Math.
No. 116
www.sugakukobo.com

会報 2015 年 1 月

数学工房

2015 年 新 年 巻 頭 言

会員の皆さん、明けましておめでとうございます。今年も、数学と親しく付き合うための骨を身につけていただくための工夫をしてまいります。

■数学工房の教程の根幹は数学の再構成である！

数学工房が提供する数学の教程は、世間でいうところの数学教育ではありません。数学の再構成を可能にするための準備としての稽古です。通常、ある分野の数学を自分のものにするために、先人の優れた仕事を土台に自分の言葉で改めて作り直すことを、理論の再構成といいます。数学の世界では、この過程での発見、副産物が次の良い理論を生むことがしばしばあります。

数学工房の主に入門、初級で行う型稽古は数学の再構成ができるようになるための入口です。

基本語彙と文法や微積分の段階ですでに数学の再構成と数学言語の特質を学ぶ作業が始まります。抽象線型代数と抽象位相までで数学の基本的な語法がひとまず一段落してそこで様々なトピックスを通じて個別の数学の世界を歩く演習をするとともに基本教程で学んだ様々な技術を具体的な局面で使い深めていきます。

■入門初級の型稽古を理解し理論の再構成を学ぶ、そのためのアドバンクとコースです。技術の展開、知識の血肉化を目指すアドヴァンストコースは、再構成の実際を体験することが目的です。比較的知識水準の高いものまで用意しています。去年の講座では、代数関数論は Riemann-Roch まで位相線型空間は核型函数まで到達しました。（今年の春学期で多少の発展編をやります。）目的はあくまでも基礎講座で学んだ数学的素養をいかし理論をどうやって再構成するかの手ほどきです。ある分野の客観的な知識をパノラマ的に集め、現状と展望を与えるのが目的ではありません。そのようなことが知りたければ、研究集会や、シンポジウムの学術総合報告を読んでください。私が、皆さんに提供している数学トレッキングは、ちゃんと歩く手ほどきです。問題は自分で歩けるか、自分でちゃんと判断できるかなのです。自分の中に自分の数学の樹を育てることなのです。

■世界の先行が不透明になって、いよいよ怪しげな呪文がこの世を支配するようになってきた気がします。もとより日本でも乱暴で反知性的な呪文や掛け声が横柄に跋扈しています。私たちはそのようなものに惑わされず、それぞれの立ち位置で、数学とともに自律的で豊かな人生を作りましょう。それでは、今年もよろしくお願いします。

2015 年 1 月 数学工房　桑野耕一

春 学 期 講 座 案 内

2015 年 1 月〜4 月

2015 年春学期講座は、入門 3 講座、初級 2 講座、初・中級 2 講座、中級 3 講座を開講します。

<< 春学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程 III	1 月 25 日	入門
I.D	初等線型代数と多次元空間の微積分 III	1 月 18 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	未定	入門
I.C	Modules（加群のテンソル積）	1 月 25 日	初・中級
E.A	距離空間と解析学序説 III	3 月 1 日	初級
G	抽象線型代数 III	1 月 18 日	初級
I.B	多変数関数論	3 月 21 日	初・中級
I.E	位相線型空間概論	1 月 17 日	中級
I.S	代数関数論	3 月 8 日	中級
M.B	Hilbert 空間の作用素	2 月 7 日	中級

<< 春学期講座詳細日程 >>

月	日	曜日	略号	時間
1	17	土	IE1	14:00 − 18:00
	18	日	ID1	11:00 − 13:00
	18	日	G1	14:00 − 18:00
	25	日	IA1	11:00 − 13:00
	25	日	IC1	14:00 − 18:00
	31	土	IE2	14:00 − 18:00
2	1	日	ID2	11:00 − 13:00
	1	日	G2	14:00 − 18:00
	7	土	MB1	14:00 − 18:00
	8	日	IA2	11:00 − 13:00
	8	日	IC2	14:00 − 18:00
	14	土	IE3	14:00 − 18:00
	15	日	ID3	11:00 − 13:00
	15	日	G3	14:00 − 18:00
	21	土	MB2	14:00 − 18:00
	22	日	IA3	11:00 − 13:00
	22	日	IC3	14:00 − 18:00
3	1	日	ID4	11:00 − 13:00
	1	日	EA1	14:00 − 18:00
	7	土	MB3	14:00 − 18:00
	8	日	IA4	11:00 − 13:00
	8	日	IS1	14:00 − 18:00
	15	日	ID5	11:00 − 13:00
	15	日	EA2	14:00 − 18:00
	21	土	IB1	14:00 − 18:00
	22	日	IA5	11:00 − 13:00
	22	日	IS2	14:00 − 18:00
	28	土	IB2	14:00 − 18:00
	29	日	ID6	11:00 − 13:00
	29	日	EA3	14:00 − 18:00
4	4	土	IB3	14:00 − 18:00
	5	日	IA6	11:00 − 13:00
	5	日	IS3	14:00 − 18:00

