Math.
No. 114
www.sugakukobo.com

会報 2014 年 5 月

数学工房

巻　頭　言

■いたるところ明るい緑の光に包まれて新しい季節が巡ってまいりました。年をとっていくと、大げさに聞こえるかもしれませんが、ある画家（Barthus）だったか？が絵筆を取ることは私にとっては神に近づくことだと述べたと思うのですが、それは実感としてわかってくる気がします。宗教臭さが嫌ならば、数学に没頭することがこの上なく幸福に感じられると言う事が本当にわかるようになってきたとでも言いましょう。そして、数学工房の会員の皆さんもどちらかというと、実利目的よりも、数学に没頭することが、人生の喜びであるある人たちのようです。

数学工房は、そのような方が自律的に数学をやるための基礎を提供すること、また稽古をする場を提供することが最も大切な役割だと思っています。私の独断と偏見で言えば学校教育での数学に欠けている部分、数学を通じて人生の豊かさや幸福に関わる部分を提供していくのも数学工房の仕事かと思います。春の集中も終わり２０１４年度の講座がまもなく始まります。

■時代が変わると数学の言葉遣いも変わる

私の世代が専門的な数学を学んだ時代と、数学の表現法のスタンダードが変わったのか先日今学期の下準備のために Fiber-Bundle のテキストを見てみたら、初めから何の断りもなしにカテゴリ的な言葉で書かれているのでちょっと驚きました。私の感覚で言うとちょっとルーズな感じがして違和感を覚えてしまうのです。私の年代だったら、多分 Bourbaki 流を自分に使いやすいように加工したやり方で、まずは大きすぎないカテゴリを定めて、通常の集合と構造を記述し、構造を保存する準同型から始めて、十分に確立された代数や位相の言葉を使って、一歩一歩理論の骨組みを作って行きます。カテゴリ的な記述に言及するのはそれからという段取りを思い浮かべます。

尤も今から 40 年ほど前、私が学生の頃、微積分や関数論、代数などの基礎科目のテキストには、集合も写像のしゃの字もありませんでした。集合、写像、構造というおまじないで、学生運動のスローガンになるほど Bourbaki 流の数学の建築術はキラキラした憧れのスタイリッシュな数学でした。

抽象線形代数や位相などが入ってきて、それ以前の伝統的な言葉で育った先生方が結構苦労されていて、むしろ若い助手の先生が演習などで当時の斬新な教科書（今ではスタンダードですが）を使っていました。

当時の学部では、抽象的なトポロジーや抽象線形代数など、ましてや多様体などはなくて、まずは代数と幾何学、古典的な物理数学や、教職科目では Euclid 幾何学、古典的射影幾何学などが教えられておりました。歴史は繰り返すという言葉を思い出します。先日眺めた Fiber-Bundle の教科書で受けた驚きの正体は、「自分は年を取ったつもりはないのに、旧世代にいつの間にか入っていた。」という驚きでしょうか。

■自立した学び

数学の記述スタイルの変化は、法則性をより統一的に簡潔に記述する言語を獲得する努力の賜物です。またその時代の精神の反映としての流行もあります。私が言うまでもないと思いますが、別に古い言葉で書かれた数学がダメなわけではありません。ルネッサンスやバロック音楽が新鮮さを失わないのと同じです。実際、たとえば初等幾何の円や三角形たちの精妙な性質や Dirichlet の解析数論の美しさなどを思い出してください。

新しい道具を必要に応じて身につけつつご自分で様々な道を歩いてみてください。たとえ、どんな偉い人が書いたものでも言ったことでも鵜呑みにせずに、ご自分で自律的に。

2014 年 5 月 9 日 数学工房　桑野耕一

夏 学 期 講 座 案 内

2014 年 5 月〜8 月

2014 年夏学期講座は、入門 2 講座、初級 2 講座、中級 1 講座、初級入門 1 講座、中級入門 3 講座を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	5 月 18 日	入門
I.D	多変数微積分、初等線形代数、多次元空間	5 月 25 日	入門
I.C	環、加群	5 月 18 日	初級入門
E.A	距離空間と解析学序説	5 月 25 日	初級
G	抽象線型代数　線型空間	7 月 6 日	初級
I.B	多変数関数論　正則関数の存在域	5 月 17 日	中級入門
I.E	位相線型空間　位相テンソル空間その 1	6 月 28 日	中級入門
I.S	代数関数論	7 月 5 日	中級入門
M.C	Vector Bundles	5 月 24 日	中級

