数学工房 会報

2015年 5月

No. 117

巻　頭　言

数学工房は今期で設立２０年になります。いつの間に！ちょっと驚きです。実は日頃の事に追われてケロッと忘れておりました。様々な局面で力を貸してくださった方、支援して下さった方々、また教室を活気づけてくださった熱心な会員に感謝いたします。

数学工房の前身は若手の研究者、あるいは研究志願者が五里霧中の中で道を見失わないようにするための自発的な互助組織の中に生まれたグループです。当時の社会的なスローガンとして閉鎖的なアカデミズムから市民の数学へという風潮の中で一般市民向けに企画した催しが数学工房の先祖です。

研究を志す者にとって、数学のフロンテアについての知識を学ぶことは当然ですが、一番の切実な問題は将来自立して一本立ちするための基礎学力、技術的能力と判断力を如何に身につけるかなのです。学歴があり、数学が好きで生半可できる。ましてや玄人の志願者。ですが、これが意外に邪魔なわけです。今更というわけです。学部の教程にあるような基礎分野の再履修は意外に学びがたきものです。そこで、適切な信頼できる助言者を得て基礎分野のセミナーをとおり一遍でなく、将来の発展に益するような形で展開する試みをしたわけです。自分で自由になる程度にちゃんとした形で学ぶのは大変なのです。表現論や函数解析でもやれば線型代数がちゃんとわかっていないなんていうことは一目瞭然なのです。その時基礎から謙虚に学び直せるか？本気で数学を学びたいなら、玄人も素人もなく、それがポイントです。（本物ならそれを意識せずに苦もなくやるわけですが、並みの才能ならそうはいきませんね。）漫然と昔やったことを繰り返すのは恐らく無益です。真剣に数学に取り組んでいられる皆さんなら、私の言わんとする意は汲んでいただけると思います。

現代数学をご自分で学ぶための、あるいは応用するための、そして楽しむための、アマチュアでもきちっとした基礎素養を身につけること。爾来３０数年紆余曲折がありましたが、以来一貫し数学工房の基調として、その手助けのありかたを追求してきました。学びがたきものを如何に学んでもらうか？その過程で「数学の基本語彙と文法」、「解析教程」、「抽象線形代数」、「抽象位相」、「初等線型代数と微積分」などの基礎教程を順々に整備してきたのです。その上にこれらを総合して演習するための中級教程というのが数学工房の稽古体系の本来の骨組です。

さて今年度の数学工房は、初中級の２－３年にわたった長期連続講座に一応けりをつけて、珍しく新規講座が多くなっています。久しぶりに、確率論の基本を扱う講座を開講します。ID 方式で確率論の基本概念の数学的記述の意味を明らかにします。また秋学期から解析学の本格的な専門分野に進むための基礎コースとして函数解析の基礎（測度論を含む）講座を予定しています。それでは、今年度も皆さんが楽しみつつ技量を向上できるようなテーマを生み出せるよう努力いたします。今後も御助力と御協力の程をお願いいたします。

2015 年 5 月半ば　数学工房　桑野耕一

夏学期講座案内　2015年 5月～8月

2015 年 5 月 16 日より数学工房の春学期が以下の要領で開講されます。IA と MB が前期からの継続講座、他は今期からの新規講座になります。

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	解析教程 IV	5 月 17 日 (日)	入門
IB	複素解析	7 月 19 日 (日)	初級
IC	代数特論 I	6 月 28 日 (日)	初級
ID	初等線型代数と多次元の微積分	5 月 24 日 (日)	入門
IF	数学の基本語彙と文法 I	5 月 16 日 (土)	入門
IG	確率論の数学概論	7 月 11 日 (土)	入門
EA	抽象位相 I	5 月 17 日 (日)	初級
G	抽象線型代数 I	5 月 23 日 (土)	初級
MB	Hilbert 空間上の作用素 III	5 月 24 日 (日)	中級

入門

◆ IA 解析教程 IV

[4] 関数列・関数項の級数
  (1) 関数列の収束概念
  (2) 閉区間上の C^k 級関数の Banach 空間
  (3) 関数項の級数
  (4) 冪級数

[5] 剰余付 Taylor 公式とその応用
  (1) 積分の平均値定理
  (2) 剰余付 Taylor 公式
  (3) 若干の応用

(5/17 より隔週日曜 6 回 11:00-13:00)