◆ I.A　解析教程 III

解析教程はいよいよ佳境に入ります。前回は連続性から始めて、Cauchy の微分の平均値定理まで、さらに補充として、多項式と多項式関数の関係、導関数と微分等の関係を一般的に扱いました。今回は、Riemann 積分から始まり、連続関数や可微分関数の級数の一般論を扱います。

（１）Riemann 積分、微積分の基本定理

　１）有界関数の積分

　２）微積分の基本定理

（２）関数列、関数項の級数（一般論）

　１）関数列・関数項の級数、点ごとの収束

　２）関数列・関数項の級数　一 様収束

（３）連続関数列、可微分関数列

◆ I.D　初等線型代数と多次元空間の微積分 III

（１）C^1 級関数のクラスとグラジエント

（２）C^2 級関数のクラスと Hesse 行列、Laplacian

（３）C^2 級 Taylor 公式と極値

（４）高階微分と C^k 級クラス

◆ I.F　数学の基本語彙と文法

どのような分野にせよ現代数学をやるつもりなら必ず始めに学ぶべき最小限の素養です。

（１）Σとは何か？改めて問う

（２）集合の代数

（３）写像

（４）トピックス

◆ I.C　Modules（加群のテンソル積）

Atiyah Commutative Algebra の第２章後半に沿っての概説です。加群のテンソル積が中心です。

（１）加群のテンソル積

（２）スカラーの制限と拡張

（３）テンソル積の完全列

（４）テンソル積の有向極限

◆ E.A　距離空間と解析学序説 III

Baire の Category 定理とその応用、関数空間における相対コンパクト、等連続性の役割などを予定しています。

（１）Baire の Category 定理

（２）関数解析への応用

（３）関数空間における相対コンパクト・等連続性

◆ G　抽象線型代数 III

内積空間の幾何と作用素のクラス

（１）内積空間の幾何学

（２）基本的な作用素のクラス

（３）対称変換とスペクトル

◆ I.B　多変数関数論

今回のテーマは、正則関数の存在域の幾何学的特徴付けである擬凸性です。

（１）準備

（２）擬凸領域

◆ I.E　位相線型空間概論

（１） 核型空間

◆ I.S　代数関数論

（１）Hasse 微分

（２）Riemann-Roch の応用

（３）特殊関数体

◆ M.B　Hilbert 空間の作用素

（１）スペクトル測度

（２）スペクトル積分
（３）有界自己共役作用素のスペクトル分解
（４）ユニタリ作用素のスペクトル分解

[料金]
通常講座
一括前納 ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
４回のセミナー　１回目￥10,000（学割￥9,000）
２回目以降￥8,000（学割￥6,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）　２回目以降￥5,500（学割￥4,000）

会員からのメッセージ

今回は 2013 年から数学工房の会員になられた矢田啓蔵さんに寄稿していただきました。

■「場の量子論」を理解したい！（矢田啓蔵さん）

2013 年 5 月から数学工房にお世話になっている矢田啓蔵と申します。しがない 32 歳のサラリーマンでございます。この度、私と数学との関わりについて執筆させて頂くことになりました。

■数学との関わり (1) 「学業として」

学生時代から数学・物理・化学がとても好きで、大学は「3 教科が全て学べそう」という理由で化学科に進学しました。しかし化学科の数学の授業では抽象的なことは殆ど扱われず、少々不満だったことを覚えています。授業内容は「多変数解析の初歩」「(3 次までの) 線形代数」「微分方程式」くらいでした。「群論」は「周期表の化学」という授業で点群を習ったのですが、その授業をした教授は群についてはよく理解していなかったようで、教える方も教わる方も皆頭に？マークを点灯させていました。大学 4 年からは物理化学研究室で有機金属クラスターの研究をしました。そこでは分光学や量子力学の知識が必要不可欠で、より深い数学を研究室メンバーと勉強しました。

また、大学院の選択授業では研究とはほぼ関係がない「場の量子論」を受講し、研究そっちのけでファインマンダイアグラムの計算をしていたら研究室メンバーから変わり者扱いされてしまいました。

