Math.
No. 111

会報　2013年5月

数学工房

巻　頭　言

　春の集中セミナーも無事に終わり、まもなく新年度です。夏学期講座は下記のラインアップで開講する予定です。ご希望の講座はなるべく早めにお申し込みくださるようお願いします。
　先日、仕事部屋の書類整理をしていましたら、1990 年代に作成したテキストがたくさん出てきました。当時はまだ数学工房創立以前、社会人を対象とした解析道場という看板を掲げていた時代です。Ahlfors の名著 *Complex Analysis* の講読会を開いた時に、理学部数学科出身の方でも第 1 章さえ独力では満足に読めていなかった。解析道場はそんな驚きに基づいて始めた試みです。この時代は、現在の工房のように体系的な理論や教程がありませんでした。馴染みやすい問題から出発して、そこから興味深い数学のトピックスを紹介するという形が中心でした。自分で言うのも変ですが、テキストを読み返しているとそれなりによくできた問題です。今でもこの時代の名残が若干あるのは、入門レベルの集中セミナーや SEA の後援で毎年名古屋で行なっている高校生向けの講座くらいでしょうか。このテキストから 20 年、皆さんが自分自身で数学の世界を歩くための稽古として、また抽象を道具として使いこなせることを一貫して追求してきた結果、講座の内容は昔とは見かけがかなり異なる現在の形にたどりつきました。
　今年度も原点を忘れず、数学を愛する人が自分の足で数学の世界を歩くための高い基礎を身に付け、幸福になるためのお手伝いを少しでもできたらと思います。それではセミナーでお目に掛かりましょう。

数学工房　桑野耕一　　連休明け　春の集中セミナーの翌日に

夏学期講座案内

2013年5月〜8月

　2013 年夏学期講座は、5 月 18 日よりスタートです。講座 I.E、E.B、M.B 以外の講座は、今学期から新規に開講します。日時の詳細、最新情報は工房のホームページをご参照ください。

http://www.sugakukobo.com

　開講の決定、およびテキスト配布の都合上、お申し込みはできるだけお早めにお願いいたします。

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.B	多変数関数論入門	5 月 18 日	初・中級
I.C	代数及び解析入門	5 月 26 日	入門
I.D	初等線型代数と多変数の微積分	5 月 19 日	入門
I.E	位相線型空間概論	5 月 25 日	中級
I.F	数学の基本語彙と文法	5 月 18 日	入門
I.S	代数関数論	7 月 7 日	中級
G	抽象線型代数	5 月 19 日	初級
E.A	抽象位相	5 月 26 日	初級
E.B	微分形式の理論	7 月 6 日	初・中級
M.B	解析のための多様体	7 月 13 日	初・中級

◆ I.B 多変数関数論入門
–複素 1 変数概観–
(1) 正則関数
(2) Cauchy の積分公式とその応用
(3) Runge の近似定理
(4) Mittagleffler の定理
(5) Weierstrass の定理
(隔週 4 回講座)

◆ I.C 代数及び解析入門
–群・複素数平面・Moebius 変換 1–
<1>群の基本概念
(1) 群・半群・変換群
(2) 部分群、群準同型、正規部分群
(3) 群の作用とコセット空間
<2>複素数平面
(1) 複素数系
(2) 複素数平面と直線と円の幾何
(隔週 6 回講座)

◆ I.D 初等線型代数と多変数の微積分
–多次元空間と基本図形–
(1) 数ベクトル空間
(2) 内積・直交性
(3) 平面 ・線型部分空間・張る空間
(4) 凸性
(5) 行列、線型写像
(隔週 6 回講座)

◆ I.E 位相線型空間概論
–線型写像の空間・等連続・一様有界性原理–
(0) 連続線型写像、位相準同型
(1) Banach の準同型定理
(2) S-位相再論
(3) 等連続性・一様有界性原理・Banach-Steinhaus の定理
(4) 双線型写像と位相テンソル積
(隔週 6 回講座)

