数学工房　会報　2016年 No.119

巻　頭　言

会員の皆様、本年もよろしくお願いいたします。久しぶりにポカーンとして、青空に浮かぶ孤独な雲を眺めていると、この世界の騒がしさと目先の忙しさに追われ忘れてしまいがちな様々な思いが浮かび上がってきます。暮れからお正月にかけて多少余裕ができたので、久しぶりに何冊かの数学の資料と哲学関係の資料を眺めることができました。

『九州数学教育会創立 50 周年記念出版　冨田稔教授　講義録』という冊子があります。作用素環、非可換解析学で大きな仕事をされた冨田稔先生が、九州教育数学会に属する熱心な高校の先生方を対象に行った、極めてオリジナリティの香り高い講義の記録です。この中には線型代数と幾何学精神という強い思想性を感じさせるものから Gelfand の表現定理の重要さを説かれた非可換解析学入門や C^* 環 を基礎にした函数解析的積分論までが収められていて、大変に興味深い冊子です。

冊子編集の中心となった青柳先生から送っていただいたのですが、なかなかまとまって眺める暇の無いまま、徒に年月が過ぎてしまいました。冨田先生は研究論文以外の一般書はまったく書かれていないとのことなので、本書に納められた記録は大変に貴重なものです。その冒頭で、昭和 21 年の九大の新入生として、当時の微分幾何学教授であった本部均先生の線型代数の講義に触れたときのことを、次のように述べられています。

「線型代数は実によく準備された名講義でしたが、何よりも忘れられないのはその構想の新鮮かつ強烈なオリジナリティで、線型代数のような基本的なカリキュラムにはそのバックボーンとなる思想性が、いかに重要かを教えられました。とはいっても、実は先生の講義は一回置き五回ほどしか聞いていないのですが、それでも私の数学の方向付けに大きな影響を受けた事を自覚しています。」

数学工房は、本格的に現代数学の専門領域の本格的な勉強に入る前に、あるいは応用に携わる前に、必要な言語を習得し稽古する場です。早いもので、この生業を始めてもう 20 年以上たちます。その原点は、理論と実際を問わず、およそ数学とは何かという問いに欠けた、数学の基礎教育にあまりの貧困さを感じたことです。現代数学の基本科目の教育で最も大切なことは、引用した冨田先生の文につきると思います。少なくともその理想を実現しようと努力する必要があると思います。その努力はそれをする当人の人生の喜びになり、数学を通じて「いかに生くべきか」という倫理的な問いの解答に 近づく道ではないかと思います。この言葉を座右の銘として、私が今までに手をつけた基礎教程をいかしてより良いものにするのが私の課題です。一人ではできぬことなので御協力のほどお願いします。なお、冨田先生のご講義をもとにした変奏は機会があれば、いずれセミナーの形にまとめたいと思います。

しかし、冨田先生が学生であった昭和 21 年と言えば、あの無謀で短絡、無責任な戦争が当然の悲惨な結果になり、日本が敗戦国になって間もないころです。空虚な空威張りのスローガンは様々な分野で姿を消し、やっと好きな数学が思う存分できるようになって、講義にもほとんど出ずに勉強に励む学生の姿を彷彿とさせますね！ 廃墟の中から優れた仕事が一斉に生まれてきた事実は、よくよく考えるべきことです。

2016 年 1 月　数学工房　桑野耕一

春学期講座案内　2016年 1月～4月

2016 年 1 月 17 日より数学工房の春学期が以下の要領で開講されます。

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	解析教程	1 月 24 日 (日)	入門
IB	複素関数論	3 月 5(土)	初級
IC	形式冪級数をめぐって	1 月 24 日 (日)	初級・中級
ID	初等線型代数と微積分	1 月 17 日 (日)	入門
IG	確率論の数学概論 III	1 月 23 日 (土)	入門
EA	抽象位相 III	2 月 28 日 (日)	初級
G	抽象線型代数 III	1 月 17 日 (日)	初級
MA	関数解析概論 II	3 月 6 日 (日)	初級・中級
MB	Fredholm 作用素と Calkin 環	1 月 30 日 (土)	中級

