Math.
NO.109
www.sugakukobo.com
会報２０１２年８月
数学工房

巻　頭　の　ご　挨　拶

夏の会報をお届けします。

ようやく秋学期の形がまとまってきました。最近気になっているのは、一通りの講座を受講してしまった会員に対して何を提供できるかということです。私が言うのも妙なものですが一通り受身で何事かを学んだからといって数学が自由にできるわけではありません。学んだ結果が育つのはそれからです。見かけは熱心でも、漫然とした学びからは何も得られません。ご自身の仕事からでも、講座の中からでも、本からでもどこからでも良いのですが、ご自身が興味を持った問題を丁寧に考察してみる、一筋縄では当然うまくいきませんが、そのようなことをちょっとした時間に飽きずに、失敗にもめげずに、一歩一歩たゆまず繰り返すことにより、気がつくと力は確実に上がっています。結局その過程で身につけた様々な型の実践的な稽古になるからです。そういう努力を怠らない会員との講座後の雑談は楽しみです。

先日も、連続微分可能な関数の空間の連続関数空間の代数的な補空間について、興味を持った会員がいました。実際この問題は単純ではありません、深く探ると魑魅魍魎がいろいろ出てきます。(逆に言うと数学語はそれほど強力なのです)同時にこの問題の考察は関数空間の理解を著しく深くするでしょう。このようなことを追求する過程で今まで学ばれたことが生きてくるのです。

ところで話は変わりますが、教育といえば、「私たちは、”教育”を学校に“丸投げ”してきた社会から脱却し、あらゆる社会の構成員が”教育”の担い手となることを目指しています。」というコンセプトで、活発な活動をしている若い人たちの団体があることを先ごろ知りました。この団体は活動の一環として津波で大きな被害を受けた女川と大槌に、コラボスクールという勉強の場を作り放課後勉強する場のなくなった子供たちを支援しています。単なる同情からでなく、悲惨は悲惨として受け止めた上で、それを乗り越えようとする若い世代に本当の学びの姿勢、エネルギーを見たからだそうです。これから20年に渡り、被災地の子供たちの学びの手助けをするとのことです。実にしっかりした頼もしい若い世代が育っていますね！私も応援したいと思い、数学工房の売上から些少ですが寄付をさせてもらいました。助ける意味を感じることができるからです。活動内容については、ホームページと連絡先を載せておきますので、興味のある方はぜひご覧になって下さい。

特定非営利活動法人　NPOカタリバ
〒166-0003 東京都杉並区高円寺南3-66-3
高円寺コモンズ203
Tel: 03-5327-5667 Fax: 020-4665-3239
http://www.katariba.net/

2012年 8月の初めに 桑野耕一

夏季集中講座と秋学期講座のご案内

―夏季集中講座―

■Advanced Linear Algebra　テンソル空間、対称形式、交代形式（初・中級）

8月11日（土）・12日（日）

1. 多重線型写像
   (1)　p 重線型形式
   (2)　多重線型形式の線型空間
   (3)　多重線型形式のテンソル積
2. 共変テンソル空間
   (1)　共変テンソルの一般論
   (2)　対称群の作用
   (3)　対称共変テンソル
   (4)　交代共変テンソル
   (5)　対称作用素、交代作用素
3. 外積代数

解析学や幾何学にはさまざまなタイプの積が現れる、そのような一般的な積を体系的に計算することが問題になる。例えば多様体上に高階の微積分を展開するにはどうするのか、また多様体上の解析的、あるいは幾何学的なオブジェクトを適切に定義し系統的に計算する、多重線型代数はこのようなタイプの問題への系統的な見通しの良い基礎を与えるものといえよう。

抽象線型代数の基礎概念、例えば、基底、次元、行列表現等々、多変数の微積分の基本についての知識、抽象的な論法についての馴染みは期待する。数学工房の講座で言えばG抽象線型代数と同等の程度を期待する。

