数学工房会報

2016年
No.121

巻　頭　言

「しくじりは必ずしも悪くない。見ても見えず、聞いても聞こえないものが見えるとき！」

局所凸 Hausdorff 位相線形空間におけるコンパクト凸図形 K の端点の存在とその端点によってその凸図形が生成される事を主張する Krein-Milman の定理を御存じでしょうか。この定理はとても強力な定理です。簡単な例で説明しましょう。例えば、Euclid 平面上の有界閉な凸図形の境界で辺の内部に属さない点が凸図形の端点です。この場合凸多角形の端点は全ての頂点です。円なら境界上のすべての点です。すると、直感的に明らかなように、端点の凸結合によって全ての内部の点が表示できます。この直感の一般化が Krein-Milman の定理です。この一般化に際して稜や面は face と呼ばれます。この定理の雛型は古典的な Minkowsky の定理と呼ばれる美しい結果です。

関数解析の基礎の講座でこの定理を取り上げた時のことです。私は Hausdorff という条件をケロッと忘れてどんどん証明を始めました。証明の方法は K 上の閉 face 全体が包含順序について帰納的順序集合をなす事を示し、極大元が唯一点からなる face であることを言えばよいのですが、一人の出席者から「あれ Krein-Milman の定理って Hausdorff という仮定が要りませんでしたか？」という疑問が出されて「そうですねあれどこに Hausdorff を使ったのだろう」と、あせって調べる羽目になりました？なんと極大元の存在を示すまではこの仮定は不要で最後にこの極大 face が唯一点からなることを示す所で Hahn-Banach の分離定理を適用するところで使われることが分かりました。すると Hausdorff という条件をおとして何が証明できるのか？あるいは異なる方法で、この命題を Hausdorff 性無しで示せないのだろうか？

問いの手がかりを得るために、試しに非 Hausdorff 局所凸空間の易しい例を作ってみると、我々がコンパクト凸と直感的に思う全てのタイプの凸集合の端点の存在が Krein-Milman の方法ではとらえられぬこと、逆に適用できる例は極めて限定されたあまり面白くないタイプであることが、全くあきらかな絵になって見えるではありませんか！また Hausdorff という条件をおとした定理は確かに作れますが、この例を見ると、解像度の悪い貧しい定理にしかならないことが分かります。

Hausdorff の条件が落ちた途端、幾何学的な性質あるいは代数的な性質が位相でコントロールできなくなるということは知っているはずなのに＿＿。別に自慢ができるようなことではありませんが、先日のへまがなければ決して見ることの無かった世界が見えたのです。数学は首尾一貫してそのなかを歩くとその世界をよく知っているような気がしますが、いたるところに未見の世界が潜んでいます。見ても見えず聞いても聞こえずとはよく言ったものです。そして、自明ではない世界を一つでも、見つけると理論の足元が確かになるだけでなく、いかに豊かになる事でしょうか。改めて実感した次第です。

2016 年 9 月　数学工房　桑野耕一

秋学期講座案内

2016年
9月～12月

駒込に移って以来、年に２、３回は開いていたガイタンスを人手の問題もあって開く余力がなくなり、数学工房の講座全般の解説をする機会があまりないように思います。そこで、この場を借り

て講座の概略を紹介いたします。数学工房の講座は、各領域の数学的な結果を百科事典的に紹介して楽しんでもらうようにはできていません。どちらかというと、現代数学の各テーマに自力で取り組むための基礎素養をつけてもらうことを基本にしています。講座のレベルは、基本的に入門、初級、中級に分かれていますが、今回は入門講座について説明することにします。

