

Math.

NO.108
www.sugakukobo.com

会報2012年4月

数学工房



新年度の講座開講にあたって



夏学期の御案内をお送りします。数学工房ではご自分の手で、ご自分の足で、ご自分のハートで数学をやることのできるための手助けをさせていただいています。いつも申し上げていることですが、学ばれたことと考えられたことを、ちょっとした時暇を見つけては、一步一步大きな絵にしていきましょう。いくら勉強をしてもそれだけでは数学的真理の世界の扉は開きません。

今期の中心は前年度お休みしていた初級の抽象線形代数と距離空間と解析序説です。基本語彙と文法と並んで、これらの講座は絵を描くのに必要な技術的な基礎を与えています。また多様体の講座は初級講座を一通り修了されたかたが、それまでに学ばれたことを状況に合わせて使う演習です。以上の講座の性格を理解してご自身の絵の仕上げに役立ててください。

数学工房 桑野耕一 2012年 4月半ば



夏学期講座案内

2012年5月～8月



2012年夏学期講座は、入門4講座、初級3講座、中級3講座を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	5月20日	入門
I.D	初等線型代数と多次元空間の微積分	5月13日	入門
I.E	位相線型空間と関数空間	5月19日	初級
I.F	数学の基本語彙と文法	5月19日	入門
I.H	無限の作法	5月18日	入門
E.A	距離空間と解析序説	5月13日	初級
E.B	現代ベクトル解析	6月30日	初級
G.	抽象線型代数	5月15日	初級
M.B	解析の基礎としての多様体	5月26日	中級
M.C	複素多様体	7月21日	中級
I.S	数学の古典を読む 岩沢健吉 代数関数論から	6月24日	中級

◆I.A 解析教程

春学期から始った新教程です。本格的な解析学への基礎を扱っています。扱いは全体として現代的になっています。初級中級で扱うことになる現代的な解析学の基本の雛型はこの部分にあります。今年度直接関連する講座としては、ID、EB、MB などがあります。今期は古典的微積分の基礎を扱っています。来期はこの結果を踏まえて、まず収束級数の一般論を展開し、関数項の級数の一般論と古典論の中心である初等超越関数を取り扱います。

- (1) 連続性に関する3つの大域的性質
- (2) 微分可能性と可微分関数の基本的性質
- (3) C-1級関数のクラス、局所定数関数
- (4) 高階微分の概念 C-r級関数
- (5) Riemann 積分、微積分の基本定理
- (6) Taylor の定理

◆I.D 多次元空間・多変数の微積分と初等線型代数

多次元空間は多変数の微積分とともに出現し、解析学が展開される場として19世紀の半ば Riemann や Grassmann の半ば哲学的な性格を持つ見通しに従って研究が始まり19世紀の後半には、数学者にはポピュラーなものになります。そして線形代数は、数論や幾何学、解析学に組織的な取り扱いの方法を与えます。そして20世紀前半になると無限次元の関数空間が現れ、さらに統一原理として抽象線形空間が現れます。この講座の目的は、多変数解析学の基礎と線形代数の結びつきを認識していただくことと、ベクトル解析や多様体への、ステップを準備することです。

- (1) 数ベクトル空間
- (2) 内積・直交性
- (3) Euclid 空間の初等幾何
- (4) 線形部分空間、Span、独立、従属
- (5) 行列と線形写像、微分



◆I.E 位相線形空間と関数空間

抽象線形代数、抽象位相にはある程度の習熟を期待する。函数解析でしばしばあらわれる、Banach 空間

にならない関数空間に親しんでもらうこと、また作用素環の代数的位相的部分の基礎素養を提供することを目的としている。我々は純粋代数と位相のギリギリの相互作用を見ることになるだろう。附値体当も統一的に扱う。Hilbert 空間上の有界作用素の理論と並んで作用素環を学ぶ上での必須の素養である。

参考 Schaefer Topological Linear space

F.Treue 位相ベクトル空間・超関数・核

宮島静雄 函数解析

< 1 > 位相線形空間の概念

- (1) 位相線形空間の公理と直接の帰結
- (2) 原点の近傍系
- (3) 原点の閉近傍系と Hausdorff 性
- (4) 位相線形空間の直積・部分空間・直和・商空間
- (5) 有限次元位相線形空間
- (6) 超平面・線形多様体

