数学工房 会報

2014年 1月
No. 113

巻 頭 言

新年あけましておめでとうございます。今年の初夢は、ある世界の境界の関数空間の同時固有空間を懸命に調べている夢でした。私たちの世界に異状が生じてほかの世界との行き来ができなくなったらしいのです。なるほど、ある固有空間が消滅している！何しろ夢ですから、荒唐無稽なとは思えぬわけです。今年も自分自身の手で、自分自身の足で数学の世界を歩き、過去から連綿と続く数学の世界内在空間へ足を踏み入れたい。そういう夢を持つ人のために、みなさんの半歩先をあゆみながら、基礎知識と基本的な技術の習得のお手伝いをしたいと思います。夢が夢でなくなるように！

数学工房のスタンスは通常言われる数学教育とはかなり異なります。数学を発展的な層のもとで掴む基礎技術としての抽象の型の伝授とでも言いましょうか。数学工房では、数学のアイデアの発展の歴史に注意しながらとりわけ 20 世紀初頭から中葉までに形成された抽象的な表現形式で作られた典型的な基礎理論（抽象線形代数、抽象位相、多様体 etc）を学びつつ、技術としての抽象の方法を身につけることを目標にしています。自分の手で様々な道具を作り、展開される数学的世界を歩いていくそれができるためには何が必要でしょうか？抽象の技術の基本は集合論と代数をベースにした記号法、概念構成法を学ぶことは無論ですが、その次の段階で、抽象的に表現された数学を、機会のあるごとに具体的な問題に適用する（これを抽象理論の解凍と呼んでいます)。逆に、具体的な数学の問題から背後にあるより普遍的な構造を読む。このようなことを常々心がけることにより技術としての「抽象の方法の型」が身についてくるのです。

抽象の方法があると、数学の世界の広がりが豊かに大きくなります。膨大な量の数学的現象を自分でコントロールできます。そのようにして歩んでいくと、数学の様々な分野、様々な表現様式歴史的発展段階、現代的な数学、過去の数学があなたの中で対立するもの別物ではなくなり数学を曾て、担ってきた巨匠達の声を聞き取れるようになっていくでしょう。それによって幸福になる人たちがいる限り数学工房は続きます。

2014 年元旦　数学工房　桑野耕一

春学期講座案内　2014年 1月〜4月

2014 年 1 月 18 日より数学工房の春学期が以下の要領で開講されます。新規講座は IA、IF、MB の 3 講座です。

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	解析教程	1 月 25 日 (土)	入門
IB	多変数複素解析	1 月 18 日 (土)	中・上級入門
IC	Moebius 変換の理論	1 月 26 日 (日)	入門
ID	初等線型代数と微積分	1 月 19 日 (日)	入門
IE	位相線型空間	3 月 2 日 (日)	中・上級入門
IF	数学の基本語彙と文法	1 月 25 日 (土)	入門

略号	講座名	講座開始日	レベル
IS	代数関数論	3 月 23 日 (日)	中・上級入門
G	抽象線型代数	1 月 19 日 (日)	初級
EA	抽象位相	1 月 26 日 (日)	初級
MB	Vector Bundles	3 月 15 日 (土)	中級

入門

◆ IA 解析教程 0
–代数解析学的 Introduction–
いわゆる、$\epsilon - \delta$ の前段として、18 世紀的な思想のもとで初等超越関数を導入しその基本的な性質を導きます。これらの知識を前提として、5 月から、連続関数の基本定理から Fourier 級数の基礎的な性質までを目標にした Cours d'Analyse を開講する予定です。
(土曜・隔週 4 回 14:00-17:00)

◆ IC Moebius 変換の理論
–解析的自己同型群–
2013 年の秋学期では、Moebius 変換の初歩的な性質と、複素数平面 (Riemann 球) 上の初等的幾何学との関係を扱いました。今期は比較的初等的に扱える範囲で Moebius 変換の分類、解析的変換群、基本的な領域の解析的変換群などを紹介するつもりです。ここから先の内容はこの講座の範囲を超えたものになるので、次の機会にしたいと思います。
(日曜・隔週 6 回 11:00-13:00)