◆ ID 初等線型代数と多次元の微積分

[1] Euclid 空間の代数と幾何
  (1) 数ベクトル空間
  (2) 内積空間
  (3) Euclid 空間の初等幾何
  (4) 線形代数の言葉から
  (5) 行列と線形写像 I

Euclid 空間の体積形式、交代形式は夏期集中の形で開講します。
(5/24 より隔週日曜 6 回 11:00-13:00)

◆ IF 数学の基本語彙と文法 I

[0] イントロダクション
  Σ の用法と数学的帰納法

[1] 集合、集合族の算法
[2] 写像の定義、像と原像の算法
[3] 写像の代数
[4] トピックス

II 無限の作法、III 同値関係と商空間に続く。なお、両講座は集中セミナーの形での開講を予定しています。
(5/16 より隔週土曜 3 回 14:00-18:00)

◆ IG 確率論の数学概論

[0] 確率論の記述の数学的枠組み
  (1) 標本空間と確率事象族（可測空間）
  (2) 確率測度（確率空間と基礎モデル）
  (3) 確率計算の基本ルール
  (4) 事象の独立

[1] 確率変数と分布
  (1) 確率変数（可測関数）
    1) 確率変数の代数
    2) 1 次元確率変数と分布、分布関数
    3) 連続型確率変数

(7/11 より隔週土曜 3 回 14:00-18:00)

初級

◆ IB 複素解析　（正則関数から Riemann 面まで）

[1] 正則関数の基礎理論
  (1) 複素積分、正則性
  (2) 領域上の正則関数、正則関数環
  (3) 線積分と積分公式
  (4) 局所理論
[2] Presheaf と Sheaf の一般理論

(7 月 19、20 日、8 月 2 日の 3 回 14:00-18:00)

◆ IC 代数特論 I
–形式冪級数環、冪級数体と応用–

[0] 一般論からの準備　概念、記号

[1] 体を係数とする形式冪級数環
  (1) 形式冪級数の基礎演算とその性質
  (2) イデアルの構造
[2] 位相環としての形式冪級数環
  (1) 形式冪級数環の距離
  (2) 諸演算の連続性
  (3) 形式冪級数の族の一般和
    解析学の一般化
[3] 形式冪級数体

(6/28 より隔週日曜 3 回 14:00-18:00)

◆ EA 抽象位相 I (アドヴァンスコース)

[1] 位相空間の一般論
  (1) 基本概念
    1) 開集合系・閉集合系・近傍系
    2) 点のトポス、閉包、開核
    3) 連続写像、同相写像、位相同型
  (2) 位相の比較と構造
    1) 位相の順序と生成

2) 位相の基底、準基底
[2] フィルター
(1) フィルターの一般論
(2) フィルターによる位相の記述
[3] ネット
(1) 有向集合とネット
(2) ネットによる位相の記述

(5/17 より隔週日曜 3 回 14:00-18:00)

◆ G 抽象線型代数 I

[1] 線形空間論 典型と表現
(1) 線形空間の定義と基本的な性質
典型的な線形空間
(2) 線形部分空間、線形部分空間の演算
生成される空間、直和
(3) 従属、独立、次元、基底
(4) 無限次元線形空間

(5/23 より隔週土曜 3 回 14:00-18:00)

中級

◆ MB Hilbert 空間上の作用素 III（コンパクト作用素）

[4] コンパクト作用素
(1) コンパクト作用素の基礎的な性質
(2) Schatten form
(3) コンパクト作用素の展開定理
(4) Min-max 定理
(5) B(H) の両側イデアル（Calkin の定理）

[5] 作用素イデアル
(1) 基本的定義（Schatten-pClass）
(2) Schatten class の Lp 理論（とりわけ Duality）
(3) 若干の応用

(5/24 より隔週日曜 3 回 14:00-18:00)

講座料について

各講座とも、税込￥32,000(学割￥25,000) です。
途中参加の場合、
・全 3 回講座は、第 1、2 回目￥12,000（学割 ￥9,000)、第 3 回目￥10,000（学割 ￥9,000）です。
・全 4 回講座は、第 1 回目￥10,000（学割 ￥9,000)、第 2 回目以降￥8,000/回(学割 ￥6,000/回）です。
・全 6 回講座は、第 1 回目￥6,500（学割 ￥6,000)、第 2 回目以降￥5,500/回(学割 ￥4,000/回）です。