■　数学の基本語彙と文法　インテンシブコース（入門）

8月18日（土）・19日（日）

1. 集合論からの概念と記号法
   (1)　集合の算法
   (2)　写像の像と原像
   (3)　写像の算法
2. トピックス

数学の基本語彙と文法を通常コースに対して後半の集合の代数と写像、写像の像、原像の取り扱い等に短縮して2日間の集中にまとめたものです。遠方である。時間が継続的に取れない等の理由で来られないという方々から前々から要望のあったものです。どのような分野を学ぶにせよ必要最低限の技術的知識です。この部分に難点があると本格的に数学に取り組む際につまづきの石になりますので、この機会に是非とも受講されることをおすすめします。この部分の基礎的なスキルを実際的な局面で自由に使いこなせるようになることはもう一段上の問題です。

■　線型空間とは何か？　典型モデルの空間を通じて理解を深めよう　（入門）

8月25日（土）・26日（日）

0. いくつかの基礎モデル
1. 線型空間論からの補充
2. 多項式空間
   (1)　割り算の基本原理の見方
   (2)　Shift 不変部分空間
3. 多項式、有理関数の分解定理

抽象的な数学は、それによって興味のある具体的な数学的対象達の構造が明らかにできるものでなくてはならない。多項式、有理関数といった比較的身近な材料を基礎に線型代数という実在のありようを探ってみよう。

■　Poincaré 計量、Schwarz の補題、Picard の定理へ（複素多様体入門）（初・中級）

9月1日（土）・2日（日）

1. Schwarz の補題と円板上の Poincaré 計量
2. 複素上半平面の正則自己同型と Poincaré 計量
3. 普遍被覆面
4. 擬エルミート計量と Schwarz の補題
5. Picard の定理へ向けて（秋学期複素多様体へ続く）

複素関数論で Liouville の定理 や Schwarz の補題そして Picard の定理を初めて学んだ時の不思議さは忘れられない。Cauchy の積分公式から出発して順を追って定量的評価を繰り返せば、とにかくこの美しい結果が得られることは理解できる。ではその内在的な理由は何か？まもなく、微分幾何と複素関数論の合同の研究会に先輩に誘われた。そこでは小林昭七先生の *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings An Introduction* を購読していたのである。負の曲率をもつ複素多様体（双曲多様体）の幾何の問題として Schwarz や Picard の結果が自然な解釈ができるというのである。

それから私は何を勉強したのか、この研究会がどうなったか全く記憶にないがその新鮮な驚きだけを覚えている。最近そのことをふと思い出すことがあり、もう一度そのあたりのことを複素多様体の入門としてまとめようという気になった。そのときめきが伝えられるかどうかは自信がないが素晴らしいハイキングコースの展望台までご案内できればと思う。

■ 位相線型空間におけるネットとフィルター
（初・中級）

9月8日（土）・9日（日）

1. フィルタとネット概論
2. 位相線型空間の概念
3. 位相線型空間上のフィルタの代数
   (1) 線型空間上のフィルタの代数
   (2) Cauchy フィルタの代数とゼロフィルタ
   (3) Cauchy フィルタから生成される位相線型空間
   (4) 埋込み定理
4. トピックス

今年度と来年度は、作用素環に関連した基礎講座を充実することに心がけている。フイルタやネットの一般論は今までも取り上げたことがあるが、フイルタの空間そのものを体系的に取り上げたことはない。位相線型空間の完備化をCantorの有理数から数直線を得るメソッドににパラレルに実行しようという目論見で、Cauchyフイルタの代数系を整備してみたことがきっかけで、もう一度全体をまとめることにした。

一般位相、線型代数また抽象的な議論の仕方にはある程度の習熟を仮定している。位相と線型代数のadvanced コースとして、作用素環等に興味のある人におすすめする。

■ 幾何学と線型代数　行列式と初等幾何
（入門）

9月15日（土）

1. 3次元体積形式
2. ベクトル外積
3. 体積幾何学

通常講座「I.D 多次元空間、初等線型代数と微積分」では体積形式の導入から始まり、行列式、領域の体積、積分、変数変換公式と言う筋で進んでいくのだが、その際幾何学的に興味深いトピックスが色々あるのだが、無論取り上げる時間はない。そこで、この機会に普段は捨てざるを得ないいくつかのトピックスを扱う。構想を固めるために本棚をひっくり返していたら、幾何学の故栗田稔先生から送っていただいた、初等数学15講 という 素敵な小冊子が出てきた。（この中からいくつかの問題を使わせていただくつもりである。）

