数学工房 会報

2014年8月
No. 115

巻 頭 言

先日、穂高に住む父母を見舞った帰途、松本へ寄りました。市中散策の途中で、一休みしようと思ったら、丁度美術館の前にでたので、休憩を兼ねて立ち寄りました。普段だと関心がないので、書などは決して鑑賞することはないのですが、展示室の前に「書は一生の稽古なり」とあったので、この言葉にひかれて入ってしまいました。入ってびっくり、そこに展示された書は古代文字を今の作品としてよみがえらしたもので、古代人の宇宙や思想が字のかたちの間から、湧き出して私に迫ってくるではありませんか！この書家は字に秘められた古代の世界を深く感じ取るために一生稽古したのですね。このごろは、どこかまともでないと感じる出来事が多いので、このような未知の創造的な世界との出会いは貴重に感じられます。

ところで、私たちの数学ですが！さらにこの古代以来の象形文字の機能を技術的に極限まで進化させたもので、記号の配列が、式が様々に動き、私たちに語りかけ、一緒に宇宙の音楽を奏でてくれるのです。恐らく数学が好きな方ならそういう実感を持たれたことがあるでしょう。数学というのは、数学が好きで、その対象に対して深い関心が持続できれば、ご自身の手で理論を一歩一歩再構成することにより必ず自分の言葉で分かってくるものなのです。たくさんの概念や記号が律動して、世界を作っていることが感じられるようになります。私が駒込の小さな教室で一番伝えたいのはこのことです。無論、楽ではありませんが！これからも数学との幸福な共生を目指して数学工房は基礎的な技量を丁寧に磨く稽古と稽古の場を提供していきます。

2014 年 8 月半ば　数学工房　桑野耕一

秋学期講座案内　2014年 9月～12月

2014 年 9 月 20 日より数学工房の秋学期が以下の要領で開講されます。

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	解析教程 II	9 月 21 日 (日)	入門
IB	多変数複素関数論	9 月 20 日 (土)	中・上級入門
IC	Modules(加群)	9 月 21 日 (日)	入門
ID	初等線型代数と多次元空間の微積分 II	9 月 28 日 (日)	入門
IE	位相テンソル空間 II	11 月 8 日 (土)	中・上級入門
IF	数学の基本語彙と文法	9 月 27 日 (土)	入門
IS	代数関数論	11 月 23 日 (日)	中・上級入門
G	抽象線型代数 II	9 月 27 日 (土)	初級
EA	距離空間と解析学序説 II	9 月 28 日 (日)	初級
MB	ベクターバンドル	11 月 1 日 (土)	中級

◆ IA 解析教程 II
解析教程はいよいよ佳境に入ります。前回は級数の基本的なクラスとその性質までを取り上げました。今回は連続性から始めて、微積分の基本的な道具である微分積分を扱います。

(1) 連続性
1-1) 連続性、基本概念
1-2) 連続関数のクラス
1-3) 連続関数に関する 3 つの大域的定理
1-4) 関数の極限
(2) 微分可能性
2-1）微分可能性と基本的な性質
2-2）可微分関数のクラス（C_1 級、局所定数関数)
2-3）高階微分、C_k 級関数のクラス
(3)Riemann 積分、微積分の基本定理
3-1) 有界関数の積分
3-2) 微積分の基本定理
(日曜・隔週 6 回 11:00-13:00)

◆ IB 多変数複素関数論　擬凸性
今回のテーマは、正則関数の存在域の幾何学的特徴付けである擬凸性です。そのためにまず Schwartz 超関数と軟化子を初等的に扱うつもりです。この有用な 20 世紀解析学の標準装備のみに興味のある方は前半のみ出られるとよいでしょう。

(1) Schwartz 超関数
(2) Friedrichs 軟化子と各種関数のクラスの近似定理
(3) 擬凸領域
(土曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ IC Modules (加群)
Atiyah Commutative Algebra の第 2 章前半に沿っての概説です。次学期は加群のテンソル積が中心です。

(1) 加群と加群の準同型
(2) 部分加群、商加群
(3) 部分加群の演算
(4) 直和、直積
(5) 有限生成加群
(日曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ ID 初等線型代数と多次元空間の微積分 II
今期は、多次元空間の有向基本図形の体積としての行列式から始まります。線型写像の行列式の性質を確立して、いよいよ領域の積分の準備のために連続写像とベクトル場を簡単に導入します。それから写像の微分、領域の積分と続きます。