会員からのメッセージ

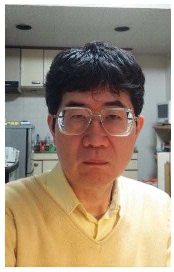
会員の中松芳樹と申します。現在情報通信メーカで IT 技術者をしております。以前画像処理の研究をしていた頃などは数学も少しは使っていたのですが、ソフト開発に携わるようになってからは、数学は全くといっていいほど使わなくなってしまいました。しかしコンピュータプログラミングも数学も記号を操るのが仕事という意味では似ていると牽強付会的に勝手に思っています。

大学では工学部の情報系、制御系、機械系、数理工学を融合したような学科を専攻しておりました。学生時代は特に熱心に数学を勉強したわけではありませんが、常に心引かれる存在ではあって、卒業してからも一旦習ったことを別の教科書で勉強し直したりしていました。それが終わると別のことも学びたくなるのですが、数学はなかなか初心者には近寄りがたく、独学では新しい分野に踏み出すことは難しいと感じる日々を過ごすうち、ふと IT にはよくある技術セミナーのようなものが数学にはないだろうかと思いたち、検索したところヒットしたのがここ数学工房でした。それが 2010 年の秋、最終的に講座のオリエンテーションを受けて入会を決めました。工学部の数学では抜け落ちていた基礎的な講座もあり、理系社会人にとってありがたい存在です。講義に参加してみると、白熱教室の皆さんの熱心な姿やマエストロのごとき先生（時に猛烈な勢いで珠玉の数式を書き連ねていく様は数式に向かってタクトならぬ白墨を振るっているかのように見えます）に鼓舞され 5 年目の今に至るまで続いています。(ところで IT 業界では今ビッグデータがブームです。講義要項にビッグデータの基礎と称する講座があれば私と同じように検索エンジンから数学工房に辿り着く技術者が大挙押し寄せると思うのは私だけでしょうか？)

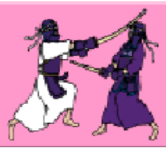
先ほど仕事では数学は使わないと書きましたが、考えてみると数学研究の麗しい果実は利用しています。ただ IT の世界では数学は離散数学が多くて、ちょっと変わった数学が多いように思います。例えば盛んに研究されている一方向関数というものがあります。これは普通に計算するには簡単に計算されるが、関数の値から入力値を計算するのは非常に困難というものです。連続関数なら互いに近くにある入力値のペアは出力値も近くにあるのに、一方向関数ではまったく見当もつかないぐらい離れた値になってしまいます。離散的関数に対して当然連続性は論じられないのですが、考え方が連続性とは正反対で興味深いです。そして IT の世界では重要視され、実際電子署名など

に実用化されています。これなど技術者は深い研究内容は意識せず普通に使っている関数の一つです。

会員の皆さんは、数学を糧にしている方が多いように拝見します。私は仕事とは関係なく参加するただの日曜数学愛好家にすぎませんが、その分気楽に手当たり次第に食い散らかしています。しかしその一方で初めて見る定理やこれまで学んできたのとは違うアプローチで気づかされる事柄に大いに刺激を受け、数学の真実に迫る鋭利さをいつか仕事にも活かせないものか夢想することもあります。学生時代のノートなど全然大事に思わずに処分してしまいましたが、数学工房でとりためたノートがなぜか大変貴重なものに思えるのはそのせいかもしれません。

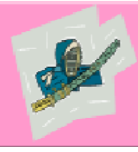


以上思いつくままに書き並べましたが、最後に会員の皆さんと数学工房の益々の発展をお祈りして筆を置きます。



入門　桑野道場　（第28回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//



前回の問題

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合，$\mathbb{R}[X]$ を不定元 X の実係数多項式全体とする．$f \in \mathbb{R}[X]$ に対して，写像 $\widehat{f} : A \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\widehat{f}(a) := f(a) \quad (a \in A)$$

$\mathcal{P}_A := \{\widehat{f} \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$ と置く．$\mathcal{P}_A$ に加法と乗法を以下のように定義する．$\varphi, \psi \in \mathcal{P}_A$ に対して

加法：$(\varphi + \psi)(a) := \varphi(a) + \psi(a) \ (a \in A)$.
乗法：$(\varphi\, \psi)(a) := \varphi(a)\, \psi(a) \ (a \in A)$.