入門

◆ IA 解析教程
–Fourier 級数序論–
Fourier 解析を中心に交差する数学の世界は、実り豊かで眺めるだけでも楽しいものです。T.W. ケルナーの「フーリエ解析大全」やジグムントの大著「Trigonometric Series (三角級数)」を拾い読みすると、実に面白いことがいっぱい書いてあります。
普段の数学工房では、どちらかというと体系的な取り扱いを強調していますが、今回は解析教程の続編として、いつもと違うスタンスで Fourier 級数の性質の正当化を起源とする現代的な解析学の定理や理論の故郷を訪ねます。

(0) 記号、概念
(1) Dirichlet 核、Fejér 核
(2) Fejér の定理といくつかの帰結
(3) Weyl の一様分布
(4) 単純収束定理
(5) トピックス

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
1/24、2/7、2/21、3/6、3/20、4/3

◆ ID 初等線型代数と微積分
–多変数の高階微分、Taylor 公式、極値–
実変数の多変数関数の高階微分と平均値定理、グラージェント、ヘッセ行列、ラプラシアン、そして多変数の Taylor 公式、極値の分類などを座標フリーの方法で明確に扱います。

(1) r 回連続微分可能な関数のクラス
(2) グラージェント、ダイバージェンス、ヘッセ行列、ラプラシアン
(3) 高階微分とテンソル表示
(4) 剰余付き Taylor 公式
(5) 極値と極値の分類

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
1/17、1/31、2/14、2/28、3/13、3/27

◆ IG 確率論の数学概論 III
–多変量分布の数学的構造–
前学期は分布の理論的構造と 1 次元期待値積分を中心に解説しました。今回は多次元の分布と期待値積分を解説します。厳密な証明よりも数学的仕組みの把握に重点を置く ID 方式の講座です。ある程度分布の基礎理論をご存知で、多変数の場合の数学的仕組みを知りたい方は中途参加可能です。

(1) n 次元確率分布
(2) 同時分布関数
(3) 変数変換
(4) 確率変数の独立
(5) 多次元 Riemann-Stieltjes 積分
(6) 期待値積分

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
1/23、2/6、2/20

初級

◆ IB 複素関数論
–大域的 Cauchy 理論–
前学期は複素平面上の微分形式の一般論を扱い原始関数の存在定理、道に沿った積分を論じました。今学期は複素対 数関数、複素正則関数から始まり、ホモトピー、大域的 Cauchy 理論へと進みます。

[1] ホモトピー
  (1) 複素対数関数
  (2) ホモトピー
[2] 正則関数の Cauchy 理論
  (1) Cauchy の定理
  (2) Cauchy の積分公式
  (3) Cauchy、Taylor の表現定理
  (4) 連続定理、一致の定理

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)

3/5、3/19、4/2

◆ EA 抽象位相 III
　詳細については、しばらくお待ちください。
(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
2/28、3/13、3/27

◆ G 抽象線型代数 III
　–内積空間の幾何学、基本的作用素のクラス–
　一般位相と並んで最も基本的かつ重要な型稽古としてこの講座は設けられていますが、同時にこの辺の内容は応用上も極めて有用な部分です。また将来、函数解析、特に作用素の一般論を勉強される方は、このあたりの事を知っておいたほうがよいでしょう。
　前半は内積空間の幾何学：直交性、正射影定理から始まり、直交化、線型形式とその応用までを、後半は作用素のクラスを扱います。純粋応用を問わず、いたるところに現れる基本的な作用素の一般論です。2 次形式のより詳しい理論や特異値、特異ベクトル等は集中セミナーで取り上げる予定です。

