数学工房 会報

2013年 9月

No. 112

巻　頭　言

　こういう生業をしていると猛暑も何のそので、良くも悪くも、いつも数学と向かい合うことになります。年のせいか余分な色気が失せて、十年一日のごとしのようです。
　講座の準備をしていると、たまにあれをやりたいという自分自身の意欲と講座の内容が完全に結びつくことがあります。そういう時は言うことなしなのですが、多くの場合、講座の準備は通い慣れた道ですから、初めのうちは退屈でうんざりする作業です。
　今度の夏の集中講座では、「Fourier 解析をめぐって」と題をつけて、いつもと違ったやり方でやろうと考えました。ただ、アイデアが出たところまでは良かったのですが、導入部分がなかなか決まりません。気持ちがまとまらずに時間だけが過ぎていき、私が面白くないのだから人が聞いて面白いわけはないなと焦りを覚えました。そんな中、Fejer の定理の証明のスケッチをしていると少しずつ気持ちが乗ってきて、だんだん自分の想像力が実解析学が作られていく現場に入り込んでいくのが分かりました。「こうなるとしめたもの！」
　Fourier 級数の一致の定理の研究から点集合論が始まり、Fourier 級数の収束の研究への応用から関数解析の初期の輝かしい応用の例、Steinhaus や Banach の仕事へと自ずと景色が広がっていきました。そこには、それまでは見えなかった、また聞こえなかった新しい発見がいつもあります。半端に知っていることはしばしば認識の敵です。それが学問の難しさです！
　秋学期も、そのような世界へのハイキングやトレッキングをご案内できるよう、みなさんがご自分で歩いて良かったなと思われる講座作りに精進いたします。

数学工房　桑野耕一　　　２０１３　夏の終わりに

秋学期講座案内

2013年9月～12月

略号	講座名	講座開始日	レベル
IB	多変数関数論入門 II	9 月 28 日 (土)	初・中級
IC	群・複素平面・Moebius 変換 II	9 月 29 日 (日)	入門
ID	初等線型代数と多次元空間での微積分 II	9 月 22 日 (日)	入門
IE	位相線型空間概論	9 月 21 日 (土)	中級
IF	数学の基本語彙と文法	開講未定	入門
IS	代数関数論 II	11 月 3 日 (日)	中級
G	抽象線型代数 II	9 月 22 日 (日)	初級
EA	抽象位相 II	9 月 29 日 (日)	初級
EB	外微分の応用 II	開講未定	初・中級
MB	解析学のための多様体入門 V	11 月 10 日 (日)	初・中級

[講座料]
　各講座、税込￥30,000(学生￥21,000) です。途中参加の場合、4 回講座は参加回数×￥7,500＋￥2,000 (テキスト代・手数料)、3 回講座は参加回数×￥10,000 ＋￥2,000 です。(学生は￥7,500 →￥5,000、￥10,000 →￥7,000 となります。)
　その他の講座の途中参加についてはお問い合わせ下さい。

◆ IB 多変数関数論入門 II
–一変数概観 2–
夏学期は Runge の定理、正則凸性まで、多変数関数論の流儀で紹介した。今学期は続きで、多変数関数論の 20 世紀前半の最も中心問題である Cousin の問題のイントロダクションとして Mittagleffler・Weierstrass の定理を偏微分方程式の方法で紹介する。また有用な補助的道具として劣調和関数を導入する。

(1) 有理型関数再論 (層の言葉による定義)
(2) Mittag-Leffler の定理
(3) Weierstrass の定理
(4) 劣調和関数
(隔週 4 回講座 14:00-17:00)

◆ IC 群・複素数平面・Moebius 変換 II
夏学期には、群の作用を含む準同型定理までの基本事項と若干の例を取り上げた。今学期のテーマは複素平面の初等幾何学と Moebius 変換の分類・標準型 解析変換群を扱う。たかが 1 次分数関数と侮るなかれ、ここから Klein-Poincare ' 流の Riemann 面の理論が始まる。

(1) 複素数・複素平面
(2) 初等幾何学への応用
(3) 正則関数
(4) Moebius 変換
　1) 定義と基本性質
　2) Moebius 変換の分類
　3) 正則変換群
(隔週 6 回講座 11:00-13:00)

◆ ID 初等線型代数と多変数の微積分 II
夏学期は多次元空間とその上の簡単な幾何と線形代数を考えた。秋学期は線形写像と行列に関する基本事項のまとめから初めて、有向体積と行列式を取り扱う。その系としてみなさんご存知の様々な公式が出てくる。また置換群の表現、符号群によって表現論的な考え方の有用性を悟ってもらえたらと考えている。そのような結果を基礎に無限解析 (多次元空間の積分) を直感的に導入する。