◆ I.F 数学の基本語彙と文法
–Σ と数学的帰納法再論・集合と写像–
(1) Σ 再論、数学的帰納法の用法
(2) 集合の代数
(3) 写像
(4) トピックス
(隔週 6 回講座)

◆ I.S 代数関数論
–付値体　岩澤代数関数論 第 1 章–
<1> 付値による距離と完備化
(1) 付値の定義
(2) 付値による位相の比較
(3) 素因子による完備化
(4) 完備体における展開定理
(5) Hensel の定理
<2> 素因子の膨張と射影
(1) 相対次数・分岐次数
(2) 素因子の膨張
(毎週 4 回講座)

◆ G 抽象線型代数
–線型空間　実在と表現–
(1) 線型空間 定義と典型空間
(2) 部分空間の演算
(3) 生成される線型空間、直和
(4) 線型独立・線型従属
(5) 次元、基底、座標
(隔週 4 回講座)

◆ E.A 抽象位相
–基本概念 I–
(1) 位相の概念 開集合系、閉集合系 近傍系
(2) 距離空間・ノルム空間
(3) 点のトポス
(4) 連続写像
(5) フィルタ
(隔週 3 回講座)

◆ E.B 微分形式の理論
–微分形式の応用–
Flanders の微分形式の理論 7 章・8 章からのトピックスを予定しています。詳細は検討中。決まり次第お知らせします。
(隔週 3 回講座)

◆ M.B 解析のための多様体
–多様体の向き付積分–
<1> 多様体の向き付け
(1) 線型空間の向き
(2) 多様体の向き
(3) 曲面の Gauss 写像
<2> 多様体上の積分
(1) 微分形式の積分
(2) 体積要素に関する積分
(3) Riemann 多様体の体積要素
(4) 保測変換
(隔週 2 回講座)

[料金]
講座 M.B は税込￥20,000（学生 ￥14,000)、その他の講座は 1 講座、税込￥30,000（学生￥21,000)。途中参加の場合、6 回講座は参加回数×￥5,000 ＋￥2,000 (テキスト代・手数料) です。6 回未満の講座の途中参加についてはお問い合わせ下さい。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますのでご相談ください。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします。

鈴木先生からのご挨拶

2 年間、数学工房の講師としてお手伝いをさせて頂きましたが、春学期一杯で数学工房を退会することになりました。桑野先生をはじめとして会員の皆様には大変お世話になりました。この 2 年間で、大学関係の仕事や出版の仕事が急に増え、今年度は 4 大学で勤務することになり、しかも出版原稿を 2 冊抱えることになりました。このご時世に、沢山のお仕事を頂けるのはありがたいことですが、そうなると他のことをする余裕がなくなってきました。しかし、数学工房の仕事は片手間で出来るようなものではありません。どちらかを選ばなければ、周囲に迷惑をかけてしまいます。随分悩みましたが、大学での数学教育を選ぶことに致しました。よく言われているように、現在の大学教育は大変な問題を抱えています。でも、その問題に目をつぶるつもりはありません。大学の先生方の中には志のある方もいらっしゃって、数学教育をなんとかしようと日々、奮闘されています。幸運なことにそういった先生方との出会いに恵まれ、数学工房とは路線が違いますが、学生の立場に立った数学教育を実現することに情熱を注いでみたいと思います。

数学工房を去ることになりましたが、不思議と晴れやかな気持ちがあります。ここで学んだことは数えきれないくらいあります。数学工房で過ごした期間が土台となったからこそ、新しいスタートが切れたのだと思います。最後になりましたが、桑野先生、会員の皆様、本当にありがとうございました。

鈴木桜子

入門　桑野道場　（第22回）

/// 記　桑野道場師範代　半田生久太 ///

前回の問題

問題 1

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が凸であるとき

1. A の閉包 $\bar{A}$ が凸であることを示せ.
2. A の開核 A° が空でないならば A° が凸であることを示せ.

ただし $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 A が凸であるとは，任意の 2 点 $x, y \in A$ に対して $[x, y] \subset A$ を満たすときを言う．ここで $[x, y] := \{(1-\tau)x + \tau y \,|\, \tau \in [0, 1]\}$，即ち $[x, y]$ は x と y を結ぶ線分である．

問題 2

$x > 0$ のとき $l(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ として関数 $l : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を定める．このとき関数 l が対数関数であることがわからないものとして以下のことを示せ.