◆ ID 初等線型代数と微積分・多次元空間
実変数の多変数関数の高階微分と平均値定理、グラージェント、ヘッセ行列、ラプラシアン、そして多変数の Taylor 公式、極値の分類などを座標フリーの方法で明確に扱います。

(1) r 回連続微分可能な関数のクラス
(2) グラージエント、ダイバージェンス、Hesse 行列、ラプラシアン
(3) 高階微分とテンソル表示
(4) 剰余付き Taylor 公式
(5) 極値と極値の分類
(日曜・隔週 6 回 11:00-13:00)

◆ IF 数学の基本語彙と文法
文字通り数学語の基本的なスキルを学んでもらう講座です。もし自分で数学の世界を歩くつもりなら、一部の例外的な人を除いて、まずここから始めることを勧めます。

(1) Σ 記法と数学的帰納法
(2) 集合と写像
(3) トピックス
(土曜・隔週 6 回 11:00-13:00)

中・上級入門

◆ IB 多変数複素解析　初等的理論
2013 年夏学期・秋学期に 1 変数の複素関数論により多変数の状況で扱うテーマと方法を紹介しました。2 変数以上の正則関数と 1 変数関数論では、関数の存在域の幾何学的な形状について全く違う状況が現れてきます。今期は多変数の複素関数論の Cauchy 理論を中心に 1 変数関数論とパラレルな部分を中心に取り扱います。多重級数の取り扱いや、多変数の場合に有用な略記法等になれることも今期の目標です。
(土曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ IE 位相線型空間　Duality 3
集中講座で取り上げた 1、2 に続いて Duality をとりあげます。局所凸空間の Duality を用いた研究は現代的な位相線形空間論の核心的な部分です。深くしかも膨大に積み重ねられた部分なので、この理論の全体を取り上げることは、私には到底不可能ですので、これから位相テンソル積、作用素環の理論へつながる段階として基礎的と思われることにとどめました。

(0) 定義と基礎的な結果の整理
(1) 射影位相と帰納位相の Duality
(2) 閉線型写像の Adjoint
(3) 一般写像定理と閉グラフ定理
(4) トピックス
(日曜・毎週 3 回 14:00-18:00)

◆ IS 代数関数論 代数関数体
2013 年の夏学期、秋学期で一通り離散附値体の理論を準備しました。今期から代数関数論の本論 (岩澤健吉 代数関数論第 2 章) に入ります。
(日曜・毎週 3 回 14:00-18:00)

初級

◆ G 抽象線型代数
–内積空間の幾何と作用素のクラス–
一般位相と並んで最も基本的な型げいことしてこの講座は設けられているが、同時にこの辺の内容は応用上も極めて有用な部分です。前半は内積空間の幾何学:直交性、正射影定理から始まり、直交化、線形形式の表現定理とその応用までです。後半は作用素のクラスを取り上げます。純粋、応用を問わず、いたるところに現れる基本的な作用素の一般論です。二次形式のより詳しい理論や特異値、特異ベクトル等は集中講座で取り上げる予定です。

(1) 内積空間の幾何学
(2) 基本的な作用素のクラス
(3) 対象変換とスペクトル
(日曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ EA 抽象位相　ネット
　今期は 2 つの解析学への応用上重要なトピックスを補充します。フイルタと並んで有用な道具であるネットを扱います。私見では、事柄にもよりますが関数空間やより一般的に位相線形空間などで収束を扱う際にはフイルタよりはるかに使い勝手がよいように感じています。余裕があれば、一般添字の級数のネット収束も扱う予定です。
　もうひとつのトピックスはパラコンパクト性を扱います。多くの問題で局所データを貼り合わせる、あるいは逆に解析的対象を局所的なデータに分解する。そうして必要な性質を持つ解析的対象を構成する。このような操作が可能な位相空間の一般論です。このような道具の確立により多様体上の解析学、解析多様体上の解析学は長足の進歩を遂げました。

(1) ネットの定義と基本的な性質
(2) 一般添字の級数
(3) 単位の分解とパラコンパクト性
(日曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

中級

◆ MB Vector Bundles
　線形代数と一般位相のみを仮定して第 1 歩から論じます。多様体の基本知識があれば理解の助けにはなるが、必ずしも必要としません。M.F.Atiyah の 1964 年の Harvard での講義ノート (K-Theory Benjamin Inc) を参考にしました。