◆I.F 数学の基本語彙と文法

どのような分野の数学をやるにせよ、現代の数学をやるには必須の最低限の技術的知識です。それ以前の知識にかかわりなくこの部分に難点があるとご自分で本格的に数学をやる際の躓きの石になります。(実際長年の経験ではこの部分が不確かな方が多い!) この部分に十分に習熟されている例外的な方を除いては、なるべく早いうちの履修をお勧めします。

< 1 > 総和記号と数学的帰納法

- (1) Σ
- (2) 数学的帰納法
- (3) 非順序和

< 2 > 集合論からの概念と記号法

- (1) 集合の算法
- (2) 写像の像と原像
- (3) 写像の算法

< 3 > 変換群



◆IH 無限の作法

IF の続編で数学の様々な分野で用いられる無限に関係する有用な基礎論法を取り扱う。IF 同様理解し使いこなすことが重要!

- (1) 集合の対等と濃度
- (2) 可算集合・非可算集合
- (3) Zorn の補題
- (4) 無限次元線形空間と Hamel 基底
- (5) 非可測集合の存在

◆IS 代数関数論を読む

岩沢健吉 代数関数論 (岩波書店) から。

3 章・4 章から Riemann 面の基礎理論を紹介するつもりだったが、分量が何分多いのでやりかたを考えている。詳細に立ち入らない Riemann 面と楕円関数の良い解説が複素解析 高橋礼二 基礎数学 8 東京大学出版会にある。Riemann 面の話はこの本の程度にしてむしろ代数的な 1 章 2 章のほうをとろうかとも思っている。

◆G 抽象線型代数

今年度通常講座 3 期、集中セミナー 2 つからなる本

格的な線形代数の型稽古の体系です。

今期は表現論等にかんがみ取り扱いが改定されている。関連講座として IE 位相線形空間論があります。この講座や MB 多様体の講座は当然 G の内容への習熟が要求されます。今期は線形空間の構造を丁寧に扱います。この部分は我々の通常の空間の背後にある根源的な性格を取り出したものです。

I 表現と実在 (線型空間論)

- (1) 線型空間の定義と典型的な線型空間
- (2) 線型部分空間、部分空間の共通部分と和
- (3) 生成される線型空間、直和
- (4) 線型従属・独立
- (5) 次元と基底、座標写像
- (6) 抽象の用法

◆EA 位相と解析序説

- (1) 距離関数、距離空間 定義と典型例
- (2) 近傍系、開集合系、閉集合系 閉包 開核
- (3) 点の位相的分類
- (4) 点列の基本的性質・完備性
- (5) 連続関数・一様連続関数
- (6) 距離空間の正規性

◆EB 現代ベクトル解析

春学期は多変数の高階微分、Taylor 公式、多変数の極値・臨界値まで丁寧に扱った。今回はその続編である。参考書をあえて 1 冊あげるなら 現代ベクトル解析 (岩波) の第 8 章

- (1) 1-パラメーター群と微分方程式
- (2) Divergence
- (3) 3 次元空間のベクトル解析
- (4) 調和ベクトル場
- (5) 曲面と接空間



◆MB 解析学のための多様体入門

今学期から 6 期にわたり多様体の基礎概念から出発し Riemann 多様体上の調和解析の基礎付けまでの連続講座です。標準的な参考書で言うと 松島 多様体入門の Lie 群、Lie 環を除いた部分を取り上げます。11 年にも多様体の概略を取り上げましたが、前年度は Lie 群の準備のためのまとめでした。今年度は、入門、初級で学ばれたことを総合して用いる稽古です。IA, IF, ID, EA, G で学ばれたことを局面に合わせて柔軟に繊細に用いることを学びます。

- (1) 多様体の定義
- (2) 可微分関数と局所座標
- (3) 接空間と自然基底
- (4) 可微分写像と臨界点
- (5) ベクトル場と微分作用素

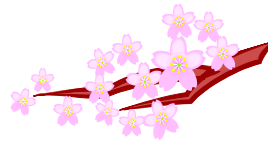
◆MC 複素多様体

実多様体の概略は既知としたアドヴァンストコースです。複素 Lie 群、球関数等への準備です。

- (1) 基本事項 実線形空間の複素化、n 次元複素線形空間、正則関数
- (2) 複素多様体
- (3) 複素構造と積分可能性
- (4) 複素微分形式

[料金]

各講座とも1講座¥30,000(税込)、学生¥21,000(税込)。途中参加の場合、参加回数×¥5,000+¥2,000(テキスト代・手数料)です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めをお願いします。