(1) 体積形式と行列式、交代形式
(2) 線型変換と線型変換の行列式　Sgn 再論
(3) 連続写像、ベクトル場
(4) 領域上の積分
(5) 写像の微分と Jacobi 行列、積分の変数変換
(6) いくつかの基礎積分
(日曜・隔週 6 回 11:00-13:00)

◆ IE 位相テンソル空間 II
今期は位相テンソル積の空間の 2 つの基本的な位相を詳しく取り扱います。

(1) 位相テンソル空間の ϵ 位相
(2) 位相テンソル空間の π 位相
(3) 位相テンソル空間の完備化
(4) ノルム空間の場合の ϵ 位相、π 位相
(土曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ IF 数学の基本語彙と文法
どのような分野にせよ現代数学をやるつもりなら必ず始めに学ぶべき最小限の素養です。

(1) Σ とは何か？改めて問う
(2) 集合の台数
(3) 写像
(4) トピックス
(土曜・変則全 6 回 11:00-13:00)

◆ IS 代数関数論
Riemann 面で決定する代数関数達の可能な値分布、とりわけ極と零点の構造を代数関数体の上の自然な構造として捕まえます。漸く Riemann-Roch の定理に達する。

(1) 因子空間の構造
(2) イデールと微分、Riemann-Roch の定理
(3) Hasse 微分
(日曜・毎週 3 回 14:00-18:00)

◆ G 抽象線型代数 II
夏学期は線型代数が展開される場である線型空間の構造を学びました。秋学期は線型空間の間の情報の伝播の仕方を探求します。更に伝達機構である線型写像の集団そのものがベクトルとして振舞う、すなわち線型空間であることを認識し、また双対の内在的重要さを認識しましょう。ここまでくると、あるものを点と見るか関数と見るか（現代数学の認識の特徴！）は、考える人の立場にかかわることが分かってくるでしょう。

一般の線型写像と行列との関係も詳細に構造的に論じることにします。最後に線型変換の表現の核になる射影の定義と基本的な性質を導きます。

(1) 線型写像の定義と基本的な性質
(2) 線型写像の空間と応用
(3) 線型形式と双対空間、アジョイント
(4) 行列表現
(5) 線型変換
(6) 射影のクラス
(土曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ EA 距離空間と解析学序説 II
連結性とコンパクト性を中心に、諸分野への距離空間あるいは一般位相の応用において最も重要な概念、及び方法を丁寧に扱います。

(1) 連結
1-1) 局所定数関数と連結性
1-2) 連結性の基本的性質
1-3) 連結と弧状連結、Euclid 空間の領域
(2) コンパクト
2-1) Heine-Borel の性質と有限交差条件
2-2) コンパクト集合の基本的性質
2-3) コンパクト集合上の連続関数
補充　全有界、プレコンパクト
(日曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

◆ MB ベクターバンドル
空間の位相的変形と不変性、バンドルの分類のまとめです。

(1) パラコンパクト空間上のバンドルの変形と分類
(2) G-構造
(土曜・隔週 3 回 14:00-18:00)

講座料について

各講座とも、一括前納の場合は税込￥32,000(学生￥25,000) です。各回払いの場合、
◆ 3 回のセミナーは、1 回目￥12,000（学割￥9,000)、2 回目￥12,000（学割￥9,000)、3 回目￥10,000（学割￥9,000)。
◆ 4 回のセミナーは、1 回目￥10,000（学割￥9,000）2 回目以降￥8,000/回（学割￥6,000)。
◆ 6 回のセミナーは、1 回目￥6,500（学割￥6,000）2 回目以降￥5,500/回（学割 ￥4,000/回)。

講座の途中参加についてはお問い合わせ下さい。

会員からのメッセージ

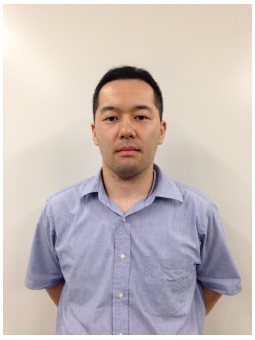
2014 年 1 月より講座に参加している石神誠一と申します。大学の所属は建築学科で、専攻は耐震構造、つまり「地震に耐えられる建築構造」についての研究に携わっていました。修士課程修了後、現在の会社に就職し、そこでは土木・建築の構造設計を主な業務としています。

さて、土木や建築の構造設計は、その理論的背景として、力学をはじめとした様々な数学・物理学が基礎となっています。構造力学や耐震構造にはまだ未解明な現象も数ありますが、古くからかなりの研究成果が蓄積されており、設計法も相当の完成度で確立されています。そのため設計者は、その背景となった数学・物理学をあまり意識することなく、与えられた数式およびコンピュータによる構造解析を用いることで建物・構造物を設計することが可能となっています。

