期から岩沢健吉先生の「代数関数論」より基礎的な章を取り上げて講読の演習をする予定です。困難も楽しみの一つとして受け入れながら、今年もぜひ数学を楽しみ、技量を向上させてください。

数学工房 桑野耕一 2012年 1月



2012 年春学期の開講講座は

- 入門 IA、ID、IF、IH
- 入門・初級 IB
- 入門・中級 IC、IE
- 初級 EA、EB
- 中級 MC

の 10 講座です。

講座によって一回の授業時間、開催間隔が異なりますので十分に注意してください。

- ・IB、ID、IF、IH の 4 講座は、一回 2 時間で隔週 6 回開催（通常講座）。
- ・IA、IE、EA、MC の 4 講座は、一回 3 時間で隔週 4 回開催。
- ・IC は、一回 4 時間で毎週 3 回開催。
- ・EB は、一回 3 時間で毎週 4 回開催。

詳細な開催スケジュールを数学工房ホームページに記載しています。必ずご確認の上、お申し込みください。

<http://www.sugakukobo.com>

—入門—

■ IA 解析教程 I

1 月 29 日（日）開講 14:00—17:00
隔週 4 回

- (1) イントロダクション 2 項係数・多項式補間
- (2) 数直線
- (3) 収束列・収束級数
- (4) 連続関数と 3 つの基本定理

→IA II 微分積分学（微分法の基本定理と Riemann-Stieltjes 積分）へ続く

■ ID 初等線型代数と微積分

1 月 22 日（日）開講 11:00—13:00
隔週 6 回

- (1) C^r 級関数
- (2) C^2 級関数と Hessian と Laplacian
- (3) 高階微分の Tensor 表示
- (4) 剰余付 Taylor-Lagrange 公式
- (5) 極値・極大・極小

■ IF 数学の基本語彙と文法

1 月 28 日（土）開講 11:00—13:00
隔週 6 回

- (1) 総和記号と数学的帰納法
 - 1) Σ
 - 2) 数学的帰納法
 - 3) 非順序和
- (2) 集合論からの概念と記号法
 - 1) 集合の算法
 - 2) 写像の像と原像
 - 3) 写像の算法
- (3) 変換群

■ IH 代数系入門 Polynomials とイデアル

1 月 27 日（金）開講 19:00—21:00
隔週 6 回

- (1) 多項式空間のイデアルとイデアルの算術
- (2) 多項式空間の線型空間への作用と線型変換の最小多項式・固有値
- (3) 円分多項式
- (4) Fibonacci 型多項式

—入門・初級—

■ IB 複素関数論 有理型関数

1 月 29 日（日）開講 11:00—13:00
隔週 6 回

- (1) 孤立特異点
 - 1) 除去可能な特異点と極
 - 2) 極の近傍における正則関数の挙動
 - 3) 本質的特異点 Weierstrass-Casorati の定理
- (2) 有理型関数の一般論
 - 1) 基本概念
 - 2) 有理型関数の代数
 - 3) 有理型関数体 代数と位相
- (3) 附値
- (4) 有理型関数の収束級数
- (5) 有理型関数の収束級数

—入門・中級—

■ IC Unitary 表現への招待 II

3月24日(土) 開講 14:00—18:00
毎週3回

- (1) Fourier 級数と群の表現
- (2) 線型 Lie 群
- (3) $SO(3)$ の Unitary 表現

■ IE Hilbert 空間上の作用素

1月28日(土) 開講 14:00—17:00
隔週4回

- (1) 自己共役作用素のスペクトル定理の理解
- (2) 自己共役作用素の解析
- (3) 強連続 1-パラメータ変換群と Stone の定理

—初級—

■ EA 抽象位相への招待

1月22日(日) 開講 14:00—17:00
隔週4回

- (1) Filter 概論
- (2) 始位相・終位相
- (3) Baire Category 定理

■ EB 現代ベクトル解析 微分・線積分

3月18日(日) 開講 14:00—17:00
毎週4回

- (1) 実数値関数の 2 階微分と Hessian・Laplacian・調和関数
- (2) 高階微分と C^r 級関数
- (3) ベクトル場の高階微分、Taylor 公式
- (4) ベクトル場の発散
- (5) 3次元 Euclid 空間のベクトル解析

—中級—

■ MC 複素多様体論 (Lie 群と等質空間)