会 員 か ら の メ ャ セ ー ジ



今回の会員からのメッセージは福田慧さんに寄稿していただきました。福田さんは、現在カルフォルニア大学バークレー校で経済学を研究しています。福田さんには経済学と数学工房での抽象数学との関連性について寄稿していただきました。

■経済学における Riesz の表現定理 (福田 慧)

2008年1月に入会した福田慧と申します。2011年の春まで数学工房で約3年間抽象数学に触れ、今はアメリカの大学院博士課程で経済学を学んでいます。私が元々経済学に興味を持ったのは、数学という言葉を通して(自然現象は然ることながら)人間行動や社会現象を理解したいと思うようになったことにあります。私が数学工房に入会した主たる理由は、厳密な、あるいは抽象的な数学を体系的に学びたかったことにありますが、今回は、経済学における抽象数学の使用の一例として、Riesz の表現定理を取り上げたいと思います。これは、私が数学工房で学んだ数学の中でも Riesz の表現定理が印象に残っていることにもよります。



写真1: 福田聡さん

まずはじめに、(有限次元実内積空間における) Riesz の表現定理について確認したいと思います。(有限次元・実)内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ および線型写像 $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、唯一の $\nabla \varphi \in V$ が存在し、 $\varphi(\cdot) = \langle \cdot, \nabla \varphi \rangle$ が成り立つ。

経済学では、人間の意思決定を制約条件の元での目的関数の最大化問題として捉えますが、この意思決定問題に関して不確実性が存在する場合について考えましょう。まず、意思決定者が直面している状況全体の(簡単のために有限)集合を $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ としましょう。例えば、あたり (x_1) ・はずれ (x_2) があるくじを考える場合は $X = \{x_1, x_2\}$ になります。そして、 X 上の確率測度 $\pi: X \rightarrow [0,1]$ の集合を $\mathbb{R}^n$ の凸部分集合

$$\Delta X = \{\pi \in \mathbb{R}^n: \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \pi_i \geq 0 \text{ (for all } i)\}$$

と同一視しましょう。ここで、例えば、確率1で x_1 が実現する $\delta_1 \in \Delta X$ と逆に確率1で x_2 が実現する $\delta_2 \in \Delta X$ のどちらが意思決定者にとって好ましいかなどを表すために、 ΔX 上の完備性・推移律を満たす二項関係 $\succsim$ (このような二項関係を選好関係と呼びましょう)が存在するとしましょう。つまり、

- 任意の π, ρ について、 $\pi \succsim \rho$ または $\rho \succsim \pi$ が成り立つ (完備性 (完全性・比較可能性))
- 任意の π, ρ, σ について、 $\pi \succsim \rho$ かつ $\rho \succsim \sigma$ ならば $\pi \succsim \sigma$ (推移律)

が成り立ち、 $\pi \succsim \rho$ を(意思決定者は) π を少なくとも ρ よりも好むと読みましょう。このときに、第一に、どのような条件の元で選好関係を表現するような関数は存在するのだろうか(どのような条件の元で意思決定者の主観的な好みを表現する関数が存在すると言えるのか)、第二に、このような関数を内積で表現することは可能かどうか、ということについて考えたいと思います。まず、最初の問いについて、Hernstein と(数学者の)Milnor が示した以下のような定理があります。 Π を $\mathbb{R}^n$ の凸部分集合としましょう。

定義 (Affine 関数): 関数 $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ が Affine であるとは、任意の $\pi, \rho \in \Pi$ および任意の $\alpha \in (0,1)$ について、 $f(\alpha\pi + (1-\alpha)\rho) = \alpha f(\pi) + (1-\alpha)f(\rho)$ が成り立つことと定義する。

補題 (Affine 関数の拡張定理): 関数 $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ が Affine であるならば、すべての $\pi \in \Pi$ について $\tilde{f}(\pi) = f(\pi)$ が成り立つような f の拡張 $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

定理 (Hernstein and Milnor): Π 上に定義された選好関係が(以下に定義される)独立性およびアルキメデス性を満たすことと、

$$\pi \succsim \rho \text{ if and only if } U(\pi) \geq U(\rho)$$

を満たす Affine 関数 $U: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することは同値である(このような U を選好関係 $\succsim$ の表現と呼びます)。

定義 (独立性・アルキメデス性): Π 上の二項関係 $\succsim$ が独立性を満たすとは、任意の $\pi, \rho, \sigma \in \Pi$ および $\alpha \in (0,1)$ について、

$\pi \succ \rho$ if and only if $\alpha\pi + (1-\alpha)\sigma \succ \alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ を満たすことをいう。 Π 上の二項関係 $\succsim$ がアルキメデス性を満たすとは、任意の $\pi, \rho, \sigma \in \Pi$ および $\alpha \in (0,1)$ について、