(1) 線型写像・変換　行列
(2) 有向体積と交代形式
(3) 変換と行列式
(4) 領域上の積分、定義と基本公式
(5) 領域の変換と Jacobi 行列
(6) いくつかの基礎積分
(隔週 6 回講座 11:00-13:00)

◆ IE 位相線型空間概論
–補充と一様有界性原理の応用–
夏学期は、線形写像の空間の S-位相と有界性、相対コンパクトの同等連続性による特徴付を行った。樽型空間を導入し Banach-Steinhaus の定理を最も一般的な形で導入した。秋学期は具体的な関数空間を論ずる際に重要になる、TVS の帰納極限・射影極限を論じる。また微妙かつ強力な応用が多いい Banach-Steinhaus の典型的な用法の型を学び理解を深めたい。幾つかのトピックスを除けば、後は位相テンソル積と核型空間の理論が残されるのみである。

(1) 帰納極限・射影極限
(2) Frechet 空間、IFL 空間
(3) Banach-Steinhaus の応用
(4) トピックス（Banach の定理）
(隔週 3 回講座 14:00-18:00)

◆ IF 数学の基本語彙と文法
(開講未定)

◆ IS 代数関数論 II
夏学期は附値体の完備化の概略まで扱った。秋学期は完備附値体の 2 つの基本定理、展開定理と Hensel の定理から始めて附値の拡張と射影を扱う。
(隔週 3 回講座 14:00-18:00)

◆ G 抽象線型代数 II
–線型写像と線型写像の空間、行列表現–
夏学期は線形代数が展開される場である線形空間の構造を学んだ。秋学期は線形空間の間の情報の伝播の仕方を探求する。更に伝達機構である線形写像の集団そのものがベクトルとして振舞う、すなわち線形空間であることを認識し、双対の内在的重要さを認識する。一般の線形写像と行列との関係も詳細に論じる。最後が線形変換の表現の核になる射影の定義と基本的な性質を導く。

(1) 線型写像の定義と基本的な性質
(2) 線型写像空間
(3) 線型形式と双対空間
(4) 行列表現
(5) 線型変換と射影
(隔週 3 回講座 14:00-18:00)

◆ EA 抽象位相
諸分野への基本的な応用において最も重要な概念及び方法を丁寧に扱う。始位相・終位相は対象に自然な位相を入れる際の有用な道具である。

(1) 連結性
(2) コンパクト性
(3) 始位相・終位相
(隔週 3 回講座 14:00-18:00)

◆ EB 外微分の応用 II
(開講未定)

◆ MB 解析学のための多様体入門 V
夏学期は全 2 回ということもあって多様体上の微分形式の積分と体積要素に焦点を絞った 3 秋学期は、基本的な応用の概説を行う。
(1)Stokes の定理
(2) 写像度
(3) ベクトル場のダイバージェンスと Laplacian
(隔週 3 回講座 14:00-18:00)

会員からのメッセージ

2008 年 1 月に入会した福田慧と申します．2011 年の春まで数学工房で約 3 年間抽象数学に触れ，今はアメリカの大学院博士課程で理論経済学を学んでいます．私が元々経済学に興味を持ったのは，数学という言語を通して（自然現象は然ることながら）人間行動や社会現象を理解したいと思うようになったことにあります．特に，複数の人間（意思決定者）の意思決定を数学的に分析する分野としてゲーム理論というものがありますが，今回は，経済学における抽象数学の使用の一例として，ゲーム理論における意思決定者（プレイヤー）の「合理性」について触れてみたいと思います．

2 人のプレイヤー A と B からなるゲームを考えます．ゲームとは，ここでは，複数のプレイヤーの集合，それぞれのプレイヤーの取りうることのできる戦略の集合，プレイヤーが選んだ戦略から生じるそれぞれのプレイヤーの利得関数の 3 つからなるものを指します．以下，プレイヤー A と B の戦略の集合をそれぞれ非空集合 S^a と S^b で表します．

この 2 人のプレイヤーが意思決定を行う際に，ゲーム理論では，次の「合理性の共有認識」(common knowledge of rationality) という概念が仮定されます．すなわち，プレイヤー A および B は合理的 (rational) であり，A は B が合理的であることを知り，また B も A が合理的であることを知り，A は B が A が合理的であることを知っていることを知り，B は A が B が合理的であることを知っていることを知っているということが無限に仮定されます．ここで，プレイヤーが合理的であるというのは，それぞれのプレイヤーは相手のプレイヤーの知識を考慮に入れたうえで自身にとって最適な戦略を選ぶということを意味しています．ここで，（プレイヤーの意思決定の問題からは離れて）プレイヤー A や B の合理性を語るためには，プレイヤーの知識，プレイヤーの知識に関する知識，知識に関する知識に関する知識，のような「高次元」の知識をすべて語ることのできる集合が存在するのかどうかという問題が生じます．ここでは，Cantor の対角線論法や数学工房の I.F. で扱う集合や写像の知識から直ちに導かれる，全ての知識・信念を含む集合の非存在定理の一つを取り上げたいと思います．以下，集合 X に対して，非空部分集合全体からなる集合族を $\mathcal{N}(X) := 2^X \setminus \{\emptyset\}$ と記します．