2月4日(土) 開講 14:00—17:00
隔週4回

- (1) 1-パラメータ部分群と指数写像
- (2) Lie 群の標準座標
- (3) 複素多様体概論

[料金]

各講座とも 1 講座 ¥30,000 (税込)、学生
¥21,000 (税込)。

途中参加の場合、

- (1) IB、ID、IF、IH の 4 講座は、参加回数×¥5,000 + ¥2,000 (テキスト代・手数料) / 学生 参加回数×¥3,500 + ¥2,000 (テキスト代・手数料)
- (2) IA、IE、EA、MC の 4 講座は、参加回数×¥7,500 + ¥2,000 (テキスト代・手数料) / 学生 参加回数×¥5,000 + ¥2,000 (テキスト代・手数料)
- (3) IC は、参加回数×¥10,000 + ¥2,000 (テキスト代・手数料) / 学生 参加回数×¥7,000 + ¥2,000 (テキスト代・手数料)
- (4) EB は、参加回数×¥7,500 + ¥2,000 (テキスト代・手数料) / 学生 参加回数×¥5,000 + ¥2,000 (テキスト代・手数料)

お支払方法については事前にお申し出があれば柔軟に対応しますので御相談下さい。

[お申し込み・お問い合わせ先]

e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp

申し込みの状況やご要望等によって、若干の変更が生じる場合もございますので、開講講座の最新情報は工房のホームページを必ずご確認ください。

<http://www.sugakukobo.com>

受講者数確認の都合上、お申込みはできるだけ早めをお願いします。



会 員 か ら の メ ッ セ ー ジ



今回の会員からのメッセージは増田亮さんに寄稿していただきました。大学院生である増田さんは、ご自身の研究と数学に今後どう向き合っていけばよいか、現在の心境について書いてくださいました。

■ 私と数学工房 (増田 亮)

私は現在、大学院博士課程の1年生です。専攻は数学です。微分位相幾何学の応用に興味があり、少し前から経済学〔数理経済学〕の正則経済理論という分野に取り組んでいます。

数学工房には、私が数学科の3年生だった2007年9月に入りました。「数学が出来るようになりたい、特に、苦手な微分積分学を克服して、線型代数学のように得意にしたい」との思いからでした。

しかし、数学工房で学んでいくうちに、この認識が間違っていることに気付きました。講座 ID を受講したとき、「大学では二分されている線型代数学と微分積分学は、密接に関係した数学」だと知ったのです。今ならすんなりと受け入れられますが、当時は別個の数学だと捉えていたので驚

きました。また、続けて受講した講座 G では、大学で学んだ線型代数よりもさらに発展した線型代数（抽象線型代数）があることを知りました。線型代数学が得意というのも勘違いであったと気付かされました。「結局数学について何も分かっていなかったのか」とがっかりしましたが、理解が浅かったことに気付けたのだから、数学工房に入って良かったなと思い直しました。

それ以後、数学の概念が互いにどうつながっているかに注意を払うようにしました。すると、大学で学んだときはバラバラだった数学の知識が、頭の中で、段々とつながっていくようになりました。そのうちに考えることが楽しくなり、もっと深いところまで数学をやりたいと思うようになりました。

そんな気持ちで大学院に進みましたが、実際研究をしていくには、つまり、1人で数学の世界を歩くには、遠くまで見渡せる目を持ち、自分は今

どこにいて、どこへどう進むのかを判断しなければなりません。残念ながら私にはまだその力が足りていませんので、引き続き数学工房の講座で鍛えていきたいと思います。

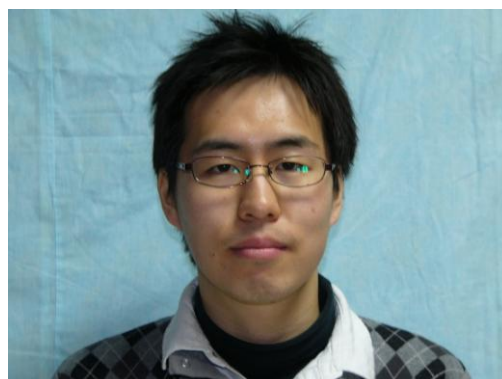


写真1 増田亮さん



入門 桑野道場 (第18回)