■数学との関わり (2) 「クイズ知識として」

私は小さい時からクイズ番組 (特にウルトラクイズ) を見るのが好きで、大学ではクイズ研究会に所属しました。当時の大学のクイズでは TV で出題されるよりも遥かに難しくマニアックな問題が主流で、ジャンルを問わず様々な知識を蓄えました。数学や自然科学の問題も多く、「掛谷の問題」「ゴルドバッハ予想」などはクイズ界では実は基本レベルなのです。数学に関する賞も色々あるため、その名前だけでなく受賞者などを覚えたりもしました。今ではクイズはほとんどやらなくなってしまいましたが、実はこの時の知識が数学工房の授業における「数学の歴史」の話を聞く上で非常に役に立っています。

■数学との関わり (3) 「業務として」

修士を習得した私は 2007 年 4 月より半導体 (LSI) 設計の仕事に就きました。専攻とは畑違いの分野だったため、必要な知識は全て新入社員研修で学びました。必要な数学としては、アナログ設計では普通の電流・電圧・ノイズ計算だけでなく「フーリエ変換」や「ラプラス変換」なども使います。デジタル設計では「ブール代数」や「Z 変換」などが欠かせません。実はそれだけでなく、量産品の良品収率を出すための「統計」の知識も要します。実際の設計では、まず手で計算してトランジスタや抵抗の大きさを決めてから、シミュレーションで最終チェックといった感覚です。回路設計者と聞くと数学好きの人が多いと思われるかもしれませんが、意外と苦手な人の方が多い印象です。そのため、数学好きは職場ではとても重宝されています。

■数学との関わり (4) 「趣味として」

社会人になってからは電子回路の勉強で一杯一杯でしたが、6 年も経つと仕事にも余裕が出てきました。そこで大学院の授業でかじった「場の量子論」を引き続き独学で勉強するようになりました。完全に趣味としての勉強は何の制約も無いので非常に気楽なものです。しかし「超弦理論」や「M 理論」まで進んでくると数学的にもかなり難しくなり、参考書も数学的に厳密に書かれたものは独学では歯が立たなくなってきました。そこで数学を基礎から勉強してみたいと思い立ったのが数学工房に入ったきっかけです。

■最後に

30 歳を過ぎてから数学を基礎からやり始め、数学の奥深さを改めて実感しています。最近では物理学のためという側面だけでなく、抽象数学そのものも面白く感じてきました。まだまだ道のりは長いですが、焦らずじっくり理解しながら精進したいと思います。なんだかよくわからない文章になってしまい、申し訳ございませんでした。今後ともよろしくお願い致します。

写真１：矢田　啓蔵さん

入門桑野道場（第 27 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

$X := \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \,|\, \mathrm{supp}(a) \subset [m, \infty)$ となる整数 m が存在する $\}$ とおく．ただし，$\mathrm{supp}(a) := \{n \in \mathbb{Z} \,|\, a(n) \neq 0\}$．また 0_X は $0_X(n) := 0 (n \in \mathbb{Z})$ で定義すると $\mathrm{supp}(0_X) = \emptyset$ であるから $0_X \in X$ と理解する．ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体，$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す．

$a, b \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ として，X に加法，スカラー倍，乗法を以下のように定義する．

加法：$(a+b)(n) := a(n) + b(n)\ (n \in \mathbb{Z})$.
スカラー倍：$(\lambda a)(n) := \lambda\, a(n)\ (n \in \mathbb{Z})$.
乗法：$(a * b)(n) := \displaystyle\sum_{\nu+\mu=n} a(\nu)b(\mu)\ (n \in \mathbb{Z})$．$X$ の定義から右辺は有限和であることに注意.

1. 任意の $a, b \in X$ と任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について $a+b, \lambda a, a * b \in X$ であることを示せ.
2. $1_X \in X$ を $1_X(0) = 1$ かつ $1_X(n) = 0 (n \neq 0)$ で定義すると 1_X は乗法単位．即ち，任意の $a \in X$ に対して $1_X * a = a * 1_X = 1_X$ が成立することはすぐわかる．
このとき 0_X でない任意の $a \in X$ に対して $a * b = b * a = 1_X$ となる $b \in X$ が存在することを示せ.