こう考えると、極端に言えば、設計者にとって土木・建築の構造設計には高度な数学は必要ないという主張も成り立つようにも思えます。しかし、本当にそうと言えるのでしょうか。例えば構造解析で頻繁に用いられる計算法として、ＦＥＭ（有限要素法）解析というものがあります。これは任意の形状の構造物に対し、任意の外力が作用した際どのような応力が発生するかを近似的に計算できるという大変便利な手法です。これには理論的背景としてベクトル解析・テンソル解析等が使われていますが、設計者はその理論を理解することなく、言わばブラックボックスとしてソフトウェアを利用することで構造解析が可能となっています。私はこれに一種の気持ち悪さを感じ、どうしても背景となる理論を理解したいと思うようになりました。ＦＥＭの理論を扱った教科書は数多く存在しますが、その理論となるベクトル解析を深く理解するには、まずその基礎となる微積分・線型代数を理解する必要があるだろうと感じました。こうして独学で数学をやり直すことにしました。

なお構造設計で基礎理論となっている数学はベクトル解析には限りません。例えばフーリエ解析。これは地震波の性質を分析するための基礎理論です。別の例を挙げると、地震とは不確実性の伴う事象のため、確率論とも関係が深いです。しかし、どちらも設計者はその理論を深く理解する必要なく設計が可能となっています。

数学工房のことを知るきっかけは、月刊誌「数学セミナー」でした。独学では理解度や到達度が把握できないので、いっそ私塾に通って本格的な数学に触れたいと思い、数学工房に入会しました。以上が私の入会の動機です。数学工房で数学を学ぶ皆様もまた、学ぶ動機は人により様々とは思います。動機は違えど、共に切磋琢磨していくことができればと思います。本格的な数学に触れて日の浅い未熟者ではありますが、今後ともよろしくお願い致します。



石神誠一さん

入門　桑野道場　（第26回）

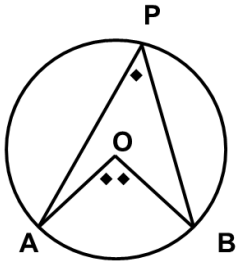
記　桑野道場師範代　半田生久太

前回の問題

1. 複素数平面上の円 C の中心を O とする．円周上の相異なる任意の点 A, B をとり固定する．このとき任意の円周上の点 $P(A, B$ とは異なる$)$ に対して

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

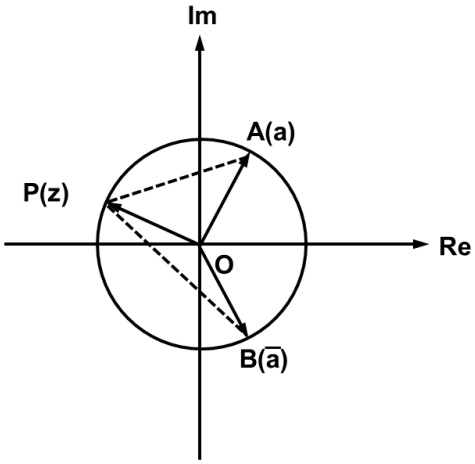
が成立することを示せ．ただし，$\angle AOB$ とは点 P が乗っていない円弧を持つ扇形の角とする．



2. 上のことより次が直ちに従う．「円周上の同じ円弧に立つ円周角は全て等しい」
この命題を上の命題を用いずに示せ．（メビウス変換を使うとすぐにできるそうですが，使わない証明も考えてください）

解答

1. 円 C の中心を複素数平面上の原点 0 とし，半径を 1 としても一般性を失わない．円 C 上の点 A に対応する複素数を a とし $\mathrm{Im}\, a > 0$ とする．対称性から円 C 上の点 B に対応する複素数を $\bar{a}$ としてもよい．さらに円 C 上の点 P に対応する複素数を z とし，$\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}\, a$ かつ $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ としてもよい．実数 α, θ が存在して $a = e^{i\alpha}, \bar{a} = e^{-i\alpha}, z = e^{i\theta}$ と書ける．ただし $0 < \alpha < \theta \leq \pi$．このとき中心角 $\angle AOB (= \angle a0\bar{a}) = 2\alpha$．よって $\angle APB = \alpha$，即ち複素数 $(a - z)/(\bar{a} - z)$ の偏角が α になることを言えばよい．