＜時間＞
1日セミナーは、　11:00－17:00
2日セミナーは、　1日目　14:00－18:00
　　　　　　　　　2日目　11:00－16:00

＜料金＞
会員　1日セミナー ￥10,000（学生￥8,000）
　　　2日セミナー ￥16,000（学生￥12,000）

お申し込みに際しては、工房のホームページも合わせて、ご参照ください。
http://www.sugakukobo.com/

＜お申し込み、お問い合わせ先＞
sugakukobo@w5.dion.ne.jp

—秋学期講座—

入門　I.A I.D I.F　I.H(内容は検討中)
初級　I.E0 I.E E.A　E.B　G
初級・中級　I.S
中級　M.C

IF、IE、MC が新規開講の講座です。講座の内容については、若干の変動の可能性があります。お申し込みに際しては、最新の情報をホームページにてご確認ください。
http://www.sugakukobo.com

--入門--

■ I.A 解析教程
9 月 23 日(日) 開講　11:00－13:00
隔週 6 回(9/23、10/7、10/21、11/4、11/18、12/2)

■ I.D 初等線型代数と多次元空間での微積分
9 月 30 日(日) 開講　11:00－13:00
隔週 6 回(9/30、10/14、10/28、11/11、11/25、12/9)

■ I.F 数学の基本語彙と文法
9 月 22 日(土) 開講　11:00－13:00
隔週 6 回(9/22、10/6、10/20、11/3、11/17、12/1)

■ I.H　内容は検討中

--初級—

■ I.E0 位相線型空間特論　有限余次元、コンパクト、プレコンパクト
9 月 22 日(土)14:00-18:00
1回講座

■ I.E 局所凸空間論
10 月 6 日(土) 開講　14:00－18:00
隔週 3 回(10/6、10/20、11/3)

■ E.A　距離空間と解析序説
9 月 30 日(日)開講　14:00－17:30
隔週 4 回(9/30、10/14、10/28、11/11)

■ E.B　現代ベクトル解析　テンソル場の理論
9 月 29 日(土)開講　14:00－18:00
隔週 3 回(9/29、10/13、10/27)

■ G　抽象線型代数II
9 月 23 日(日)開講　14:00－17:30
隔週 4 回(9/23、10/7、10/21、11/4)

--初級・中級—

■ I.S 代数関数論
11 月 18 日(日) 開講　14:00－17:30
毎週 4 回(11/18、11/25、12/2、12/9)

--中級--

■ M.B　解析のための多様体　ベクトル場、計量、流れ
11 月 10 日(土)開講　14:00－18:00
隔週3回(11/10、11/24、12/8)

■ M.C　複素多様体と多変数関数論
11 月 17 日(土)開講　14:00－18:00
隔週 3 回(11/17、12/1、12/15)

[料金]

講座料　**一括前納が原則です。**通常講座は一括前納の場合￥30,000(学生￥21,000)です。各回払いの場合は、6 回講座　￥5,000/回、4 回講座　￥7,500/回、3 回講座　￥10,000/回です。受講にあたっては、別途テキスト代￥2,000 が初回受講時にかかります。

尚、1 回講座の IE.0 は¥10,000(学生￥8,000)です。

[キャンセル規定]

原則として開講6日前までは　事務手数料￥1,000 のみお支払ください。5日から前日までは事務手数料￥2,000、テキストをお渡し済ですと＋￥1,000(合計￥3,000)となります。当日のキャンセルは第1回分の講座料の 50%、開講後はお返しできません。

あらかじめ不確定要因がある場合は仮申込としておいてください。1 週間前に最終確認をいたします。全回の出席が危ぶまれる場合は若干高くなりますが、各回払いにされる方法もあります。各回払いの場合、欠席の場合は必ず事前にご連絡ください。以前、各回払いで申し込まれ全く連絡なしにご欠席というケースがありました。この場合は、1 回分の講座料＋テキスト代をお支払いいただくことになりますのでご注意ください。