解答

1. $a \in X$ に対して $\mathrm{Z}(a) := (\mathrm{supp}(a))^C = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, a(n) = 0\}$ とする．
（a）任意の $a, b \in X$ に対して $a + b \in X$ を示す．
$\mathrm{supp}(a+b) \subset \mathrm{supp}(a) \cup \mathrm{supp}(b)$ が成立する．
実際，補集合の包含関係 $\mathrm{Z}(a) \cap \mathrm{Z}(b) \subset \mathrm{Z}(a+b)$ を言えばよい．$n \in \mathrm{Z}(a) \cap \mathrm{Z}(b)$ ならば $a(n) = b(n) = 0$．したがって $(a+b)(n) = a(n) + b(n) = 0$．よって $n \in \mathrm{Z}(a+b)$ すなわち $\mathrm{Z}(a) \cap \mathrm{Z}(b) \subset \mathrm{Z}(a+b)$.
$a, b \in X$ より $\mathrm{supp}(a) \subset [m_a, \infty)$ かつ $\mathrm{supp}(b) \subset [m_b, \infty)$ となる整数 m_a, m_b が存在する．$m := \min\{m_a, m_b\}$ とおくと，supp の性質から $\mathrm{supp}(a+b) \subset \mathrm{supp}(a) \cup \mathrm{supp}(b) \subset [m_a, \infty) \cup [m_b, \infty) \subset [m, \infty)$．したがって $a + b \in X$.
（b）任意の $a \in X$ と任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\lambda a \in X$ であることは $\mathrm{supp}(\lambda a) \subset \mathrm{supp}(a)$ が容易にわかるので上と同様にしてできる．
（c）任意の $a, b \in X$ に対して $a * b \in X$ を示す．
$a = 0_X$ または $b = 0_X$ のとき $a * b = 0_X \in X$ は明らか.
$a \neq 0_X$ かつ $b \neq 0_X$ のとき
$m_a := \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, a(n) \neq 0\}$, $m_b := \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, b(n) \neq 0\}$ とおく．（X の性質よりこのような整数 m_a, m_b は必ず存在する）
$m := m_a + m_b$ とおいて $m = \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, (a*b)(n) \neq 0\}$ を示す.
$(a*b)(m) = (a*b)(m_a + m_b) = \displaystyle\sum_{\nu+\mu=m} a(\nu)b(\mu) = a(m_a)b(m_b) + \sum_{\nu+\mu=m, \nu<m_a} a(\nu)b(\mu) + \sum_{\nu+\mu=m, \mu<m_b} a(\nu)b(\mu) = a(m_a)b(m_b) \neq 0.$
同様に考えて $n < m$ ならば $(a*b)(n) = 0$.
よって $m = m_a + m_b = \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, (a*b)(n) \neq 0\}$ がわかった．
したがって $\mathrm{supp}(a*b) \subset [m, \infty)$．すなわち $a * b \in X$.
2. 0_X でない任意の $a \in X$ をとる．$m := \min\{n \in \mathbb{Z} | a(n) \neq 0\}$ とおく．$b(n) = 0 (n < -m)$ を満たす $b \in X$ を考える．b が求めるものだとして満たすべき条件を考える．
a, b の条件より $n < 0$ ならば $(a*b)(n) = \displaystyle\sum_{\nu+\mu=n} a(\nu)b(\mu) = 0$ は成立している．
$(a*b)(0) = a(m)b(-m) = 1.$
$(a*b)(1) = a(m+1)b(-m) + a(m)b(-m+1) = 0.$
$(a*b)(2) = a(m+2)b(-m) + a(m+1)b(-m+1) + a(m)b(-m+2) = 0.$
$\vdots$

$(a*b)(k) = a(m+k)b(-m) + a(m+k-1)b(-m+1)\cdots + a(m)b(-m+k) = 0.$
が任意の 0 以上の整数 k について成立しなければならない．
また逆に任意の 0 以上の整数 k についてこれらの性質を持つ $b \in X$ が存在すれば b が求めるものであることはすぐわかる．
上の式を $b(-m)\,, b(-m+1)\,, \ldots\,, b(-m+k)$ を未知数として連立方程式 (行列）の形に書けば

$$\begin{pmatrix} a(m) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a(m+1) & a(m) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a(m+2) & a(m+1) & a(m) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \\ a(m+k) & a(m+k-1) & a(m+k-2) & a(m+k-3) & \ldots & a(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(-m) \\ b(-m+1) \\ b(-m+2) \\ \vdots \\ b(-m+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立方程式が任意の 0 以上の整数 k について解をもてばよい．ところが左辺の係数行列の行列式は $a(m)^{k+1} \neq 0$ だから常にただ一つの解をもつ．
以上のことから $b \in X$ が存在して $a*b = 1_X$ が成立する．$b*a = 1_X$ も同様．

解説

IS(代数函数論）で取扱われた問題です。
X の乗法 $*$ は不自然な感じがしますが，少し説明します．
T を文字（不定元）として，以下のことを考えます．

$$\mathbb{C}\langle\langle T\rangle\rangle := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)T^n \,|\, a(n) \in \mathbb{C}, \text{ある整数 } m \text{ が存在して} \nu \leq m \Rightarrow a(\nu) = 0 \right\}$$