- $\pi > \rho$ if and only if $\alpha\pi + (1-\alpha)\sigma > \alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ (ただし、 $\pi > \rho$ は $\pi \succ \rho$ かつ $\rho \not\succ \pi$)
- $\pi \sim \rho$ if and only if $\alpha\pi + (1-\alpha)\sigma \sim \alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ (ただし、 $\pi \sim \rho$ は $\pi \succsim \rho$ かつ $\rho \succsim \pi$)

第二に、本題である Riesz の表現定理(厳密には、

Affine 関数の表現定理)である von Neumann-Morgenstern の期待効用定理について考えたいと思います。

定理 (von Neumann and Morgenstern): ΔX 上の選好関係が独立性およびアルキメデス性を満たすことと、

$$U(\pi) = \sum_{x \in X} v(x)\pi(x) = \sum_{i=1}^n v(x_i)\pi_i = \langle \pi, v (= \nabla U) \rangle.$$

を満たす関数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することは同値である。不確実性の元での選択行動を考える際に、不確実性全体 ΔX で定義された目的関数 (効用関数) U を考える際に、実はその双対である $v (= \nabla U) \in \mathbb{R}^n$ を考えることで十分であることを意味しています。また、無限次元へ定理を拡張することもできます。Riesz の表現定理は、経済学の中では、(私が理解している限り) 線型写像としての価格や経済変数の期待値を表現する際に (意

識・無意識的に)使われています。 n 財が存在するような経済で価格ベクトル $p \in \mathbb{R}^n$ を線型汎関数 $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ と同一視したときに、均衡を達成するような価格 (線型汎関数) が存在するか否かという問題を考えるときは、やはり、Hahn-Banach の定理 (や Riesz の表現定理) がよく使われています。



写真2: カリフォルニア大学バークレー校



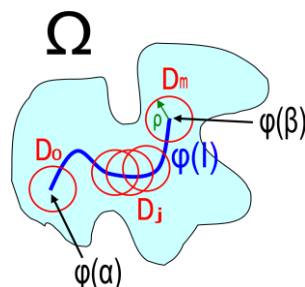
入門桑野道場 (第13回)

/// 記 桑野道場師範代 半田生久太 ///



前回の問題

1. (a) a, b を複素数とすると $|(1+a)(1+b)-1| \leq (1+|a|)(1+|b|)-1$ を示せ.
 (b) もっと一般に $a_1, \dots, a_n$ を複素数とすると $|\prod_{j=1}^n (1+a_j)-1| \leq \prod_{j=1}^n (1+|a_j|)-1$ であることを示せ.
2. $a_1, \dots, a_n$ を複素数で $|a_j| \leq 1 (j=1 \dots n)$ とするとき $\prod_{j=1}^n (1-|a_j|) \geq 1 - \sum_{j=1}^n |a_j|$ であることを示せ.
3. Ω をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 上の空でない開集合とする.
 閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上の連続写像 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ を考える. (即ち, Ω 上の曲線 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ を考える.)
 このとき以下の条件を満たす $\rho > 0$ と $\mathbb{R}^2$ 上の有限個の開円盤 $D_0 \dots D_m$ が存在することを示せ.
 (a) D_j の半径は $\rho (j=0, \dots, m)$. (即ち, 円盤の半径は全て同じ ρ)
 (b) $D_j \subset \Omega (j=0, \dots, m)$. (即ち, 円盤は全て Ω に含まれる)
 (c) $\varphi([\alpha, \beta]) \subset \bigcup_{j=1}^m D_j$. (即ち, 曲線全体は円盤全体で覆われる)
 (d) D_j の中心を c_j とすると $c_j \in \varphi([\alpha, \beta]) (j=0, \dots, m)$. ただし $c_0 \in \varphi(\alpha), c_m \in \varphi(\beta)$. (即ち, 円盤の中心は全て曲線上にあり, 更に D_0 と D_m の中心はそれぞれ曲線の始点と終点に一致する)
 (e) $c_{j-1}, c_j \in D_{j-1} \cap D_j (j=1, \dots, m)$. (即ち, 番号の隣り合う円盤の中心を互いに含む)



ただし, 閉区間 $[\alpha, \beta]$ はコンパクトであること, コンパクト集合上の連続写像 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ は一様連続であることは既知とする。

解答

広島県の熊野さんより 1. と 2. の解答をいただきました。1. は私の解答とほぼ同じ (熊野さんののは少し一般化されています) なので 2. のみ紹介します。

1. (a) 左辺 $= |a+b+ab|$, 右辺 $= |a| + |b| + |ab|$ であり三角不等式から左辺 $\leq$ 右辺.

$$(b) \text{ 左辺} = |\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} a_{j_1} a_{j_2} + \cdots + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} + \cdots + a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_n}|.$$

$$\text{右辺} = \sum_{j=1}^n |a_j| + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} |a_{j_1} a_{j_2}| + \cdots + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} |a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k}| + \cdots + |a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_n}|.$$

三角不等式から左辺 $\leq$ 右辺.