(1) 内積空間の幾何学 I
(2) 内積空間の幾何学 II　線型形式の表現定理
(3) 基本的な作用素のクラス
(4) 対称変換とスペクトル

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
1/17、1/31、2/14

初級・中級

◆ IC 形式冪級数をめぐって
　–Weierstrass の準備定理–
　前学期に可換環上の形式冪級数環とイデアルの構造を論じました。今回は、多変数関数論の局所理論で重要な Weierstrass の準備定理をとりあげます。

(0) 冪級数の多重添字の扱い
(1) 形式冪級数環の完備性
(2) 不動点定理
(3) Weiersrass の準備定理
(4) トピックス

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
1/24、2/7、2/21

◆ MA 関数解析概論
　–関数解析の展開される場 I–
　関数解析が展開される場、関数空間や作用素論の展開される場の記述の基礎として必要事項のまとめです。事柄 が多岐にわたるので公式や定理の意味、構造を明確に描写するように努めますが、証明は省略することがあります。

(0) 局所線型空間
(1) 双対空間と Hahn-Banach の定理
(2) ノルム空間、Banach 空間
(3) 各点収束位相、一様収束位相、級数
(4) トピックス

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
3/6、3/20、4/3

中級

◆ MB Fredholm 作用素と Calkin 環
　Hilbert 空間の作用素の概略を扱う最終回です。

(1) Calkin 環
(2) Fredholm 作用素の定義と基本的な性質
(3) Fredholm 作用素の特徴付け
(4) 指数 (Index) の理論
(5) Fredholm 作用素の空間の連結成分
(6) Weyl、von Neumann、Hagg の定理

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
1/30、2/13、2/27

講座料について

　各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。
途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目￥12,000(学割 ￥9,000)、3 回目￥10,000(学割 ￥9,000) です。
・4 回講座は、1 回目￥10,000(学割 ￥9,000)、2 回目以降￥8,000/回 (学割 ￥6,000/ 回）です。
・6 回講座は、1 回目￥6,500(学割 ￥6,000)、2 回目以降￥5,500/回 (学割 ￥4,000/回）です。

会員からのメッセージ

　皆様こんにちは、会員の范揚武 (はん・あきたけ) と申します。法律事務所で事務員と某社の通信教育で講師をする傍ら、自宅で中高生に数学を教えています。なぜ数学をしているのか、なぜ数学を深く学びたいのか等をお話できれば良いのですが、正直に言いますと、自分自身でもよくわかりませんので、私と数学及び数学工房との出会い等をお話しします。
　中学生のときから数学好きでしたが、大学生で遊びに夢中になり、数学からは遠のいてしまいました。再び数学を始めたのは、大学を卒業する直前に暇つぶしで購入した数学雑誌を時間を忘れて一晩中読み続けて、やはり自分は数学が好きなのではないかとの自覚（というより錯覚？）をした

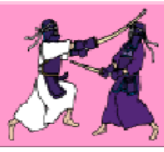
ことがきっかけでした。それから初等的な専門書を少々読むうちに、問題が解けることがうれしいという学生時代の「好き」だけでなく、体系的な美しさ魅かれ、理論の歴史的な発展にも興味がでるようになりました。以来、もっと深く数学がわかりたいと思うようになり、専門書をさらに買い込みましたが、怠惰な性格と内容的に手に余るものも買い込んだため、読まずに本棚に並んでいる本が多々あるという状態が続いています。

独学で本を読むのは気楽で楽しいのですが、つい受け身の学習姿勢になってしまうことが気になり始めました頃、池袋のジュンク堂書店で桑野先生の講演を聴くことができました。先生の講演は、2 項係数を題材にしたお話でしたが、2 項係数や Σ 記号の基本的な扱い方だけでなく、2 項係数と微分法の発見の繋がりまで触れられていて、知っていることを再発見した気持ちになり、独りで本を読み進めるのとは別の刺激をうけました。講演の後、先生に本の読み方等を質問したところ、親切に教示していただき、また勇気づけていただいたことは今でも覚えています。その数年後、数学工房に入会しました。余談ですが、初めての講座（凸関数論の集中講座）に参加したとき、桑野先生から「范さん、以前にお会いしていませんか？」と聞かれ、まず先生の記憶力に驚きました。