<< 夏学期講座詳細日程 >>

月	日	曜日	略号	時間
5	17	土	IB1	14:00 − 18:00
	18	日	IA1	11:00 − 13:00
	18	日	IC1	14:00 − 18:00
	24	土	MC1	14:00 − 18:00
	25	日	ID1	11:00 − 13:00
	25	日	EA1	14:00 − 18:00
	31	土	IB2	14:00 − 18:00
6	1	日	IA2	11:00 − 13:00
	1	日	IC2	14:00 − 18:00
	7	土	MC2	14:00 − 18:00
	8	日	ID2	11:00 − 13:00
	8	日	EA2	14:00 − 18:00
	14	土	IB3	14:00 − 18:00
	15	日	IA3	11:00 − 13:00
	15	日	IC3	14:00 − 18:00
	21	土	MC3	14:00 − 18:00
	22	日	ID3	11:00 − 13:00
	22	日	EA3	14:00 − 18:00
	28	土	IE1	14:00 − 18:00
6	29	日	IA4	11:00 − 13:00
7	5	土	IS1	14:00 − 18:00
	6	日	ID4	11:00 − 13:00
	6	日	G1	14:00 − 18:00
	12	土	IE2	14:00 − 18:00
	13	日	IA5	11:00 − 13:00
	19	土	IS2	14:00 − 18:00
	20	日	ID5	11:00 − 13:00
	20	日	G2	14:00 − 18:00
	26	土	IE3	14:00 − 18:00
	27	日	IA6	11:00 − 13:00
8	2	土	IS3	14:00 − 18:00
	3	日	ID6	11:00 − 13:00
	3	日	G3	14:00 − 18:00

◆ I.A　解析教程

17 世 紀に誕生した解析学は無限級数展開と微積分の基本定理の発見により大いに発展し、18 世 紀末には現在は古典解析学といわれる巨大な殿堂がほぼ姿を現しました。しかし数学の対象の広がりに連れて、それまでの方法と理解では解明 できない問題が次々浮上してきました。

例えば振動の初期条件のような不規則な関数が果たして解析関数の級数として展開できるのか？そもそも関数とは何か？積分とは何か？そのような問題意識から、19 世 紀の解析学は、18 世 紀解析学の基礎を再構築し未解決問題を解決するところから始まりました。Abel,Cauchy,Dirichlet,Weierstrass はこのような立場の代表者で厳密主義とも言われます。

極限概念の正確に定義すること 基礎にして書かれた学校用の最初の 教科書が、Cauchy の Cours d'Analyse で す。この厳密化の流れの中で集合論が現れ、実解析学や関数解析学の基礎付けが可能になり、19 世 紀解析学から２０世紀解析学へとつながってきたのです。

この講座の名前は Cauchy の 伝統に沿うものです。扱う内容の中心は古典解析ですが、扱い方は、線形代数が強調されている点で幾分 20 世 紀的です。

（1）数直線の捉え方
（2）収束列、収束級数の理論
（3）連続関数の 3 つ の基本定理

◆ I.D　多変数微積分、初等線形代数、多次元空間

微積分とは局所的には Euclid 空 間の初等図形の計量に他ならない。微分法は、写像を定義域の与え

られた点の近くで、線形写像で近似することである。初等線形代数を学びつつその概念を利用して、任 意次元の Euclid 空 間の初等幾何を展開し任意次元の空間に属する基本図形たちそれ自体の空間が また計量構造を持つ、数学特有の入れ子の構造を理解する。その結果を用いて、通年で高階の微分、多変数の Taylor 公式、極値問題と２次形式あたりまでを論ずる。

（１）数ベクトル空間
（２）内積・直交性
（３）Euclid 空間の初等幾何
（４）線形部分空間、Span、商空間
（５）行列と線型写像

◆ I.C　環、加群

Atiyah Macdonald の有名な教科書 Commutative Algebra を基礎にした講義で基礎概念の導入のあと多項式環と多項式環の商環の詳細な例の演習が付きます。

（１）群と可換環の定義
（２）部分環
（３）環準同型
（４）多項式環、形式冪級数環（５）イデアル、商環（６）零因子、冪零元、単元（７）素イデアル、極大イデアル、局 所環

◆ E.A　距離空間と解析学序説

昨年 度は、開集合系からフイルターまで抽象位相を通年３期にわたって扱った。今期は通常の 応用では最も頻繁に現れる距離空間に焦点を絞る。 第３期には基 本的な関数空間と解析学の基本原理である Baire Category 定理 とその応用を扱う。