2. $b_j := |a_j| (j = 1 \cdots n)$ とおく. (以下, 別解も同じ記号を使用する)

$0 \leq b_j \leq 1$ のとき $\prod_{j=1}^n (1 - b_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^n b_j$ を n に関する帰納法で示す.

$n = 1$ のときは明らかに左辺 = 右辺.

$n - 1$ のとき不等式は成り立つと仮定する.

仮定より $\prod_{j=1}^{n-1} (1 - b_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j$ である. $1 - b_n \geq 0$ だから両辺に $1 - b_n$ を乗じると $\prod_{j=1}^n (1 - b_j) \geq$

$$(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j)(1 - b_n) = 1 - b_n - \sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n \sum_{j=1}^{n-1} b_j \geq 1 - \sum_{j=1}^n b_j. \text{ 従って } n \text{ のときも成り立つ. 帰納法}$$

は完了した.

(別解: 桑野先生による)

n に関する帰納法で示す. $n=1$ のときは明らかに等号成立,

$n - 1$ の時不等式は成立すると仮定する. $f(x) := (1 - b_1)(1 - b_2) \cdots (1 - b_{n-1})(1 - x) - 1 + b_1 + b_2 +$

$\cdots + b_{n-1} + x (0 \leq x \leq 1)$ とおく. $f'(x) = 1 - (1 - b_1)(1 - b_2) \cdots (1 - b_{n-1}) \geq 1 - 1 = 0$. よって $f(x)$

は $0 \leq x \leq 1$ で単調増加. また帰納法の仮定より $f(0) = (1 - b_1)(1 - b_2) \cdots (1 - b_{n-1}) - 1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \geq 0$. したがって $0 \leq x \leq 1$ で $f(x) \geq 0$. 即ち n のときも不等式は成立する. 帰納法は完了した.

(別解: 広島県の熊野さんによる)

$A_n := \prod_{j=1}^n (1 - b_j) - (1 - \sum_{j=1}^n b_j) (n = 1, 2, \cdots)$ とおく. 特に $A_1 = 0$. $n \geq 2$ のとき $0 \leq 1 - b_j \leq 1 (j =$

$1 \cdots n)$ に注意して, $A_n - A_{n-1} = \prod_{j=1}^n (1 - b_j) - (1 - \sum_{j=1}^n b_j) - (\prod_{j=1}^{n-1} (1 - b_j) - (1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j)) = b_n -$

$$b_n \prod_{j=1}^{n-1} (1 - b_j) = b_n (1 - \prod_{j=1}^{n-1} (1 - b_j)) \geq 0.$$

したがって $0 = A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_n$. 特に $\prod_{j=1}^n (1 - b_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^n b_j$.

3. $\rho := \inf \{ \|\varphi(t) - y\|; y \in \Omega^c, t \in [\alpha, \beta] \}$ とおく. ただし $\|\cdot\|$ は ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ のユークリッドノルム. $\rho > 0$ である. 実際 $\rho = 0$ だと $\forall n \in \mathbb{N} \exists t_n \in [\alpha, \beta] \exists y_n \in \Omega^c \text{ s.t. } \|\varphi(t_n) - y_n\| < 1/n$. $[\alpha, \beta]$ はコンパクトなので点列 $\{t_n\}$ の部分列 $\{t_{\tau(n)}\}$ と $t_0 \in [\alpha, \beta]$ が存在して $t_{\tau(n)} \rightarrow t_0 (n \rightarrow \infty)$. 任意 $\varepsilon > 0$ に対して

$\|\varphi(t_{\tau(n)}) - y_{\tau(n)}\| < \varepsilon/2$ かつ $\|\varphi(t_{\tau(n)}) - \varphi(t_0)\| < \varepsilon/2$ を満たす正整数 n が存在する. よって

$$\|y_{\tau(n)} - \varphi(t_0)\| \leq \|\varphi(t_{\tau(n)}) - y_{\tau(n)}\| + \|\varphi(t_{\tau(n)}) - \varphi(t_0)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \varepsilon > 0 \text{ は任意で } y_{\tau(n)} \in \Omega^c \text{ より}$$