また，各プレイヤーがそれぞれ自分のみ持っている（知っている）プレイヤーの私的情報・特性をタイプと呼ぶことにします．そして，プレイヤー A と B の取りうるタイプの集合をそれぞれ非空集合 T^a と T^b で表します．

プレイヤーの「高次元」の知識を語るための数学的対象として，プレイヤーの戦略空間，タイプ空間，以下に定義される写像からなる $\langle S^a, S^b, T^a, T^b, v^a, v^b \rangle$ を (S^a, S^b)-可能性構造 (possibility structure) と呼びます．ここで，$v^a : T^a \to \mathcal{N}(S^b \times T^b)$ および $v^b : T^b \to \mathcal{N}(S^a \times T^a)$ とします．また，写像 v^a, v^b が全射である時に，(S^a, S^b)-可能性構造 $\langle S^a, S^b, T^a, T^b, v^a, v^b \rangle$ は，完備 (complete) であると呼ぶことにします．

写像 v^a（および v^b）は，プレイヤー A（B）のタイプが $t^a(t^b)$ である時に，相手，すなわちプレイヤー $B(A)$ の戦略とタイプの組が $v^a(t^a)(v^b(t^b))$ のどれかであると認識していると解釈されます．したがって，(S^a, S^b)-可能性構造が完備であるとは，与えられた相手の戦略とタイプの集合に対して，それを可能だと認識することのできるプレイヤーのタイプが存在するのかどうかを意味しています．完備な可能性構造は存在しえないことを証明するために，以下に必要となる補題を列挙します．そのうえで，定理を証明します．なお，実際には，プレイヤーの知識に関するいかなる条件の下で，完備性が達成されるかということに主眼が置かれていて，完備な構造の存在定理も確立されています．

補題 1. X, Y, Z を（非空）集合とする．

- *(Cantor)* $|X| > 1$ なる集合 X に対して，全射 $f : X \to \mathcal{N}(X)$ は存在しない．

- 単写像 $f : X \to Y$ が存在するならば，全射像 $g : Y \to X$ が存在する．
- 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が全射ならば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は全射である．
- 射影 $\Pi : \mathcal{N}(X \times Y) \to \mathcal{N}(X)$ を以下のよう定義する：任意の $E \in \mathcal{N}(X \times Y)$ に対して，$\Pi(E) := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$．この時，$\Pi$ は全射である．

定理 1. 非空集合 S^a と S^b を固定する． $|S^a| > 1$ または $|S^b| > 1$ であるとする．この時，完備な (S^a, S^b)-可能性構造は存在しない．

証明 $|S^b| > 1$ と仮定しても一般性を失わない．背理法で証明する．完備な (S^a, S^b)-可能性構造が存在すると仮定する．定理の仮定により，写像 $v^a : T^a \to \mathcal{N}(S^b \times T^b)$ は全射である．射影 $\Pi^b : \mathcal{N}(S^b \times T^b) \to \mathcal{N}(T^b)$ は全射であり，また $\mathcal{N}(T^b) \to T^b$ への全射も存在する．一方，定理の仮定より写像 $v^b : T^b \to \mathcal{N}(S^a \times T^a)$ は全射であり，射影 $\Pi^a : \mathcal{N}(S^a \times T^a) \to \mathcal{N}(T^a)$ は全射である．したがって，全射 $d : T^a \to \mathcal{N}(T^a)$ が存在する．ここで，$|S^b| > 1$ より，$|\mathcal{N}(S^b \times T^b)| > 1$ を得る．v^a が全射であるから $|T^a| > 1$ でなければならないが，ここで全射 $d : T^a \to \mathcal{N}(T^a)$ の存在は先の Cantor の定理に矛盾する．したがって，定理は証明された． ■

参考文献
Adam Brandenburger (2003) On the existence of a “complete” possibility structure. In Marcello Basili, Nicola Dimitri, and Itzhak Gilboa (eds.) *Cognitive Processes and Economic Behavior*. Routledge.