数学工房の会員となっても私の怠惰は不変で、3 年前に身を固めて以来、稽古をさぼっておりました。妻からは、「好きな数学をもっとやってほしい。」と思ってもいなかったことを言い続けてもらい、昨年からまた稽古に参加しています。最近は、数学工房の講座を聞いてから、再度本に戻ると、見通しがよくなっているだけでなく、風景が変わって見えるのを楽しんでいます。個人的な考えですが、先生のテキストは、大局的な理論の流れが見えるように作ってあり、講座では個々の話に強弱、濃淡をつけてくれるからではないかと思っています。また、テキストをよく読むと、本にはあまり書いていないことも盛り込まれていることがあるので、じっくり温めるようにしています。

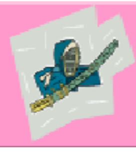
これからは、今も本棚に並んでいる本を読めるようになって、もっと数学が見えるようになることを当面の目標として稽古をしていきます。もしかしたら、なぜ数学をしているのかに対する答えがその先にあるのかもしれません。そして、私のところに来てくれる生徒さんに数学を技術だけではなく、文化としても教えていけるようになりたいと思っています。

今年は、G と MA で稽古をしようと考えております。会員の皆様、もし講座でご一緒した際には、声をかけていただければ幸いです。よろしくお願いいたします。



入門　桑野道場　（第30回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//



前回の問題

$\mathbb{C}$ を複素数平面とする．

1. $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が実線型変換 とは
   任意の実数 α,β と任意の複素数 z,w に対して，$T(\alpha z+\beta w)=\alpha T(z)+\beta T(w)$ が成り立つことである．このとき以下を示せ．
   $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が実線型変換
   $\Longleftrightarrow$ 複素数 a,b が存在して任意の複素数 z に対して $T(z)=az+b\bar{z}$
   このとき複素数 a,b は唯一通りに定まる．ここで $\bar{z}$ は z の共役を表す．
2. Ω を $\mathbb{C}$ の空でない開集合とし，関数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ を考える．$z_0\in\Omega$ とする．
   f が z_0 で実微分可能であるとは，実線型変換 $L_f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と関数 $\Delta:\Omega\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ が存在し，次の条件を満たすことである．

$$\begin{cases} f(z)=f(z_0)+L_f(z-z_0)+|z-z_0|\Delta(z) & (z\in\Omega\setminus\{z_0\}) \\ \lim_{z\to z_0}\Delta(z)=0 \end{cases}$$

   このとき次を示せ．
   f が z_0 で実微分可能

$\Longleftrightarrow$ 次の条件を満たす関数 $g\,,h:\Omega\to\mathbb{C}$ が存在する．

$$\begin{cases} f(z)=f(z_0)+g(z)(z-z_0)+h(z)\overline{(z-z_0)} & (z\in\Omega) \\ g \text{ と } h \text{ はそれぞれ } z_0 \text{ で連続} \end{cases}$$

解答

1. ($\Rightarrow$) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して実数 $\xi\,,\eta$ が存在して $z=\xi+i\eta$ と書ける．ただし i は虚数単位． $T(z)=T(\xi+i\eta)=\xi T(1)+\eta T(i)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}T(1)+\dfrac{z-\bar{z}}{2i}T(i)=\dfrac{1}{2}\left(T(1)+\dfrac{1}{i}T(i)\right)z+\dfrac{1}{2}\left(T(1)-\dfrac{1}{i}T(i)\right)\bar{z}$．したがって $a:=\dfrac{1}{2}\left(T(1)+\dfrac{1}{i}T(i)\right),b:=\dfrac{1}{2}\left(T(1)-\dfrac{1}{i}T(i)\right)$ とおくと $T(z)=az+b\bar{z}$ を得る．
   $a\,,b$ の一意性は任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して $T(z)=az+b\bar{z}=0$ ならば $a=b=0$ を示せばよい．実際，$z=1\,,z=i$ として $T(1)=a+b=0$ かつ $T(i)=ai-bi=0$．これより $a=b=0$．
   ($\Leftarrow$) $T(z)=az+b\bar{z}\,(z\in\mathbb{C})$ とする．任意の $\xi\,,\eta\in\mathbb{R}$ と任意の $z\,,w\in\mathbb{C}$ に対して $T(\xi z+\eta w)=a(\xi z+\eta w)+b(\overline{\xi z+\eta w})=\xi(az+b\bar{z})+\eta(aw+b\bar{w})=\xi T(z)+\eta T(w)$．
2. ($\Rightarrow$) 仮定より実線型変換 $df(z_0):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と関数 $\Delta:\Omega\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ が存在し