(1) 基本的定義
(2) ベクトルバンドル上の様々な操作
(3) 部分バンドルと商バンドル
(4) 付随する各種構造
(5)G-バンドルと G-空間
(土曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

講座料について
　各講座とも、税込￥30,000(学生￥21,000) です。途中参加の場合、4 回講座は参加回数×￥7,500 ＋￥2,000 (テキスト代・手数料)、3 回講座は参加回数×￥10,000 ＋￥2,000 です。(学生は￥7,500 →￥5,000、￥10,000 →￥7,000 となります。)
　その他の講座の途中参加についてはお問い合わせ下さい。

会員からのメッセージ

　原田雅樹と申します。現在、大学で教鞭をとっており、哲学を中心に教えています。専門について学生に対して話すことはほとんどないのですが、20 世紀のフランスの科学哲学ないしエピステモロジーを中心に研究しています。フランスの科学哲学ないしエピステモロジーといってもピンと来ない方がほとんどだと思いますが、数学の哲学ではジャン・カヴァイエス、物理学の哲学ではガストン・バシュラール、生物学の哲学ではジョルジュ・カンギレムといった哲学者が知られています。割と有名な哲学者としては、ミッシェル・フーコーやジル・ドゥルーズらがエピステモロジーの方法論に影響を受けています。また、ジュール・ヴュイユマンという哲学者は、ラグランジュの代数方程式論からガロアによる群の誕生に至る思考方法の変化と、カントからフィヒテにいたる哲学的方法論の変化との間にある類似性を引き出しています。エピステモロジーとは、数学を含む科学の歴史において概念がいかに生成してくるかということに哲学的分析をくわえるものとして理解してよいでしょう。私自身も論文を掲載しておりますが、フランス・エピステモロジーについて興味のある方は、金森修編『エピステモロジー―20 世紀の科学思想史―』、慶應義塾大学出版会、2013 ;『VOL05―エピステモロジー―知の未来のために』、以文社、2011 などをご覧ください。エピステモロジーがどんなものであるかという概観がつかめるかと思います。

　私自身はと申し上げますと、量子力学、そして場の量子論において、概念がどのように生成されてきたかという論文で学位をとりました。量子論においては、物理的実在性を考慮するのが非常に困難ですが、それは、理論の幾何学化の困難さと結びついていると、私は考えています。代数的にないし解析的に理論計算はでき、現象を予言することはできるのですが、幾何学化が困難で、それゆえに理論がいかなる物理的実在を指示しているのかを理解するのが難しくなっているのです。数学者アラン・コンヌは非可換幾何学を構築し、場の量子論の幾何学を試みています。もちろんこれが成功しているとは言い難いですが。

　場の量子論の幾何学化の試みにおける概念の生成を出発点にして、現在、数学における空間概念の生成について興味をもっています。基本的には、幾何学的空間と数論的数という直観的概念は、

代数学と解析学のシンボリックな操作を媒介にして常に干渉し合い、再構成されていると考えています。このことを哲学的に丁寧に分析することで、人間の思考について、ないし概念の生成について少しでも理解を深めることができるのではないかと考えています。その際に、数学工房で数学の基礎的考え方に触れることは私にとってとても有意義なものとなっています。今後ともよろしくお願いいたします。

入門　桑野道場　（第24回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//

前回の問題

1. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ををユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の実線型形式とするとき，φ は $\mathbb{R}^n$ 上連続であることを示せ．
2. K をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト集合とする．前問より実線型形式 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は K で最大値をもつ．今，φ が恒等的に 0 でなく x_0 で φ が最大値をとるとき x_0 は K の内点ではないことを示せ．（したがって φ は必ず K の境界で最大値をとる）
3. K をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト集合とする．このとき K の閉凸包を $\mathrm{Ch}(K)$ で表すことにする．すなわち $\mathrm{Ch}(K)$ は K を含む最小の閉集合かつ凸集合とするとき

$$\mathrm{Ch}(K) = \bigcap_{\varphi \in (\mathbb{R}^n)'} \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \leq \max_{y \in K} \varphi(y)\}$$