位相と線型代 数は解析学の基本原理です。にもかかわらず、最も学び難いものでもあります。先の講座に行 かれる方、お仕事で応用解析を目指す方はこの講座で学んで置かれる事をお勧めします。

（１）距離関数・距離空間の定義と典型例
（２）近傍系・開集合系・閉集合系・閉包・開核
（３）点の位相的分類
（４）点列の基本的性質・完備性
（５）連続関数・一様連続関数
（６）距離空間の正規性

◆ G　抽象線型代数・線型空間

代数の役割は、数学・物理学をはじめとする諸科学の計算可能な言葉を創ることです。その中でも、抽象線型代数は基本的で様々な分野の記述 に現れてきます。 例えば道を線型化する。基本図形の線型化。微分の空間、関数空間などなど。実用的でないか？とんでもない！現実の微積分は座標化された線型代数そのものです。そして究極の線型代数は作用素環というわけです。

抽象線型代数は、一般位相と並び最も基本的で根源的な数学的対象の表現手段です。抽象を道具として使いこなす現代的な数学では、この部分への習熟は当然の前提です。そのような意識のもとで教程が作られています。数学工房の講座は、入門的な講座を除いては抽象線型代数の基本のある程度の習熟を仮定しています。

上に述べた目的のため、線型空間論は有限次元特有の問題を除いては、無限次元で使える形で述べられています。また座標の概念や双対の取り扱いに特徴があります。 学部で線型代数を学ばれた方でも、道具として線型代数を使いこなす立場からの学び直しをおすすめします。

（１）線型空間の定義と典型空間
（２）部分空間の演算
（３）生成される線型空間、直和
（４）線型独立・線型従属
（５）次元・基底・座標

◆ I.B　多変数関数論　正則関数の存在域

春学期に多変数正則関数の定義を Weierstrass 流に冪級数展開可能性（解析性）により定義し、Cauchy 積分公式とその帰結、1 変数複素関数論と平行な結果を導出した。最後のベキ級数の収束域の研究で初めて 1 変数関数論と多変数関数論の違いを示す状況に出会った。冪級数の収束域の絶対空間の対数凸性！ 1 変数複素関数論にはどんな複素平面上の領域でも、その領域から正則関数として拡張できないという Weierstrass の定理がある。この結果が既に単純な領域で壊れるのである。ある正則関数が存在して拡張できないような領域を正則領域という。今学期は正則領域の特徴付けをめぐる諸概念の関係と有用な道具である劣調和及び多重列調 和関数の理論を取り扱う。

（１）基礎的な事実
（２）正則領域・正則凸性
（３）Subharmonic Functions
（４）Plurisubharmonic Functions と Bergmann Kernel Functions
（５）擬凸領域

◆ I.E　位相線型空間・位相テンソル空間その 1

前期までで十分とは言えないが、帰納極限と射影極限まで一通り位相線形空間の概略を論じました。今期は位相テンソル積を論するための準備である。解析的にはこの問題の起源は自然で、変数分離型の関数たちの有限和（関数のテンソル積）の極限という形で、例えば Fourier の線形偏微分方程式の解法の中に現れたのである。

普遍性を用いた代数的なテンソル積の定義はおそらく皆さん離れていないと思うのでこの部分から丁寧にやります。

（1） ベクトル空間のテンソル積（代数的理論）
（2） 関数空間のテンソル積
（3） 双線形形式の空間

◆ I.S　代数関数論

春学期は附値体の復習と体の拡大の一般論に大きく時間を取られて漸く今期は因子の理論に入る。一応岩沢の代数関数論５７ｐから７９ｐを予定している、余力があればイデールと微分の入口にはゆきたい。秋学期は微分と、イデールから Riemann-Roch の定理までの予定である。

（1）代数関数体の素因子

（２）代数関数体の因子

◆ M.C　Vector Bundles

春学期に取り上げた内容は、基礎空間が一般的な位相空間であった、以後は十分に連続関数が豊富に含まれた世界コンパクトハウスドルフ空間であると仮定する。従って様々な空間への変形が問題にできる わけである。

（１）バンドル上のプロジェクショ ンと計量

（２）コンパクト空間上のバンドル

（３）バンドル

[料金]

先にお知らせしたように数学工房は創設以来同一の講座料金、会費でなんとかギリギリでやってまいりましたが、今回の消費税値上げの影響で、教室の賃料をはじめとする諸経費が大幅に増えて、今後の維持が困難になっています。そのような事情で恐縮ですが夏期講座から若干の値上げをお願いすることになりました。ご協力のほどお願いいたします。