$$\begin{cases} f(z)=f(z_0)+df(z_0)(z-z_0)+|z-z_0|\Delta(z) & (z\in\Omega\setminus\{z_0\}) \\ \lim_{z\to z_0}\Delta(z)=0 \end{cases}$$

   を満たす．1. より $a\,,b\in\mathbb{C}$ が存在し $df(z_0)(w)=aw+b\bar{w}(w\in\mathbb{C})$．したがって $f(z)=f(z_0)+a(z-z_0)+b(\overline{z-z_0})+|z-z_0|\Delta(z)$ と書ける．よって $f(z)=f(z_0)+(z-z_0)\left\{a+\dfrac{\overline{(z-z_0)}\Delta(z)}{2|z-z_0|}\right\}+(\overline{z-z_0})\left\{b+\dfrac{(z-z_0)\Delta(z)}{2|z-z_0|}\right\}(z\in\Omega\setminus\{z_0\})$．関数 $g:\Omega\to\mathbb{C}$ を $z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ のとき $g(z)=a+\dfrac{\overline{(z-z_0)}\Delta(z)}{2|z-z_0|}$，$z=z_0$ のとき $g(z_0)=a$ で定義し，関数 $h:\Omega\to\mathbb{C}$ を $z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ のとき $h(z)=b+\dfrac{(z-z_0)\Delta(z)}{2|z-z_0|}$，$z=z_0$ のとき $h(z_0)=b$ で定義すると，$g\,,h$ は z_0 で連続で $f(z)=f(z_0)+g(z)(z-z_0)+h(z)(\overline{(z-z_0)}\,(z\in\Omega)$ を満たす．
   ($\Leftarrow$) $f(z)=f(z_0)+g(z)(z-z_0)+h(z)\overline{(z-z_0)}=f(z_0)+g(z_0)(z-z_0)+h(z_0)\overline{(z-z_0)}+(g(z)-g(z_0))(z-z_0)+(h(z)-h(z_0))\overline{(z-z_0)}\,(z\in\Omega)$．$L_f(w):=g(z_0)w+h(z_0)\bar{w}\,(w\in\Omega)$ とすると L_f は $\mathbb{C}$ 上の実線型変換．$z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ に対して $\Delta(z):=\dfrac{(g(z)-g(z_0))(z-z_0)+(h(z)-h(z_0))\overline{(z-z_0)}}{|z-z_0|}$ とおくと $f(z)=f(z_0)+L_f(z-z_0)+|z-z_0|\Delta(z)\,(z\in\Omega\setminus\{z_0\})$ と書ける．ここで g と h が z_0 で連続であることに注意して，$|\Delta(z)|\le\dfrac{|g(z)-g(z_0)||z-z_0|}{|z-z_0|}+\dfrac{|h(z)-h(z_0)||\overline{z-z_0}|}{|z-z_0|}=|g(z)-g(z_0)|+|h(z)-h(z_0)|\to 0\,(z\to z_0)$．よって証明された．