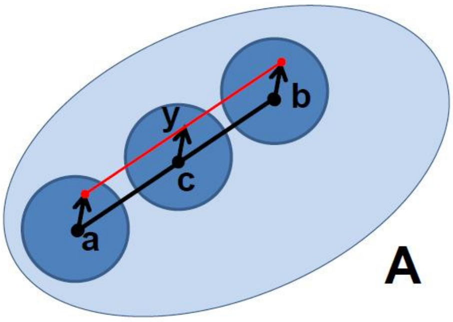
1. $l(x) \to \infty (x \to \infty)$.
2. l は有理関数にならない.

問題 1 の解答

1. $a, b \in \bar{A}$ を任意にとる．$[a, b] \subset \bar{A}$を示す.
   線分 $[a, b]$ 上の任意の点を $(1-\tau)a + \tau b$ とする．ただし $0 \leq \tau \leq 1$．$a, b \in \bar{A}$ だから A の

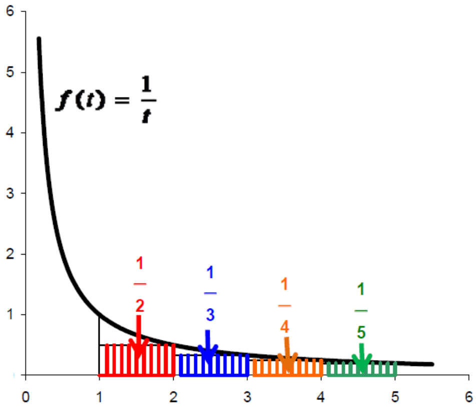
点列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が存在して $a_n \to a(n \to \infty)$ かつ $b_n \to b(n \to \infty)$．A は凸だから任意の正整数 n に対して $(1-\tau)a_n + \tau b_n \in A$．また $\|(1-\tau)a_n + \tau b_n - ((1-\tau)a + \tau b)\| \leq (1-\tau)\|a_n - a\| + \tau\|b_n - b\| \to 0(n \to \infty)$．よって $(1-\tau)a + \tau b \in \bar{A}$．したがって $[a,b] \subset \bar{A}$．即ち $\bar{A}$ は凸．

2. $a, b \in A^\circ$ を任意にとる．$[a,b] \subset A^\circ$ を示す．
   線分 $[a,b]$ 上の任意の点を $c := (1-\tau)a + \tau b$ とする．ただし $0 \leq \tau \leq 1$．$a, b \in A^\circ$ だから $\delta > 0$ が存在して $B_\delta(a) \subset A$ かつ $B_\delta(b) \subset A$．
   $B_\delta(c) \subset A$ を示す．任意の $x \in B_\delta(c)$ をとる．$y := x - c$ とおくと $\|y\| < \delta$ だから $a+y \in B_\delta(a)$ かつ $b+y \in B_\delta(b)$．A は凸だから $[a+y, b+y] \subset A$．一方，$(1-\tau)(a+y) + \tau(b+y) \in [a+y, b+y]$ で $(1-\tau)(a+y)+\tau(b+y) = (1-\tau)(a+x-c)+\tau(b+x-c) = x$．よって $x \in A$．したがって $B_\delta(c) \subset A$．これは $c \in A^\circ$ を意味する．したがって $[a,b] \subset A^\circ$．よって A° は凸．



問題 2 の解答

1. 関数 l は単調増加だから $l(n) \to \infty(n \to \infty)$ を示せば十分．ただし n は正整数．$f(t) := \frac{1}{t}\,(t \geq 1)$ は狭義単調減少であるから任意の正整数 k に対して $f(k) > f(k+1)$．よって任意の 2 以上の整数 n に対して $l(n) = \displaystyle\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)\int_k^{k+1} dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$．したがって $S(n) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty(n \to \infty)$ を示せばよい．$S(2^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{\nu} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2}n \to \infty(n \to \infty)$．したがって $l(x) \to \infty(x \to \infty)$．