通常講座

一括払い ￥32,000（学割￥25,000）

各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）

４回のセミナー　１回目￥10,000（学割￥9,000）

２回目以降￥8,000（学割￥6,000）

６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）　２回目以降￥5,500（学割￥4,000）

会員からのメッセージ

今回は名古屋の塾で高校生に数学を教える傍ら、自主セミナーを開催してご自身も数学を勉強している吉本響さんに寄稿していただきました。

■名古屋で自主セミナー開催（吉本　響）

１．数学工房との出会い

私が数学工房の前身である「数学落ちこぼれセミナー」に初めて参加したのは 1993 年３月でした。私は 33 歳になり、愛知県立高校で数学教師生活 11 年目に入ろうとしていました。数学は面白いとは思っていましたが、大学では物理を専攻していてそれまで数学を系統的に勉強したことがあまりなく、「数学は物理のための計算の道具」という意識がどこかにありました。高校の教員として、授業の工夫や入試問題の研究などについては、同僚と議論することはありましたが、数学について深い話をすることはほとんどありませんでした。

『数学落ちこぼれ通信』という機関誌のことを知り、「数学で苦しんでいる生徒のためになるかも」と思い、取り寄せてみて驚きました。「落ちこぼれ」といっても、「大学の数学科で位相で落ちこぼれた」というような話だったのです。そして、そのころの私は位相の位の字も知りませんでした。

なんだか妙な集団だなぁと思いましたが、原則的に、妙な事には近寄って行くタイプだったので、伊豆高原で行われるという春合宿セミナーに参加し、東京でのセミナーに何回か参加しました。

休日に数学の勉強に集まってくる人々と、その場を提供する人々の存在に衝撃を受けました。さらに聞いてみると、仕事上数学を必要としているわけではない参加者も大勢いるということで衝撃はますます深まったのでした。

数学を面白いと思っていたはずの自分がなぜもっとそれを追求しないのか？数学を教える立場にいる自分がなぜもっと勉強しないのか？という気持ちだったと思います。

名古屋には社会人に数学を教えてくれる場や組織もなく、また、そのまま仕事を続けるならばなかなか勉強の時間も取れないことはわかっていたので、次の春には思い切って教員を辞め、塾や予備校の非常勤講師をしながら大学の数学科の３年生のコースの聴講生として２回目の学生生活を始めました。(位相が何のことかも理解できるようになりました。）これは本当に、私のわがままを許してくれた家族のおかげと感謝しています。

大学院にも進学しましたが、塾講師も何年もやっていると非常勤ではあっても任される仕事が増えてきて、数学をするための時間も次第に確保できなくなり休学し、その後残念ながら中途退学することになりました。しかし、この５年あまりの間に数学に取り組めたことは、現在の塾で高校生を教える上で大きな力になりました。この経験なしに今の自分はあり得ないと思っています。

２．自主セミナーのこと

愛知県でも何かセミナーをと思い、桑野先生をお招きして泊りがけのセミナーを何回か持ったりするうちに、自主セミナーをやろうという話が参加者の間で持ち上がり、まずは線形代数から始めて、月１回弱のペースで現在まで 20 年近く続いています。今までに読んだ本は、渡辺豊「線型代数学」(培風館)、E. ハイラー/G. ワラー「解析教程 (下)」シュプリンガー・フェアラーク東京、野口潤次郎「複素解析概論」(裳華房) の第４章まで、です。今は、松本幸夫「多様体の基礎」(東京大学出版会) を読んでいます。20 年近くかけて３冊程度なのでかなりスローペースですが、どんなことでも互いに質問でき、どんな小さな疑問も大切にする雰囲気は大切にしています。１人で本を読んだりしていては、分かった気になってしまうことが多く、このセミナーをやるたびに思いがけぬ発見があります。愛知県近辺の方で興味をお持ちの方は是非ご参加下さい。(aujour44@yahoo.co.jp 吉本 までご連絡下さい。)

3．私にとっての数学工房

普段なかなか東京でのセミナーには参加できない自分にとって数学工房とは、遠くから差し込む光のような存在です。その存在があるだけで、そこに集う人々がいるというだけで、励まされ、数学をしっかりやろうという気持ちになります。
桑野先生をはじめ、スタッフの皆さん、参加者の皆さんのこれからのご活躍を名古屋から祈っています。