が成立することを示せ．ただし，$(\mathbb{R}^n)'$ は $\mathbb{R}^n$ 上の実数値実線型形式全体を表すものとする．

解答

1. $\{e_1, \dots e_2\}$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする．任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\varphi(x) - \varphi(y)|$ を評価する．三角不等式と Cauchy-Shwarz の不等式を用いて $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - y)| = \left|\varphi(\sum_{j=1}^{n} \langle x - y, e_j \rangle e_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \langle x - y, e_j \rangle \varphi(e_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle x - y, e_j \rangle||\varphi(e_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x - y\||\varphi(e_j)| = \|x - y\| \sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|$．この不等式の評価から φ は $\mathbb{R}^n$ 上連続である（もっと強くリプシッツ連続が言える）．
   ただし $\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積，$\| \cdot \|$ は標準内積によるノルムを表す．すなわち $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ とするとき $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$，$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2}$．
2. φ が K の内点 x_0 で最大値をとるとき φ は恒等的に 0 であることを示す．
   仮定から $\rho_0 > 0$ が存在して $\mathrm{B}_{\rho_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \rho_0\} \subset K$．
   まず $\varphi(x_0) = 0$ を示す．
   $\varphi(x_0) \neq 0$ と仮定する．$x_0 \neq \mathbf{0}$ である．$\rho := \min\{\rho_0, \|x_0\|\}$ と置くと $\|x_0\| > 0$ であるから $\rho > 0$ であり，$\mathrm{B}_\rho(x_0) \subset \mathrm{B}_{\rho_0}(x_0) \subset K$．$\delta := \rho/(2\|x_0\|)$ とすると $(1+\delta)x_0, (1-\delta)x_0 \in \mathrm{B}_\rho(x_0)$ が成立する．$0 < \delta \leq 1/2$ に注意して $\varphi(x_0) > 0$ ならば $\varphi((1+\delta)x_0) = (1+\delta)\varphi(x_0) > \varphi(x_0)$．これは $\varphi(x_0)$ の最大性に反する．また，$\varphi(x_0) < 0$ ならば $\varphi((1-\delta)x_0) = (1-\delta)\varphi(x_0) > \varphi(x_0)$．これも $\varphi(x_0)$ の最大性に反する．したがって $\varphi(x_0) = 0$．すなわち φ の K 上の最大値は 0．
   次に φ が $\mathrm{B}_\rho(x_0)$ 上恒等的に 0 であることを示す．
   $x_1 \in \mathrm{B}_\rho(x_0)$ が存在して $\varphi(x_1) \neq 0$ と仮定する．$x_2 := 2x_0 - x_1$ とおくと $x_2 \in \mathrm{B}_\rho(x_0)$．$\varphi(x_2) = \varphi(2x_0 - x_1) = 2\varphi(x_0) - \varphi(x_1) = -\varphi(x_1)$．$\varphi(x_1) \neq 0$ より $\varphi(x_1)$ と $\varphi(x_2)$ は異符号．これは φ の最大値が 0 であることに反する．よって φ は $\mathrm{B}_\rho(x_0)$ 上恒等的に 0．
   $\mathrm{B}_\rho := \{x - x_0 | x \in \mathrm{B}_\rho(x_0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho\}$ とおくと明らかに φ は B_ρ 上

恒等的に 0．$\{e_1,\ldots,e_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とし $0<\rho'<\rho$ となる ρ' をとれば，$\{\rho' e_1,\ldots,\rho' e_n\}\subset \mathrm{B}_\rho$ かつ $\{\rho' e_1,\ldots,\rho' e_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底．$\varphi(\rho' e_j)=0\,(1\le j\le n)$，すなわち φ は基底で消える．よって φ は $\mathbb{R}^n$ 上恒等的に 0 である．

3. 次の記号を導入する．$\varphi\in(\mathbb{R}^n)'$ と実数 α に対して $\mathrm{H}(\varphi;\alpha):=\{x\in\mathbb{R}^n|\varphi(x)\le\alpha\}$．また K がコンパクトのとき $\gamma_\varphi:=\max\{\varphi(x)|x\in K\}$ と表すことにする．これらの記号を用いると命題は次のように表せる．

$$\mathrm{Ch}(K)=\bigcap_{\varphi\in(\mathbb{R}^n)'}\mathrm{H}(\varphi;\gamma_\varphi)$$