/// 記 桑野道場師範代 半田伊久太 ///



前回の問題

問題3.の後半が切れてしまっていて大変失礼しました。正しくは以下のようになります。

1. 実 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を満たすとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu = \alpha$ を示せ。
2. $\frac{\log(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t}$ ($x > 0$) と見て $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を示せ。
3. $a > 0$ を定数として f を区間 $[a, \infty)$ 上の C^1 -級関数とする。さらに f は単調減少で $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ かつ $\int_a^\infty f(t) dt < +\infty$ とする。このとき $\int_a^\infty t f'(t) dt$ が存在して $xf(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ であることを示せ。
4. 3.の級数バージョンの問題を考え解答せよ。

解答

福島県の鈴木さんから解答を頂いております。1. 2. 4. が正解されておりますので紹介します。

1. 鈴木さんの解答

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな番号 n_0 をとれば、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ for all $n \geq n_0$ が成り立つ。

$M := \max\{|a_k - \alpha|; 1 \leq k \leq n_0\}$ とおく。 $n \geq 2Mn_0/\varepsilon$ のとき、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu - \alpha \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (a_\nu - \alpha) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n_0} (a_\nu - \alpha) + \frac{1}{n} \sum_{\nu=n_0+1}^n |a_\nu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2Mn_0} \cdot Mn_0 + \frac{n - n_0}{2n} \varepsilon \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu = \alpha$

2. 鈴木さんの解答

任意の正整数 n に対して $a_n = \frac{1}{n}$ とおくと、 $y = \frac{1}{x}$ のグラフを考えることにより、任意の正整数 N に対して

$$\sum_{n=2}^N a_n \leq \int_1^N \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n \text{ が成立する。前の結果から } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu = 0 \text{ であり、} \frac{1}{N} \sum_{n=2}^N a_n \leq \frac{1}{N} \int_1^N \frac{dt}{t} = \frac{\log N}{N} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} a_n \text{。だ}$$

から $\frac{\log x}{x}$ は $x \geq e$ で単調減少であることに注意すれば、 $\frac{\log x}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$

別解

$\frac{1}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ より $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 \text{ s.t. } x_0 \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$ である。 $f(x) := \frac{\log x}{x} = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t}$ ($x > 0$) とおく。 $x_0 \leq x$ のと

き $0 \leq f(x) = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_1^{x_0} \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x \frac{dt}{t}$ である。ここで $\frac{1}{x} \int_{x_0}^x \frac{dt}{t} < \frac{\varepsilon}{x_0} \int_{x_0}^x dt = \frac{x - x_0}{x_0} \varepsilon \leq \varepsilon$ となる。したがって、 $x_0 \leq x$

のとき $0 \leq f(x) < \frac{1}{x_0} \int_1^{x_0} \frac{dt}{t} + \varepsilon$ となる。 $x \rightarrow \infty$ として上極限をとると $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \varepsilon$ となる。また、下極限を

とって上の結果とつなげると $0 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \varepsilon$ となる。 $\varepsilon > 0$ は任意だから $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ となる。

3. f は単調減少で $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ より $f(x) \geq 0 (x \in [a, \infty))$ であることに注意する。また、 f の単調減少性より $f'(x) \leq 0$ である。よって $F(x) := -\int_a^x t f'(t) dt$ とおくと、 F は単調増加かつ $F(x) \geq 0$ である。よって、 F が上に有界なことを言えばよい。部分積分により任意の $x \in [a, \infty)$ に対して、

$$\int_a^x f(t) dt = x f(x) - a f(a) - \int_a^x t f'(t) dt$$

従って、 $F(x) = a f(a) - x f(x) + \int_a^x f(t) dt \leq a f(a) + \int_a^\infty f(t) dt$ となる。 $x \in [a, \infty)$ は任意だから F は上に有界。

即ち、 $\int_a^\infty t f'(t) dt$ は存在する。次に $x f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ を示す。Cauchy の判定則から

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in [a, \infty) \text{ s.t. } x_0 \leq x \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt < \varepsilon$ が成り立つ。 $x \geq t \geq x_0$ のとき $g(t) := -(t - x_0) f'(t)$ とすると

$g(t) \geq 0$ であるから部分積分すると、 $\varepsilon > \int_{x_0}^x f(t) dt = [(t - x_0) f(t)]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (t - x_0) f'(t) dt \geq (x - x_0) f(x)$ となる。

したがって、 $x_0 \leq x \Rightarrow x f(x) < x_0 f(x) + \varepsilon$ である。 $x \rightarrow \infty$ として両辺の上極限をとれば $\limsup_{x \rightarrow \infty} x f(x) \leq \varepsilon$ が成