写真１：吉本　響さん

入門桑野道場（第 25 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

z_1, z_2, z_3 を複素数平面上の相異なる 3 点とする．
$|z_1| = |z_2| = |z_3|$ が成り立っているとき次の条件は同値である．

1. z_1, z_2, z_3 は正三角形の頂点である．
2. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ が成立する．
3. 複素数 c が存在して，z_1, z_2, z_3 は方程式 $Z^3 - c = 0$ の解である．

解答

1. $\Rightarrow$ 2.
z_1, z_2, z_3 は正三角形の頂点であるから $\omega := e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と置くと，必要なら番号を入れ換えて $z_2 = z_1\omega, z_3 = z_1\omega^2$ と書ける．$1+\omega+\omega^2 = 0$ に注意して，$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + z_1\omega + z_1\omega^2 = z_1(1+\omega+\omega^2) = 0$.
2. $\Rightarrow$ 3.
$\gamma := |z_1| = |z_2| = |z_3| (>0)$ と置く．$\gamma^2 = |z_j|^2 = z_j\overline{z_j}$ より $\overline{z_j} = \gamma^2/z_j \,(j = 1, 2, 3)$.
したがって $0 = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \gamma^2/z_1 + \gamma^2/z_2 + \gamma^2/z_3 = \gamma^2(1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3) = \dfrac{\gamma^2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)}{z_1z_2z_3}$．$\gamma \neq 0$ より $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$.
したがって $f(Z) := (Z - z_1)(Z - z_2)(Z - z_3)$ と置くと，$f(Z) = Z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)Z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)Z - z_1z_2z_3 = Z^3 - z_1z_2z_3$．よって z_1, z_2, z_3 は 3 次方程式 $f(Z) = Z^3 - z_1z_2z_3 = 0$ の解．
3. $\Rightarrow$ 1.
$\gamma := |z_1| = |z_2| = |z_3| (>0)$ と置く．仮定から $\gamma^3 = |c| (>0)$．よって $\gamma = |c|^{1/3}$．また実数 θ_j, φ が存在して $z_j = \gamma e^{i\theta_j}, c = \gamma^3 e^{i\varphi}$ と書ける $(j = 1, 2, 3)$.
したがって $e^{3i\theta_j} = e^{i\varphi} \,(j = 1, 2, 3)$．よって 整数 m が存在して $3\theta_j = \varphi + 2m\pi \,(j = 1, 2, 3)$．すなわち $\theta_j = \varphi/3 + 2m\pi/3 \,(j = 1, 2, 3)$．$z_1, z_2, z_3$ は相異なるから，$m = 0, 1, 2$ ととればよい．必要なら番号を入れ換えて $z_2 = z_1e^{2\pi i/3}, z_3 = z_2e^{2\pi i/3}$．よって z_1, z_2, z_3 は正三角形の頂点である．

解説

前回は久しぶりの複素数の問題でした。14 年 1 月のセミナーでも取り上げられた問題です。$|z_1| = |z_2| = |z_3|$ が成り立っているので z_1, z_2, z_3 は正三角形の頂点であることと、原点を中心に $2\pi/3$ ずつ回転したときに各頂点が重なりあうことが同値です（原点が正三角形の重心です）。ですから原点を中心に $2\pi/3$ 回転する複素数を用いて処理をすればいいのです．自分としては「2. $\Rightarrow$ 3.」に少し苦労しました．

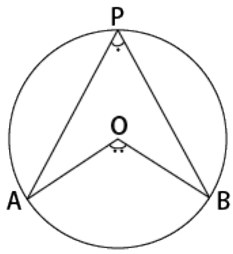
今回の問題

1. 複素数平面上の円 C の中心を O とする．円周上の相異なる任意の点 A, B をとり固定する．このとき任意の円周上の点 P(A, B とは異なる) に対して

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

が成立することを示せ．ただし，$\angle AOB$ とは点 P が乗っていない円弧を持つ扇形の角とする．

2. 上のことより次が直ちに従う．「円周上の同じ円弧に立つ円周角は全て等しい」
この命題を上の命題を用いずに示せ．（メビウス変換を使うとすぐにできるそうですが，使わない証明も考えてください）



問題について一言

前回に引き続き複素数の問題です。14 年 1 月の集中セミナーでのおみやげ問題になっていました。また IC セミナーでも取り上げたそうです。ふるって解答お願いします。

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2014 年 6 月 30 日 (月)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2014 年 5 月 17 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401