2. $l(x) = p(x)/q(x)$ とおく．ただし p, q は多項式で共通因子を持たないとする．

解法 (1)
$p(x)=a_nx^n+$ 低次の項 $, q(x)=b_mx^m+$ 低次の項 とする．ただし $a_n\neq 0, b_m\neq 0$. したがって $p'(x)=na_{n-1}x^{n-1}+$ 低次の項 $, q'(x)=mb_mx^{m-1}+$ 低次の項．ただし $p(x)$ が定数のときは $n=0$ なので $p'(x)=0a_0x^{-1}=0$ と考える．$q(x)$ が定数のときも同様.

また $l'(x)=1/x=\dfrac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q(x)^2}$ であるから $q(x)^2=x\{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)\}$．よって最高次数の項を比較すれば $b_mx^{2m}=a_nb_m(n-m)x^{m+n}$.

（イ）$m=n$ のとき

$b_m^2x^{2m}=a_nb_m(n-m)x^{2m}$ より $b_m=0$．これは $b_m\neq 0$ に反する.

（ロ）$m\neq n$ のとき

左辺の最高次の項は $b_m^2x^{2m}$ であり，右辺の最高次の項は $a_nb_m(n-m)x^{m+n}$ である．係数はどちらも 0 でなく $2m\neq m+n$．すなわち両辺の最高次数が一致しない．これも矛盾.

以上のことから l は有理関数ではありえない.

解法 (2)
解法 (1) と同様にして $q(x)^2=x\{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)\}$．$p$ と q が同時に定数にならない場合を示す（どちらかが定数の場合は容易に示せる）．両辺の次数を考えると $2\deg q(x)=\deg x+\deg\{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)\}\geq 1+\max\{\deg(p'(x)q(x)), \deg(p(x)q'(x))\}=1+\deg p(x)+\deg q(x)-1$．したがって $\deg q(x)\geq\deg p(x)$．一方前問より $l(x)\to\infty (x\to\infty)$．よって $\deg q(x)<\deg p(x)$. これは矛盾．したがって l は有理関数ではありえない.

今回の問題

$I:=[\alpha,\beta]$：有界閉区間とする.

1. 以下の条件を満たす I 上の実数値 C^1 級関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が存在したとする.
   (a) 関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の導関数列 $\{f'_n\}_{n\geq 1}$ がある I 上連続な関数 g に I 上一様収束する.
   (b) $x_0\in I$ が存在して 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ が存在する.

   このとき関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ はある I 上の実数値 C^1 級関数 f に I 上一様収束し，$f'=g$ が成立する ことを示せ.
2. 以下の条件を満たす I 上の実数値 C^r 級関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が存在したとする.
   (a) 関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の r 階導関数列 $\{f_n^{(r)}\}_{n\geq 1}$ がある I 上連続な関数 g に I 上一様収束する.
   (b) 次の性質を持つ $x_0\in I$ が存在する：任意の $k (0\leq k\leq r-1)$ に対して極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_0)$ が存在する.

   このとき関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ はある I 上の実数値 C^r 級関数 f に I 上一様収束し，$f^{(r)}=g$ が成立することを示せ.

問題について一言

IA(解析教程) で扱われた内容です．積分（微積分学の基本定理）を使えば比較的容易に出来ますが積分を使わない解答も考えてください.

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2013 年 6 月 30 日 (日)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2013 年 5 月 9 日発行
発行人　　　桑野耕一
編集人　　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401

連絡先
　オフィス電話：042-495-6632
　数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
　連絡は極力 e-メールでお願いします。
　e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
　e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
　http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
　〒170-0003
　東京都豊島区駒込 1-40-4
　全国蕎麦製粉会館 2F　 202・203