り立つ。 $x f(x) \geq 0$ より $0 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} x f(x)$ である。よって $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$

$x f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ の別解：桑野先生による

f は単調減少だから任意の $x \in [a, \infty)$ に対して、 $2 \int_{x/2}^x f(t) dt \geq x f(x) \geq 0$ となる。 $\int_a^\infty f(t) dt < +\infty$ より

$2 \int_{x/2}^x f(t) dt \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ となる。よって $x f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$

4. (a) 問題：数列 $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ は単調減少で $a_\nu \rightarrow 0 (\nu \rightarrow \infty)$ 。さらに $\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu < \infty$ とする。このとき和 $\sum_{\nu=1}^\infty \nu(a_{\nu+1} - a_\nu)$ は存在し $n a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ であることを示せ。

(b) 解答：仮定から $a_\nu \geq 0 (\nu \in \mathbb{N})$ に注意。 $S_n := \sum_{\nu=1}^n \nu(a_\nu - a_{\nu+1}) (n \in \mathbb{N})$ とおく。数列 $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ が単調減少である

ことから、数列 $\{S_n\}$ が単調増加であることは明らか。さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{\nu=1}^n \nu(a_\nu - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=1}^n \nu a_\nu - \sum_{\nu=1}^n \nu a_{\nu+1} \\
&= \sum_{\nu=1}^n \nu a_\nu - \sum_{\nu=2}^{n+1} (\nu-1)a_\nu = \sum_{\nu=1}^n \nu a_\nu - \sum_{\nu=2}^{n+1} \nu a_\nu + \sum_{\nu=2}^{n+1} a_\nu \\
&= a_1 - (n+1)a_{n+1} + \sum_{\nu=2}^{n+1} a_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu
\end{aligned}$$

よって数列 $\{S_n\}$ は上に有界。したがって、和 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(a_{\nu+1} - a_\nu) = -\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は存在する。

次に $na_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ を示す。 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty$ であるから Cauchy の判定則により、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n_0 \leq n \Rightarrow \sum_{\nu=n_0+1}^n a_\nu < \varepsilon$$

$n_0 \leq n$ のとき数列 $\{a_n\}_n$ の単調減少性に注意して

$$na_n = n_0 a_n + (n - n_0) a_n = n_0 a_n + a_n \sum_{\nu=n_0+1}^n \leq n_0 a_n + \sum_{\nu=n_0+1}^n a_\nu < n_0 a_n + \varepsilon$$

ここで両辺の上極限をとると $\limsup_{n \rightarrow \infty} na_n < \varepsilon$ となる。また、 $0 \leq na_n (n \in \mathbb{N})$ により $0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} na_n$ である。以

上のことから $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ 。

解説

1. 数列のチェザロ平均の問題です。鈴木さんは「 $n \geq 2Mn_0 / \varepsilon$ のとき」とかつこよく解いています。
2. いろんなやり方がありますが、鈴木さんは積分を級数ではさんで前問を用いて解かれています。ここでは 1. の $\sum$ を $\int$ で置き換えて解答してもらうのが主旨でしたが、その方法は別解にしました。前問とやり方を少しだけ変えて上極限を使った解答です。もちろん鈴木さんのやり方も正解です。
3. 私がネットで見つけた問題 4. を桑野先生が改題したものです。見た目がかなり変わっていますが、3. と 4. は本質的には同じ問題です。部分積分を用いて収束性を見やすくする典型的な問題です。
4. 3. の $\int$ を $\sum$ に置き換えた問題です。3. のまねをして解答できるわけです。

● アーベルの変形について

4. で出てきますが部分積分の級数バージョンをアーベルの変形(他にもいろんな呼び方があります)

といいます。即ち、数列 $\{b_n\}, \{p_n\}$ が与えられたとき $s_n := \sum_{\nu=1}^n b_\nu$, $S(m, n) := \sum_{\nu=m}^n b_\nu p_\nu$ と置くと、

$$\begin{aligned}
S(m, n) &= \sum_{\nu=m}^n (s_\nu - s_{\nu-1}) p_\nu = \sum_{\nu=m}^n s_\nu p_\nu - \sum_{\nu=m}^n s_{\nu-1} p_\nu \\
&= \sum_{\nu=m}^n s_\nu p_\nu - \sum_{\nu=m-1}^{n-1} s_\nu p_{\nu+1} = s_n p_n - s_{m-1} p_m + \sum_{\nu=m}^{n-1} s_\nu (p_\nu - p_{\nu+1})
\end{aligned}$$