[お申し込み・お問い合わせ先]

sugakukobo@w5.dion.ne.jp

受講者数確認の都合上、お申込みはできるだけお早めにお願いします。

会　員　か　ら　の　メ　ッ　セ　ー　ジ

今回は、会員の吉野正康さんにお仕事と数学のかかわりについて書いていただきました。吉野さんは現在、金融工学にかかわるお仕事をされています。

■数学とビジネス

私が入会したのは、2010年秋学期で、現在、54歳です。大学院時代は、物理（素粒子実験）を専攻しておりました。最近になって、数学を独学で勉強しようと思い立ちましたが、難しく、桑野先生におすがりすべく、門をたたかせていただきました。

現在の仕事は、金融機関向けの『金融工学』を使用したソフトウェアの開発、販売、コンサルティングをしております。1987年に会社設立してから、25年になりました。金融工学の分野でも、「金融派生商品の価格計算」、「金融リスク管理」に関する業務が主で、関連する数学分野は、線型代数、関数解析、確率・統計、数値計算、数論、ゲーム理論などがあります。以下、「金融派生商品の価格計算」に絞って記述させていただきます。金融市場は、為替、金利、債券、株式、商品があります。金融派生商品には、おおきく金融商品の先物（将来時点での決まった価格での売買）、オプション（将来時点での決まった価格での買う権利、売る権利の売買）があります。オプションの価格計算を考えると、まず原金融商品（株など）の価格過程をモデル化します。有名なブラック・ショールズ価格式（以下BS式）は、確率過程論を基に、変動部分をブラウン運動で表現します。

一般的な伊藤過程は、

$$dX(t)=a(X,t)\,dt+b(X,t)\,dW(t),$$

t： 時刻、 $X(t)$： 金融商品価格、

$W(t)$： 標準ブラウン運動

株価 $S(t)$ を原金融商品としたブラック・ショールズ計算式では、

$$dS(t)=rS(t)\,dt+\sigma S(t)\,dW(t),$$

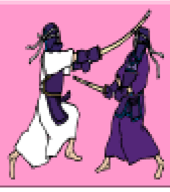
r： 無リスク金利、 σ： ボラティリティ（対数変動率）

いたるところで微分不可能なブラウン運動を微分形で書くのは慣習によるもので、確率測度を定義し、ある『境界条件』の基で、期待値を計算することによりオプション価格を計算します。BS式は、一定期間後「のみ」に権利行使できるヨーロピアン型のオプションの計算式で解析解を持ちますが、一定期間内で「いつでも」権利行使できるアメリカン型では、一般に『自由境界条件』となり解析解を持ちません。複雑な金融派生商品の計算には、近似解やモンテカルロ・シミュレーション（以下、MC）などにより価格を求める必要があります。実際の取引システムでは、【精度】と少ない【計算時間】が要求されます。一般にこの２つはトレード・オフの関係にあり、精度の高い近似解を得られなければ、MCの高速化技術（乱数の生成法、分散低減法など）がシステム製品差別化の重要な要素になります。

仕事とは別に、数学工房では、**《知之者不如好之者、好之者不如楽之者》***を目標に、数学を楽しみたいと思います。

*編集部注：「これを知る者はこれを好む者に如（し）かず。 これを好む者はこれを楽しむ者に如かず。」（物事、学問を）理解している人は、好んでやっている人には及ばない。好んでやっている人も心から楽しんでいる人には及ばない。

吉野正康さん



入門桑野道場(第20回)

/// 記　桑野道場師範代　半田生久太///

前回の問題

1. $\mathcal{I}_d$ を d 次元右閉区間全体の集合とする．即ち $I \in \mathcal{I}_d \Leftrightarrow I = I_1 \times \cdots \times I_d$．ただし I_j は 1 次元右閉区間 $I_j = (\alpha_j, \beta_j]\,, -\infty \leq \alpha_j < \beta_j \leq +\infty (1 \leq j \leq d)$ で $(\alpha, +\infty] = (\alpha, +\infty)$ と理解する．また，$\mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ を d 次元右閉区間の互いに素な有限和集合全体とする．
   このとき $I \in \mathcal{I}_d \Rightarrow I^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ であることを示せ．
2. A をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とする．このとき $\mathbb{R}^n$ の半平面の族 $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ であることを示せ．ただし $H \subset \mathbb{R}^n$ が半平面であるとは $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ と $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して $H = \{x \in \mathbb{R} | \langle a, x \rangle \leq \beta\}$ となることである．ただし $\langle , \rangle$ はユークリッド内積を表す．