この命題を示す．すなわち右辺が K を含む最小の閉かつ凸集合であることを示せばよい．
右辺が K を含むこと，閉集合であること，凸集合であることは容易にわかる．よって A が K を含む任意の閉凸集合とするとき，$\bigcap_{\varphi\in(\mathbb{R}^n)'}\mathrm{H}(\varphi;\gamma_\varphi)\subset A$ を示す．
次の補題を用いる

補題：
$\mathbb{R}^n\supset A$ を閉凸集合（ただし $A\subsetneqq\mathbb{R}^n$）とするとき任意の $x_0\in\mathbb{R}^n\setminus A$ に対して以下の条件を満たす $\varphi\in(\mathbb{R}^n)'$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在する：$x_0\notin\mathrm{H}(\varphi;\alpha)$ かつ $A\subset\mathrm{H}(\varphi;\alpha)$
※この補題の証明は省略する．会報 No109 2012 年 8 月の問題 2 の解答の中で用いられている補題とほとんどいっしょなので気になる方はその証明を参照のこと．

任意に $x_0\in A^C$ をとり固定する．補題より $\psi\in(\mathbb{R}^n)'$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在して $x_0\notin\mathrm{H}(\psi;\alpha)$ かつ $A\subset\mathrm{H}(\psi;\alpha)$．$K$ はコンパクトなので $\psi(y_0)=\gamma_\varphi=\max\{\varphi(x)|x\in K\}$ となる $y_0\in K$ が存在する．$y_0\in K\subset A\subset\mathrm{H}(\psi;\alpha)$ より $\psi(y_0)=\gamma_\varphi\ge\alpha$．したがって $\mathrm{H}(\psi;\alpha)^C\subset\mathrm{H}(\psi;\gamma_\psi)^C$．よって $x_0\in\mathrm{H}(\psi;\gamma_\psi)^C\subset\bigcup_{\varphi\in(\mathbb{R}^n)'}\mathrm{H}(\varphi;\gamma_\varphi)^C$．したがって $A^C\subset\bigcup_{\varphi\in(\mathbb{R}^n)'}\mathrm{H}(\varphi;\gamma_\varphi)^C=(\bigcap_{\varphi\in(\mathbb{R}^n)'}\mathrm{H}(\varphi;\gamma_\varphi))^C$．すなわち $\bigcap_{\varphi\in(\mathbb{R}^n)'}\mathrm{H}(\varphi;\gamma_\varphi)\subset A$.

解説

1. きわめて基本的な命題です．線型形式の連続性は原点のみでチェックすればいいのですが素朴にやってみました．また線型形式の基本定理（線型形式は内積の形に表せる）を用いても簡単にできます．一般に，無限次元線型空間上の線型形式の連続性は保証されません．
2. コンスタントに 0 でない線型形式の最大値は境界でとるという命題です．似たような性質は凸関数や正則関数も持っています．ただ解答はずいぶんごたごたしてしましいました．すっきりした証明がほしいところです．また，まず φ が開写像であることを示してからやるという方法もあるとは思います．
3. 通常セミナーの IB(多変数関数論) で提出された問題です．解答の中にも書きましたが，会報 No109 2012 年 8 月の問題 2 とほぼ同じです．ただ視点を少し変えています．視点を変えることによって線型形式を違う関数に置き換えることが可能になります．例えば大雑把に言って，この閉凸包の線型形式を正則関数の絶対値に置き換えたものが正則凸包の概念です．

今回の問題

z_1,z_2,z_3 を複素数平面上の相異なる 3 点とする．
$|z_1|=|z_2|=|z_3|$ が成り立っているとき次の条件は同値である．

1. z_1,z_2,z_3 は正三角形の頂点である．
2. $z_1+z_2+z_3=0$ が成立する．
3. 複素数 c が存在して，z_1,z_2,z_3 は方程式 $Z^3-c=0$ の解である．

問題について一言

久しぶりに複素数の問題です．複素数の性質をうまく使って挑んでください．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2014 年月 3 月 31 日 (月)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2014 年 1 月 10 日発行
発行人　　　桑野耕一
編集人　　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203