解説（というかほとんど実線型と複素線型の関係について）

1. $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が複素線型変換 とは任意の $c_1,c_2,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ に対して，$T(c_1z_1+c_2z_2)=c_1T(z_1)+c_2T(z_2)$ が成り立つことである．T が複素線型変換である必要十分条件は唯一の $a\in\mathbb{C}$ が存在して $T(z)=az\,(z\in\mathbb{C})$ であることはすぐわかる．もちろん複素線型変換は実線型変換である．実線型変換 T が複素線型変換である特徴付けを考えてみよう．
   T は $T(z)=az+b\bar{z}$ という形にかけた．T が複素線型変換なので $b=0$ である．$b=\dfrac{1}{2}\left(T(1)-\dfrac{1}{i}T(i)\right)$ であることがわかっているので $b=0\Longleftrightarrow T(1)=\dfrac{1}{i}T(i)$．$T(1)$ と $T(i)$ を実部と虚部にわけると $b=0\Longleftrightarrow \mathrm{Re}T(1)=\mathrm{Im}T(i)$ かつ $-\mathrm{Im}T(1)=\mathrm{Re}T(i)$ であることもすぐわかる．

2. $f:\Omega\to\mathbb{C}$ が $z_0\in\Omega$ で実微分可能なとき現れる実線型変換 $df(z_0)$ を考える．$df(z_0)(w)=aw+b\bar{w}\,(z\in\Omega)$ という形に書ける．$a\,,b$ は一意に決まるのでそれぞれ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,,\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ と記す．また，$df(z_0)(1)\,,df(z_0)(i)$ をそれぞれ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,,\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ と記す．

$f:\Omega\to\mathbb{C}$ が $z_0\in\Omega$ で複素微分可能とは複素線型変換 $L_f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と関数 $\Delta:\Omega\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ が存在し，以下の条件を満たすことである．

$$\begin{cases} f(z)=f(z_0)+L_f(z-z_0)+|z-z_0|\Delta(z) \quad (z\in\Omega\setminus\{z_0\}) \\ \lim_{z\to z_0}\Delta(z)=0 \end{cases}$$

即ち実微分可能なときの定義の「実」線型変換を「複素」線型変換に置き換えたものである．実微分可能な関数 f が複素微分可能である特徴付けを考えてみよう．

1. の議論から直ちに f が $z_0\in\Omega$ で複素微分可能 $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$．また，1. より $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)+\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$ かつ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)-\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$．これより $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0\iff\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ が従う．さらに 1. でやったように $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ を実部と虚部に分けて $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0\iff\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$ かつ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)=-\mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right)$．この最後の連立方程式を Cauchy-Riemann の関係式と呼ぶ．

今回の問題

Ω を空でない集合とし，$\{E_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ を Ω の部分集合からなる可算列とする．このとき以下を示せ．

1. $\limsup_\nu E_\nu := \{\omega\in\Omega\,|\,無限個の\nuについて\omega\in E_\nu\}$ とするとき $\limsup_\nu E_\nu=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{\nu\geq n}E_\nu$ が成り立つ．
2. $\liminf_\nu E_\nu := \{\omega\in\Omega\,|\,ある自然数\nu_0が存在して\ \nu\geq\nu_0\ ならば\ \omega\in E_\nu\}$ とするとき $\liminf_\nu E_\nu=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{\nu\geq n}E_\nu$ が成り立つ．
3. 以下の全ての条件を満たす Ω の部分集合からなる可算列 $\{F_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ が存在する．
   (a) $\{F_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ は互いに素である．
   (b) 任意の自然数 n に対して $F_n\subset E_n$．
   (c) 任意の自然数 n に対して $\bigcup_{\nu=1}^n E_\nu=\bigcup_{\nu=1}^n F_\nu$．
   (d) $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}E_\nu=\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}F_\nu$．

■問題について一言　数学工房の確率論や測度論の講座では必ず取り上げられる基本補題です．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com (郵送される場合は数学工房オフィスまで)
締切　2016 年 3 月 31 日 (木)

数学工房　2016 年 1 月 22 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401