お詫び

1. で $\emptyset \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ は規約です．問題にはこれが落ちていました．申し訳ありません．

また「I_j は 1 次元右閉区間 $I_j = (\alpha_j, \beta_j]\,, -\infty \leq \alpha_j < \beta_j \leq +\infty (1 \leq j \leq d)$」では 1 点からなる集合も $\mathcal{I}_d$ の元と見たいので「$\alpha_j < \beta_j$」を「$\alpha_j \leq \beta_j$」と修正します．すみませんでした．

解答

1. 以下「$A \cap B = \emptyset$ のとき $A \cup B$」を単に「$A + B$」と記す．さらに記述を簡単にするため $\emptyset \in \mathcal{I}_d$ も規約とする．
   (a) 次元 d に関する帰納法による証明
   $d = 1$ のとき
   任意の $I \in \mathcal{I}_1$ に対して $I = (\alpha, \beta]\,, (-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty)$ と書ける．よって，$I^C = (-\infty, \alpha] + (\beta, +\infty)$ であり $(-\infty, \alpha]\,, (\beta, +\infty) \in \mathcal{I}_1$ であることから（$\emptyset \in \mathcal{I}_1$ に注意），$I^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_1)$．すなわち $d = 1$ のときは成り立つ．
   $d - 1 (d \geq 2)$ のとき命題が成り立つと仮定する．このとき任意の $I \in \mathcal{I}_d$ に対して
   $$I^C = (I_1 \times \cdots \times I_d)^C = (I_1^C \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R}}_{d-1\text{ 個}}) + I_1 \times (I_2 \times \cdots \times I_d)^C$$
   が成立する．
   実際，$x = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in I^C = (I_1 \times \cdots \times I_d)^C \Leftrightarrow \xi_1 \in I_1^C$ または「$\xi_1 \in I_1$ かつ $\exists k (2 \leq k \leq d)$ s.t. $\xi_k \in I_k^C$」であることから直ちにわかる．(第 1 項と第 2 項が互いに素であることも明らか)

さて $I_1^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_1)$ より $I_1^C \times \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\mathbb{R}}_{d-1\text{個}} \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ は明らか．また帰納法の仮定から $(I_2\times\cdots\times I_d)^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_{d-1})$．さらに $I_1 \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_1)$ より $I_1 \times (I_2\times\cdots\times I_d)^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$．実際，帰納法の仮定から有限個の互いに素な $J_1,\cdots,J_m \in \mathcal{I}_{d-1}$ が存在して $(I_2\times\cdots\times I_d)^C = J_1+\cdots+J_m$．$(I_1\times J_j)\cap(I_1\times J_k) = I_1\times(J_j\cap J_k) = \emptyset (j\neq k)$ であり，$I_1\times J_j \in \mathcal{I}_d\,(1\le j\le m)$ であることから $I^C = I_1\times(I_2\times\cdots\times I_d)^C = I_1\times(J_1+\cdots+J_m) = (I_1\times J_1)+\cdots+(I_1\times J_m) \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$．すなわち $I^C = (I_1\times\cdots\times I_d)^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ が従う．よって命題は d のときも成立する．帰納法は完了した．

(b) 別証明

$d=1$ のとき，即ち「$I\in\mathcal{I}_1 \Rightarrow I^C \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$」であることは前の解答と同様.

任意の $I = I_1\times\cdots\times I_d \in \mathcal{I}_d$ をとる．ただし $I_j \in \mathcal{I}_1\,(j=1,\ldots,d)$.

これ以降，$I_j^1 := I_j$, $I_j^0 := I_j^C$ という記法を使う．

$$I^C = (I_1\times\cdots\times I_d)^C = \bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\in E^d\setminus\{(1,\ldots,1)\}} I_1^{\varepsilon_1}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d}$$

が成立する．ただし，$E:=\{0,1\}$.