入門　桑野道場　（第23回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//

訂正とお詫び

前々回の問題の問題 2 2. の解法 (2) に間違いがありました．式の中に不等号の向きが逆の箇所がありますので，矛盾が出てきません．解法 (2) は無しとします．申し訳ありませんでした．

これは山口県の会員の熊野さんから指摘されたものです．ありがとうございました．熊野さんはこのほかにも証明の改良版をいただきましたが、残念ながらここでは紹介できません．機会があれば紹介したいと思います．

前回の問題

$I := [\alpha, \beta]$：有界閉区間とする．

1. 以下の条件を満たす I 上の実数値 C^1 級関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が存在したとする．
   (a) 関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の導関数列 $\{f'_n\}_{n\geq 1}$ がある I 上連続な関数 g に I 上一様収束する．
   (b) $x_0 \in I$ が存在して 極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ が存在する．

   このとき関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ はある I 上の実数値 C^1 級関数 f に I 上一様収束し，$f' = g$ が成立することを示せ．
2. 以下の条件を満たす I 上の実数値 C^r 級関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が存在したとする．
   (a) 関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の r 階導関数列 $\{f_n^{(r)}\}_{n\geq 1}$ がある I 上連続な関数 g に I 上一様収束する．
   (b) 次の性質を持つ $x_0 \in I$ が存在する：任意の $k(0 \leq k \leq r-1)$ に対して極限 $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_0)$ が存在する．

   このとき関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ はある I 上の実数値 C^r 級関数 f に I 上一様収束し，$f^{(r)} = g$ が成立することを示せ．

解答

1. 極限 $\lim_{n\to\infty} f(x_0)$ が存在するから $y_0 := \lim_{n\to\infty} f(x_0)$ として，$f(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\,(x \in I)$ とおく．この f が求めるものであることを示す．
微積分学の基本定理に注意すれば，任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| = \left|f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right| \leq |f_n(x) - y_0| + \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|dt \leq |f_n(x) - y_0| + (\beta - \alpha)\|f_n' - g\|_I$．ただし I 上の実数値関数 h に対して $\|h\|_I := \sup\{|h(t)|; t \in I\}$ のことである．
x は任意なので $\|f_n - f\|_I \leq |f_n(x) - y_0| + (\beta - \alpha)\|f_n' - g\|_I \to 0 (n \to \infty)$．即ち関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は f に I 上一様収束する．また微積分学の基本定理により $f' = g$ であり f は C^1 級である．
2. 微分の階数 r による数学的帰納法で示す．$r = 1$ のときは前問である．$r - 1 (r > 1)$ のとき命題は真と仮定する．前問より I 上の C^1 級関数 h が存在して関数列 $\{f_n^{(r-1)}\}_{n\geq 1}$ は h に I 上一様収束し，$h' = g$．帰納法の仮定より I 上の $\mathrm{C}^{(r-1)}$ 級関数 f が存在して関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ は f に I 上一様収束し，$f^{(r-1)} = h$．したがって f は I 上の C^r 級関数であり，$f^{(r)} = h' = g$．よって帰納法は完了した．

解説

積分を用いれば比較的容易に出来ます．積分を用いない方法は残念ながら思いつきませんでした．
どなたか解答をお寄せください．

今回の問題

1. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ををユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の実線型形式とするとき，φ は $\mathbb{R}^n$ 上連続であることを示せ．
2. K をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト集合とする．前問より実線型形式 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は K で最大値をもつ．今，φ が恒等的に 0 でなく $x_0 \in K$ で φ が最大値をとるとき x_0 は K の内点ではないことを示せ．（したがって φ は必ず K の境界で最大値をとる）
3. K をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト集合とする．このとき K の閉凸包を $\mathrm{Ch}(K)$ で表すことにする．すなわち $\mathrm{Ch}(K)$ は K を含む最小の閉集合かつ凸集合とするとき
$$\mathrm{Ch}(K) = \bigcap_{\varphi \in (\mathbb{R}^n)'} \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \leq \max_{y \in K} \varphi(y)\}$$
が成立することを示せ．ただし，$(\mathbb{R}^n)'$ は $\mathbb{R}^n$ 上の実数値実線型形式全体を表すものとする．

問題について一言

IB(複素解析）で扱われた問題です．昨年，凸性に関しては似た問題を出題していますが，今回は視点を少し変えています．どしどし解答をお寄せ下さい．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2013 年 11 月 30 日 (土)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2013 年 9 月 9 日発行
発行人　　　桑野耕一
編集人　　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401

連絡先
　オフィス電話：042-495-6632
　数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
　連絡は極力 e-メールでお願いします。
　e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
　e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
　http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
　〒170-0003
　東京都豊島区駒込 1-40-4
　全国蕎麦製粉会館 2F　 202・203