$\varphi(t_0) (\in \varphi([\alpha, \beta]) \subset \Omega)$ は Ω の内点でない. これは Ω が開集合であることに反する. よって $\rho > 0$. $[\alpha, \beta]$ はコンパクトだから $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ は一様連続である. したがって以下の条件を満たす $\delta > 0$ が存在する: 「 $t, t' \in [\alpha, \beta]$ かつ $|t - t'| < \delta$ ならば $\|\varphi(t) - \varphi(t')\| < \rho$ 」

中心 $\varphi(t) (t \in [\alpha, \beta])$, 半径 ρ の開円盤を D_t をすると 明らかに $\{D_t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ は $\varphi([\alpha, \beta])$ の開被覆.

$\varphi([\alpha, \beta])$ はコンパクトだから $[\alpha, \beta]$ の分割 $\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ が存在して $\varphi([\alpha, \beta]) \subset \cup_{j=1}^m D_{t_j}$.

しかも必要なら分割 Δ の細分を取り直して $\min_{1 \leq j \leq m} (t_j - t_{j-1}) < \delta$ となるようにとれる. $D_j := D_{t_j} (j = 1 \cdots m)$ とすれば $D_0 \cdots D_m$ が求めるものである.

実際 (a) ~ (d) は明らか. (e) のみ示す. $j (1 \leq j \leq m)$ を任意に取る. $t_j - t_{j-1} < \delta$ だから $\|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| < \rho$. したがって $c_{j-1}, c_j \in D_{j-1} \cap D_j (j = 1, \cdots, m)$. (ここで $c_j := \varphi(t_j)$ は D_j の中心)

解説

- (a) 三角不等式そのものです.
(b) 上と同様です. 帰納法による証明も考えましたがうまくいきませんでした.

2. n に関する帰納法で示しました. 帰納法を使わない証明も考えましたがどうもすっきりしません. 桑野先生の解答は帰納法は使っていますが、微分法を用いた解答です. 広島県の熊野さんの解答は厳密には帰納法を使っていますが、左辺-右辺が n に関して増大することをも示しています. しかも n と $n-1$ を比較して式が見易くなっています. 見事だと思います.
3. 思ったよりごたごたしてしまいました. しかし一様連続性を使えば比較的すっきりしているのではないかと思います.

今回の問題

1. J_d を d 次元右閉区間全体の集合とする. 即ち $I \in J_d \Leftrightarrow I = I_1 \times \cdots \times I_d$. ただし I_j は1次元右閉区間 $I_j = (\alpha_j, \beta_j]$, $-\infty \leq \alpha_j < \beta_j \leq +\infty$ ($1 \leq j \leq d$) で $(\alpha, +\infty] = (\alpha, +\infty)$ と理解する. また, $Z(J_d)$ を d 次元右閉区間の互いに素な有限和集合全体とする.
このとき $I \in J_d \Rightarrow I^c \in Z(J_d)$ であることを示せ. ただし I^c は I の補集合を表すものとする.
2. A をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とする. このとき $\mathbb{R}^n$ の半平面の族 $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ であることを示せ. ただし $H \subset \mathbb{R}^n$ が半平面であるとは $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x \rangle \leq \beta\}$ となることである. ただし $\langle, \rangle$ はユークリッド内積を表す.

問題について一言

1. 集中「測度論」で出題されたものです. I^c をうまく表現してください.
2. 集中「弱位相」で出題されたものです. Hahn-Banach(ハーン-バナッハ)の定理をあからさまに使うのは反則とします. この定理を知らない方は気にしないでください.

宛先と締め切り

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2012年6月30日(土)

郵送の方は教室宛をお願いします。



数学工房 2012年4月21日発行

発行人 桑野耕一

編集人 編集Gr. 増田卓・坂口尚文・平田裕一
・半田伊久太

連絡先

オフィス電話: 042-495-6632

数学工房連絡専用(携帯): 080-6576-2691

連絡は極力eメールをご利用下さい。

e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail: monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)

ホームページ:

<http://www.sugakukobo.com>

数学工房 教室

〒170-0003

豊島区駒込1-40-4

全国蕎麦製粉会館2F 202-203

数学工房 オフィス

〒204-0023

清瀬市竹丘1-17-26-401