実際，$(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in I^C = (I_1\times\cdots\times I_d)^C \Leftrightarrow \exists k(1\le k\le d)$ s.t. $\xi_k \in I_k^C = I_k^0 \Leftrightarrow \exists(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\in E^d\setminus\{(1,\ldots,1)\}$ s.t. $(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in I_1^{\varepsilon_1}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} \Leftrightarrow (\xi_1,\ldots,\xi_d)\in\bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\in E^d\setminus\{(1,\ldots,1)\}} I_1^{\varepsilon_1}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d}$．あとは $\bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\in E^d\setminus\{(1,\ldots,1)\}} I_1^{\varepsilon_1}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ を示せばよい．それは以下の命題1〜3から直ちに従う．

命題1　$I_1^{\varepsilon_1}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$. ($(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\in E^d$).

（証明）$(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\neq(1,\ldots,1)$ のときを示せばよい．したがって特に $\varepsilon_1=0$ のときを示せば十分．$I_1^0 = I_1^C = I_{11}\cup I_{12}, I_{11}\cap I_{12}=\emptyset$ と書ける．ただし $I_{11}, I_{12}\in\mathcal{I}_1$．したがって $I_1^0\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} = I_1^C\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} = (I_{11}\cup I_{12})\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} = (I_{11}\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d})\cup(I_{12}\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d})$．また $(I_{11}\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d})\cap(I_{12}\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d}) = (I_{11}\cap I_{12})\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} = \emptyset\times I_2^{\varepsilon_2}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d} = \emptyset$．□

命題2　$(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\neq(\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_d') \Rightarrow (I_1^{\varepsilon_1}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d})\cap(I_1^{\varepsilon_1'}\times\cdots\times I_d^{\varepsilon_d'}) = \emptyset$.

（証明）仮定から $\varepsilon_1\neq\varepsilon_1'$ のときを示せば十分．ところがこのとき $I_1^{\varepsilon_1}\cap I_1^{\varepsilon_1'}=\emptyset$ だから命題2が言える．□

命題3　$J, K\in\mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$ かつ $J\cap K=\emptyset \Rightarrow J\cup K\in\mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$.

（証明）仮定から有限個の互いに素な $J_1,\ldots,J_m\in\mathcal{I}_d$ と有限個の互いに素な $K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{I}_d$ が存在して $J=\bigcup_{j=1}^m J_j$, $K=\bigcup_{k=1}^n K_k$ と書ける．任意の $j,k(j=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n)$ に対して $J_j\cap K_k=\emptyset$ である．実際 j_0, k_0 が存在して $J_{j_0}\cap K_{k_0}\neq\emptyset$ とすると $\emptyset = J\cap K = (\bigcup_{j=1}^m J_j)\cap(\bigcup_{k=1}^n K_k)\supset J_{j_0}\cap K_{k_0}\neq\emptyset$ となって仮定に反する．よって $J\cup K = J_1\cup\cdots\cup J_m\cup K_1\cup\cdots\cup K_n$ は互いに素な和集合．以上のことから $J\cup K\in\mathcal{Z}(\mathcal{I}_d)$.
□

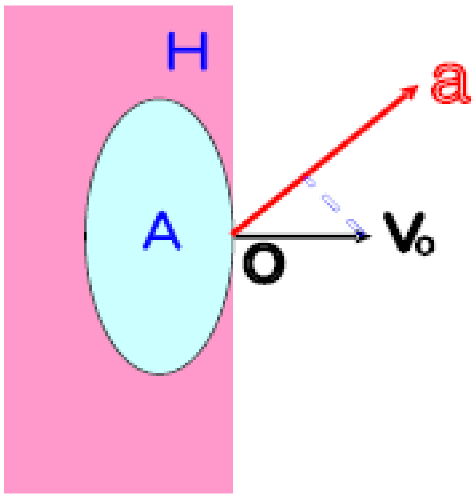
2. まず次の補題を示す

補題

A をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合,$v_0 \in A^C$ とするとき以下の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の半平面 H が存在する．「$v_0 \in H^C$ かつ $A \subset H$」