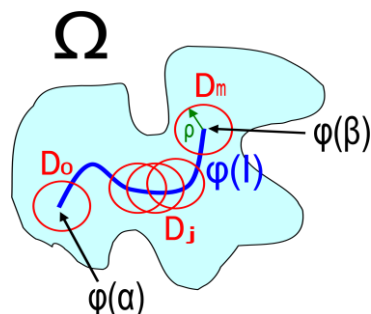
と変形することをアーベルの変形といいます。ある特別なタイプの特例だが重要な条件収束の評価に有用な働きをします。

● 別解について

4. の別解 2 はチェザロ平均の考え方による解答です。実はこちらの方を最初思いつきました。アーベルの変形を使うやり方がわからないので桑野先生に相談したところ、3. の問題ができたわけです。3. も同じようなやりかたで出来ます。また、3. の別解は 4. の鈴木さんのやり方から桑野先生が考えたものです。これらのやり方の利点は $xf(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ を示すだけなら f の微分可能性を必要としないところです。

今回の問題

- (a) a, b を複素数とすると $|(1+a)(1+b)-1| \leq (1+|a|)(1+|b|)-1$ を示せ。
(b) もっと一般に $a_1, \dots, a_n$ を複素数とすると $\left| \prod_{j=1}^n (1+a_j) - 1 \right| \leq \prod_{j=1}^n (1+|a_j|) - 1$ であることを示せ。
- $a_1, \dots, a_n$ を複素数で $|a_j| \leq 1 (j=1, \dots, n)$ とすると $\prod_{j=1}^n (1-|a_j|) \geq 1 - \sum_{j=1}^n |a_j|$ であることを示せ。
- Ω をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 上の空でない開集合とする。閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上の連続写像 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ を考える。
(即ち、 Ω 上の曲線 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ を考える。) このとき以下の条件を満たす $\rho > 0$ と $\mathbb{R}^2$ 上の有限個の開円盤 $D_0 \cdots D_m$ が存在することを示せ。
 - D_j の半径は $\rho (j=0, \dots, m)$ (即ち、円盤の半径は全て同じ ρ)
 - $D_j \subset \Omega (j=0, \dots, m)$ (即ち、円盤は全て Ω に含まれる)
 - $\varphi([\alpha, \beta]) \subset \bigcup_{j=1}^m D_j$ (即ち、曲線全体は円盤全体で覆われる)
 - D_j の中心を c_j とすると、 $c_j \in \varphi([\alpha, \beta]) (j=0, \dots, m)$ である。ただし $c_0 \in \varphi(\alpha), c_m \in \varphi(\beta)$ である。(即ち、円盤の中心は全て曲線上にあり、更に D_0 と D_m の中心はそれぞれ曲線の始点と終点に一致する)
 - $c_{j-1}, c_j \in D_{j-1} \cap D_j (j=1, \dots, m)$ (即ち、番号の隣り合う円盤の中心を互いに含む)



ただし、閉区間 $[\alpha, \beta]$ はコンパクトであること、コンパクト集合上の連続写像 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ は一様連続であることは既知とする。

問題について一言

2011 年夏の集中セミナー「複素対数と無限乗積」で出題された問題です(桑野先生出題)。1. と 2. は両辺を丁寧に比較してみましょう。もちろん絶対値に関する三角不等式は既知とします。3. はまずなんらかの方法で円盤が Ω からはみ出ないように $\rho > 0$ を決めましょう(閉区間 $[\alpha, \beta]$ のコンパクト性に注目するといいかもかもしれません)そして条件に合うように閉区間 $[\alpha, \beta]$ を十分小さく分割してみましょう。この補題は路に沿った解析接続などで基本的な役割を果たします。もちろん違うやり方でもかまいません。解答お待ちしております。

宛先と締切

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2012 年 2 月 29 日(水)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房 2012年1月20日発行

発行人 桑野耕一

編集人 編集Gr. 増田卓・坂口尚文・平田裕一
・半田伊久太



連絡先

オフィス電話：042-495-6632

数学工房連絡専用(携帯)：080-6576-2691

連絡は極力eメールをご利用下さい。

e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)

ホームページ：

<http://www.sugakukobo.com>

数学工房 教室

〒170-0003

豊島区駒込1-40-4

全国蕎麦製粉会館2F 202-203

数学工房 オフィス

〒204-0023

清瀬市竹丘1-17-26-401