$\mathcal{P}_A$ がこの加法と乗法に関していわゆる単位元をもつ可換環になっていることは既知とする．
また，$\mathbb{R}[X]$ には多項式の通常の加法と乗法が定義されているものとする．
即ち，$f = \sum_{\nu \geq 0} \alpha_\nu X^\nu$, $g = \sum_{\nu \geq 0} \beta_\nu X^\nu \ \in \mathbb{R}[X]$ に対して

加法：$f + g := \sum_{\nu \geq 0} (\alpha_\nu + \beta_\nu) X^\nu$.
乗法：$f\, g := \sum_{\sigma \geq 0} \sum_{\nu + \mu = \sigma} \alpha_\nu \beta_\mu X^\sigma$.

であることに注意する．ただし，$\{\alpha_\nu\}_{\nu \geq 0}$ および $\{\beta_\nu\}_{\nu \geq 0}$ はそれぞれ高々有限個を除いて 0 であるような実数列であるとする．このとき $\mathbb{R}[X]$ もこの加法と乗法に関して単位元をもつ可換環になっていることは既知とする．
次の写像を考える．

$$\Theta \ : \ \mathbb{R}[X] \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathcal{P}_A$$

1. Θ は全射かつ環準同型であることを示せ．
   ここで Θ が環準同型であるとは，任意の $f, g \in \mathbb{R}[X]$ に対して $\Theta(f + g) = \Theta(f) + \Theta(g)$, $\Theta(fg) = \Theta(f)\Theta(g)$, $\Theta(1_{\mathbb{R}[X]}) = 1_{\mathcal{P}_A}$ が成り立つことである．ただし $1_{\mathbb{R}[X]}$ は多項式としての 1，$1_{\mathcal{P}_A}$ は A 上でいたるところ 1 をとる関数とする．
2. (a) A が無限集合のとき Θ は環同型であることを示せ．（前問で全射準同型がわかっているので単射性をチェックすればよい）
   (b) A が有限集合のとき $\ker \Theta = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \Theta(f) = 0_{\mathcal{P}_A}\}$ を求めよ．ただし $0_{\mathcal{P}_A}$ は A 上でいたるところ 0 をとる関数とする．

解答

1. Θ が全射であることは明らかである．環準同型であることを示す．
$f = \sum_{\nu\geq 0}\alpha_\nu X^\nu, g = \sum_{\nu\geq 0}\beta_\nu X^\nu \in \mathbb{R}[X]$ を任意にとる．ただし，$\{\alpha_\nu\}_{\nu\geq 0}$ および $\{\beta_\nu\}_{\nu\geq 0}$ はそれぞれ高々有限個を除いて 0 であるような実数列であるとする．
   (a) 任意の $a \in A$ に対し，$\Theta(f+g)(a) = (\widehat{f+g})(a) = (f+g)(a) = \sum_{\nu\geq 0}(\alpha_\nu+\beta_\nu)a^\nu = \sum_{\nu\geq 0}\alpha_\nu a^\nu + \sum_{\nu\geq 0}\beta_\nu a^\nu = f(a)+g(a) = \widehat{f}(a)+\widehat{g}(a) = \Theta(f)(a)+\Theta(g)(a) = (\Theta(f)+\Theta(g))(a)$．$a \in A$ は任意だから $\Theta(f+g) = \Theta(f)+\Theta(g)$.
   (b) 任意の $a \in A$ に対し，$\Theta(fg)(a) = (\widehat{fg})(a) = (fg)(a) = \sum_{\sigma\geq 0}\sum_{\nu+\mu=\sigma}\alpha_\nu\beta_\mu a^\sigma = (\sum_{\nu\geq 0}\alpha_\nu a^\nu)(\sum_{\nu\geq 0}\beta_\nu a^\nu) = \widehat{f}(a)\,\widehat{g}(a) = \Theta(f)(a)\,\Theta(g)(a) = (\Theta(f)\Theta(g))(a)$.
   $a \in A$ は任意だから $\Theta(fg) = \Theta(f)\Theta(g)$.
   (c) 任意の $a \in A$ に対し，$\Theta(1_{\mathbb{R}[X]})(a) = (\widehat{1_{\mathbb{R}[X]}})(a) = (1_{\mathcal{P}_A})(a) = 1$.
   $a \in A$ は任意だから $\Theta(1_{\mathbb{R}[X]}) = 1_{\mathcal{P}_A}$.