補題の証明

A はコンパクトなので $a_0 \in A$ が存在して $\|a_0 - v_0\| = \min\{\|b - v_0\|; b \in A\}$．ただし $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す．$a_0 = \mathbf{0}$ として一般性を失わない．$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_0 \rangle \leq 0\}$ と置けば H が求める半平面である．
実際 $v_0 \neq \mathbf{0}$ であり $\langle v_0, v_0 \rangle = \|v_0\|^2 > 0$ より $v_0 \in H^C$．
次に $A \subset H$ であることを背理法で示す．$A \not\subset H$ であると仮定すると $a \in A \cap H^C$ となる $a(\neq \mathbf{0})$ が存在する．即ち $\langle a, v_0 \rangle > 0$．また v_0 と A との最短距離は $\|v_0\|$ だから $\|v_0\| \leq \|a - v_0\|$．したがって $\|v_0\|^2 \leq \|a - v_0\|^2$ であることから $0 < 2\langle a, v_0 \rangle \leq \|a\|^2$．$A$ は凸なので a と $\mathbf{0}$ を結ぶ線分を $l = \{\tau a | \tau \in [0, 1]\}$ とすれば $l \subset A$．$\tau_0 := \dfrac{\langle a, v_0 \rangle}{\|a\|^2}$ とおくと，前の不等式から $0 < \tau_0 < 2\tau_0 < \dfrac{2\langle a, v_0 \rangle}{\|a\|^2} \leq \dfrac{\|a\|^2}{\|a\|^2} = 1$．したがって $\tau_0 a \in l \subset A$．ところで $\|a\| > 0, \langle a, v_0 \rangle > 0$ に注意して $\|v_0 - \tau_0 a\|^2 = \|v_0\|^2 - \langle a, v_0 \rangle^2 / \|a\|^2 = \|v_0\|^2 - \|\tau_0 a\|^2 < \|v_0\|^2$ を得る．
これは v_0 と A との最短距離が $\|v_0\|$ であることに反する．したがって $A \subset H$．以上のことから $v_0 \in H^C$ かつ $A \subset H$.$\square$



証明

A を含む半平面全体を $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とする．補題より $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \emptyset$．$A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ を示す．
$A \subset H_\lambda (\forall \lambda \in \Lambda)$ より $A \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ は明らか．

逆の包含関係を示す．即ち $A^C \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \right)^C$ を示せばよい．
任意に $x \in A^C$ をとる．補題から $x \in H^C$ かつ $A \subset H$ を満たす半平面 H が存在する．$\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の定義から $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t. $H = H_{\lambda_0}$．
よって $x \in H_{\lambda_0}^C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda^C \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \right)^C$．したがって $A^C \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \right)^C$．

解説

1. I^C をどう表現するかという問題です．区間は比較的に単純な図形なので直感が効きやすいです．特性関数を使うやり方もあると思います．（自分は挫折しましたけれど・・・）
2. 補題を示せばほぼ終了です．補題の証明は v_0 と A との距離を測り、$H \setminus A \neq \emptyset$ であれば $a \in H \setminus A$ をとり，a と $\mathbf{0}$ を結ぶ線分上に垂線を下ろし、その点のほうが v_0 と A の距離が近いことを示します (図参照)．幾何的な証明です．ただこの証明は A のコンパクト性は使ってなく、A が閉集合であれば十分です．あまりスマートではなかったですね．どなたか A のコンパクト性を使ったスマートな証明を考えてください．

今回の問題

1. f を実変数の実数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし $x = 0$ で連続とする．
   (a) 任意の実数 x, y に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$ が成り立つならば，$f(x) = f(1)x\ (x \in \mathbb{R})$ であることを示せ．
   (b) 任意の実数 x, y に対して $f(x + y) = f(x)f(y)$ が成り立つならば，$f(x) = f(0)e^x\ (x \in \mathbb{R})$ であることを示せ．
2. 上級問題
   (a)「f が $x = 0$ で連続である」という条件を弱めても 1. は成り立つ．その条件を述べて 1. と同様なことが成り立つことを示せ．
   (b)「f が $x = 0$ で連続である」という条件をはずしてしまうと前問とは違う解を持つ．その解を構成せよ．

問題について一言

問題 1.(b) は多様体の one-パラメータ群で出てきた問題を 1 次元にして易しくしたものです．(a) も有名な関数方程式です．じっくりと考えてください。

また、上級問題は特に締切を設けません．解答ができたら送付をお願いします。

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com

締切　2012 年 9 月 30 日 (日)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2012年8月7日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　編集Gr.
（増田卓・坂口尚文・平田裕一）
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：08065762691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp（携帯、緊急用）
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401