$$\frac{a-z}{\bar{a}-z}=\frac{e^{i\alpha}-e^{i\theta}}{e^{-i\alpha}-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\alpha}\left(1-e^{i(\theta-\alpha)}\right)}{e^{-i\alpha}\left(1-e^{i(\theta+\alpha)}\right)}$$
$$=\frac{e^{2i\alpha}\left(1-e^{i(\theta-\alpha)}\right)}{1-e^{i(\theta+\alpha)}}=\frac{e^{2i\alpha}e^{i(\theta-\alpha)/2}\left(e^{-i(\theta-\alpha)/2}-e^{i(\theta-\alpha)/2}\right)}{e^{i(\theta+\alpha)/2}\left(e^{-i(\theta+\alpha)/2}-e^{i(\theta+\alpha)/2}\right)}$$
$$=\frac{e^{i\alpha}\left(e^{i(\theta-\alpha)/2}-e^{-i(\theta-\alpha)/2}\right)}{e^{i(\theta+\alpha)/2}-e^{-i(\theta+\alpha)/2}}=\frac{e^{i\alpha}\cdot 2i\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{2i\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}=e^{i\alpha}\frac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}$$

ここで $0<\alpha<\theta\leq\pi$ より，$0<\frac{\theta-\alpha}{2}<\pi$ かつ $0<\frac{\theta+\alpha}{2}<\pi$．したがって $\gamma:=\dfrac{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}$ と置くと $\gamma>0$．よって $(a-z)/(\bar{a}-z)=\gamma e^{i\alpha}$ は複素数 $(a-z)/(\bar{a}-z)$ の極表示．したがって $(a-z)/(\bar{a}-z)$ の偏角は α である．

桑野先生による別解

$|a|=|z|=1$ であるから $\bar{a}=1/a\,,\bar{z}=1/z$ であることに注意して $\left|\dfrac{\bar{a}-z}{a-z}\right|^2\left(\dfrac{a-z}{\bar{a}-z}\right)^2=a^2$ であることがわかる．これは $(a-z)/(\bar{a}-z)$ が a と同じ偏角であることを示している．即ち，$(a-z)/(\bar{a}-z)$ の偏角は α である．

2. 前問と同じ設定で $\angle APB=\alpha$（P によらず一定）であるのでわかる．

解説

1. 円周上に 3 点をとり、対応する偏角を求めればできます．点 P が乗っていない円弧を持つ扇形の角を表現するために、点 A,B の位置を少し工夫しました．
   桑野先生の別解はオイラーの公式を使わないでもっとスマートに解かれています．この方法は思いつきませんでした．
2. あとから気が付いたのですが，前問を使わずにと言っても前問とほとんど変わらないです．偏角の解釈のしかただけでした．すみません．
   またメビウス変換についてはよく知りませんので、申し訳ありませんがメビウス変換を使った解答はありません．

今回の問題

$X := \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \,|\, \mathrm{supp}(a) \subset [m, \infty)$ となる整数 m が存在する $\}$ とおく．ただし，$\mathrm{supp}(a) := \{n \in \mathbb{Z} \,|\, a(n) \neq 0\}$．また 0_X は $0_X(n) := 0 (n \in \mathbb{Z})$ で定義すると $\mathrm{supp}(0_X) = \emptyset$ であるから $0_X \in X$ と理解する．ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す．

$a, b \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ として，X に加法，スカラー倍，乗法を以下のように定義する．

加法：$(a+b)(n) := a(n) + b(n) \, (n \in \mathbb{Z})$.
スカラー倍：$(\lambda a)(n) := \lambda \, a(n) \, (n \in \mathbb{Z})$.
乗法：$(a*b)(n) := \displaystyle\sum_{\nu+\mu=n} a(\nu)b(\mu) \, (n \in \mathbb{Z})$．$X$ の定義から右辺は有限和であることに注意．

1. 任意の $a, b \in X$ と任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について $a+b, \lambda a, a*b \in X$ であることを示せ．
2. $1_X \in X$ を $1_X(0) = 1$ かつ $1_X(n) = 0 (n \neq 0)$ で定義すると 1_X は乗法単位．即ち，任意の $a \in X$ に対して $1_X * a = a * 1_X = 1_X$ が成立することはすぐわかる．
このとき 0_X でない任意の $a \in X$ に対して $a * b = b * a = 1_X$ となる $b \in X$ が存在することを示せ．

問題について一言

IS（代数函数論）で扱われた問題です．皆様の解答をお待ちしています．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2014 年 11 月 30 日 (日)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2014 年 8 月 28 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203