とおく．
$\widehat{a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)T^n\,, \widehat{b} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)T^n \in \mathbb{C}\langle\langle T\rangle\rangle, \lambda \in \mathbb{C}$ として，加法，スカラー倍，乗法を以下のように定義する．

加法：$\widehat{a} + \widehat{b} := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(a(n) + b(n))T^n.$
スカラー倍：$\lambda\widehat{a} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda a(n)T^n.$
乗法：$\widehat{a} * \widehat{b} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu+\mu=n} a(\nu)b(\mu)T^n.$

このようにすると $\mathbb{C}\langle\langle T\rangle\rangle$ は体（加減乗除が自由にできる）になり，X と $\mathbb{C}\langle\langle T\rangle\rangle$ は体同型になります．$\mathbb{C}\langle\langle T\rangle\rangle$ は多項式（有理関数）の親玉みたいなものですから、乗法 $*$ は自然なものです．X の一見不自然そうな乗法 $*$ はこのような意味なのです．$\mathbb{C}\langle\langle T\rangle\rangle$ は文字 T，$\mathbb{C}$ 係数の（主要項有限の）ローラン級数体と言われるものです．
また，解答に出てきた $a \in X$ に対して定義した $m_a := \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, a(n) \neq 0\}$ はしばしば $\nu(a)$ などと記し a の位数と呼ばれるものです．ただし $\nu(0) := \infty$ と規約します．いわゆる体の附値はこの位数を一般化したものです．

今回の問題

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合，$\mathbb{R}[X]$ を不定元 X の実係数多項式全体とする．$f \in \mathbb{R}[X]$ に対して，写像 $\widehat{f} : A \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\widehat{f}(a) := f(a) \quad (a \in A)$$

$\mathcal{P}_A := \{\widehat{f} \,|\, f \in \mathbb{R}[X]\}$ と置く．$\mathcal{P}_A$ に加法と乗法を以下のように定義する．$\varphi, \psi \in \mathcal{P}_A$ に対して

加法：$(\varphi + \psi)(a) := \varphi(a) + \psi(a)$ $(a \in A)$.
乗法：$(\varphi\,\psi)(a) := \varphi(a)\,\psi(a)$ $(a \in A)$.

$\mathcal{P}_A$ がこの加法と乗法に関していわゆる単位元をもつ可換環になっていることは既知とする．
また，$\mathbb{R}[X]$ には多項式の通常の加法と乗法が定義されているものとする．
即ち，$f = \sum_{\nu\geq 0} \alpha_\nu X^\nu\,, g = \sum_{\nu\geq 0} \beta_\nu X^\nu \in \mathbb{R}[X]$ に対して

加法：$f + g := \sum_{\nu\geq 0}(\alpha_\nu + \beta_\nu)X^\nu.$

乗法：$f\,g := \sum_{\sigma\geq 0}\sum_{\nu+\mu=\sigma}\alpha_\nu\beta_\mu X^\sigma$.

であることに注意する．ただし，$\{\alpha_\nu\}_{\nu\geq 0}$ および $\{\beta_\nu\}_{\nu\geq 0}$ はそれぞれ高々有限個を除いて 0 であるような実数列であるとする．このとき $\mathbb{R}[X]$ もこの加法と乗法に関して単位元をもつ可換環になっていることは既知とする．

次の写像を考える．

$$\Theta\ :\ \mathbb{R}[X]\ni f\mapsto \widehat{f}\in\mathcal{P}_A$$

1. Θ は全射かつ環準同型であることを示せ．
   ここで Θ が環準同型であるとは，任意の $f,g\in\mathbb{R}[X]$ に対して $\Theta(f+g)=\Theta(f)+\Theta(g)\,,\Theta(fg)=\Theta(f)\Theta(g)\,,\Theta(1_{\mathbb{R}[X]})=1_{\mathcal{P}_A}$ が成り立つことである．ただし $1_{\mathbb{R}[X]}$ は多項式としての 1，$1_{\mathcal{P}_A}$ は A 上でいたるところ 1 をとる関数とする．
2. (a) A が無限集合のとき Θ は環同型であることを示せ．（前問で全射準同型がわかっているので単射性をチェックすればよい）
   (b) A が有限集合のとき $\ker\Theta=\{f\in\mathbb{R}[X]\mid \Theta(f)=0_{\mathcal{P}_A}\}$ を求めよ．ただし $0_{\mathcal{P}_A}$ は A 上でいたるところ 0 をとる関数とする．

問題について一言

IA（解析教程）で扱われた問題です．解答お待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2015 年 2 月 28 日 (土)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2015 年 1 月 17 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401