   以上のことから Θ は環準同型.
2. (a) A が無限集合の場合 Θ の単射性を示す．
   $f \in \ker(\Theta)$ ならば任意の $a \in A$ に対して $f(a) = 0$．f の次数が 1 以上ならば f は高々有限個の根しかもたないので，A が無限集合であることに反する．したがって f は定数．しかも f は根をもたないといけないから $f = 0_{\mathbb{R}[X]}$．すなわち $\ker(\Theta) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
   よって Θ は単射.
   (b) A は有限集合なので $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ とおく．
   $g \in \ker(\Theta) \Leftrightarrow g(a_1) = \cdots = g(a_n) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathbb{R}[X]$ が存在して $g = (X-a_1)\cdots(X-a_n)f$．したがって $\ker(\Theta) = (X-a_1)\cdots(X-a_n)\mathbb{R}[X] = \{(X-a_1)\cdots(X-a_n)f \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$.

解説

多項式環 $\mathbb{R}[X]$ と多項式関数環 $\mathcal{P}_A$ を比較する問題です．

通常，多項式と多項式関数は区別しないで使っていますが A が無限集合なら同一視できます．したがって我々は $\mathbb{R}[X]$ と $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ を同じものだと無意識的に思っているのです．

A が有限集合のときは $\mathbb{R}[X]$ と $\mathcal{P}_A$ は同一視できません．$I = (X-a_1)\cdots(X-a_n)\mathbb{R}[X]$ とおけば，準同型定理により $\mathbb{R}[X]/I$ とが同型になります．この $\mathbb{R}[X]/I$ は座標環とよばれるものの一番単純な例でもあります．

また $\mathcal{P}_A$ は $\mathbb{R}^n$ と線型空間として同型であり，$\mathbb{R}^n$ は自然な写像の空間とも見られます．この観点はしばしば有用です。$\mathbb{R}^n$ の max ノルムは写像の sup ノルムと考えれますし，$\mathbb{R}^n$ の順序は写像の自然な順序と考えることができます．

今回の問題

定義

$I(\subset \mathbb{R})$ を区間とする．$f: I \to \mathbb{R}$ が凸であるとは，任意の $x_1, x_2 \in I$ と任意の $t(0 \leq t \leq 1)$ について $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ が成立することである．

問題

1. $I(\subset \mathbb{R})$ を区間とするとき，以下の命題は同値であることを示せ．
   (a) $f: I \to \mathbb{R}$ が凸である．
   (b) $G_f := \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid x \in I, f(x) \leq y\}(\subset \mathbb{R}^2)$ が凸である．
   ただし，$A(\subset \mathbb{R}^2)$ が凸であるとは任意の $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$ と任意の $t(0 \leq t \leq 1)$ に対して $(1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2) \in A$ が成立することである．

(c) $x_1, x_2, x_3 \in I (x_1 < x_2 < x_3)$ に対して

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

2. $I(\subset \mathbb{R})$ が開区間のとき，$f : I \to \mathbb{R}$ が凸である必要十分条件は，
任意の $x_0 \in I$ に対して 定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在して $f(x) \geq f(x_0) + \gamma(x - x_0)$ が任意の $x \in I$ に対して成立することである．これを示せ．
（必要性のヒント）
問題 1.(c) により $\gamma_- := \sup\left\{\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \;\middle|\; y < x_0\right\}$, $\gamma_+ := \inf\left\{\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \;\middle|\; x_0 < z\right\}$ とすれば γ_- , γ_+ は有限確定で $\gamma_- \leq \gamma_+$ である．$\gamma_- \leq \gamma \leq \gamma_+$ となる γ を選べばこの γ が求めるものである．

問題について一言

2015 年 4 月 18〜19 日の集中で扱われた問題です．多くの人の解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2015 年 6 月 30 日 (火)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2015 年 5 月 22 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203