◆ IF1-3 「数学の基本語彙と文法」:
集合、写像、集合族、Zorn の補題と選択公理、濃度の比較定理と応用、フィルタ、同値類と商空間等を数学の記述という実用的立場から取り扱います。
◆ IA 「入門 解析教程」:
無限小解析から 18 世紀解析学の考え方を経て 19 世紀解析学の現代につながる厳密化がなぜ始まったかを探り、現在の解析学のスタイルの理解の助けとします。
◆ IA' 「初級 解析教程」:
数直線の公理的基礎付けから始まり古典的 Fourier 級数論の概略と応用までを扱います。各種関数のクラスの代数語を用いた明確な記述と、実解析関数の精密な取り扱いが特徴です。
(※ IA と IA' は交代で開講しています。今年度は IA を開講しています。)
◆ ID 「初等線型代数・多変量の微積分・多次元空間」:
最初の学期 I で n 次元実数空間の初等線型代数から始めて、アフィン空間や凸図形の幾何学を扱います。II で n 次元体積形式、n 次対称群の表現と符号から始めて、体積形式の積分、重要な関数の積分を扱い、III ではまず、2 次形式の基本的な性質、特に表現定理、対称多重線形形式をまとめた後 C^1 級関数と連続微分、グラージェント、C^2 級関数と対称有界双線形形式、ヘッセ形式、極値問題と 2 階微分、固有値問題、多重対称線形形式と高階微分、微分のテンソル表現、多変数の剰余付 Taylor 公式に至ります。全体として座標フリーの方法と双対の積極的な応用が特徴です。
(※ 2016 年度、ID は都合でお休みです。)

他にも入門を示す'I' が講座名の頭につくものがありますが、例外的な場合を除いては、かなり高度な専門分野の入門です。2016 年度でいうと IB「複素関数論」、IC「環の表現」等がその例で、解析や代数、一般位相の基礎知識を十分に持っている方が対象です。次号では数学工房の初級以上の講座について説明いたしましょう。

秋学期スケジュール

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	入門解析教程 2	9 月 25 日 (日)	入門
IB	複素関数論	9 月 17 日 (土)	初級
IC	環の表現論 2	9 月 25 日 (日)	初級・中級
IE	Fourier 解析 2	9 月 18 日 (日)	初級
IG	確率論の数学的枠組み	11 月 5 日 (土)	入門
G	抽象線型代数特論	9 月 18 日 (日)	初級
MA	関数解析概論 IV	11 月 6 日 (日)	初級・中級
MB	作用素環と C^* 代数 II	10 月 30 日 (日)	中級

入門

◆ IA 入門 解析教程 2

(1) 解析関数 II
  1) 逆関数の概念と自然対数関数
  2) 指数関数べき乗関数
  3) 複素化
(2) 微積分の基本定理と若干の帰結

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
9/25、10/9、10/23、11/6、11/20、12/4

◆ IG 確率論の数学的枠組み

(1) 演習 基本的な分布
(2) 他変量の特性量
  1) 分散共分散行列
  2) 高次モーメント
  3) 正準相関

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
11/5、11/19、12/3

初級

◆ IB 複素関数論

(1) 大域的 Cauchy 理論 II
  1) まとめ
  2) Residue の理論と応用
(2) 孤立特異点
  1) 孤立特異点、極
  2) 有限主要部を持つ Laurent 級数
  3) 真性特異点
(3) 有理型関数
  1) 有理型関数の代数

2) 基本定理

(変則日程 14:00–18:00)
9/17、10/1、10/22

◆ G 抽象線型代数特論

(1) 最大原理
(2) 対象変換の順序
(3) スペクトル分解と Functional Calculus
(4) 特異値、特異ベクトル

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
9/18、10/2、10/16

初級・中級

◆ IC 環の表現論 2

(0) 多元環の表現、記号、定義、基本概念
(1) 表現の正則表現への帰着
(2) 原始イデアル
  1) 孤立特異点、極
  2) 有限主要部を持つ Laurent 級数
  3) 真性特異点
(3) 根基

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
9/25、10/9、10/23

◆ IE Fourier 解析 2 L^p 理論

(1) L^p 空間　概略
(2) L^p 上の Fourier 級数
(3) L^2 理論
(4) L^1 上の接合積代数と Fourier 級数

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
9/18、10/2、10/16、10/30、11/13、11/27

◆ MA 関数解析概論 IV
局所コンパクト空間上の Radon 測度と Riesz の定理

(0) 複素測度
(1) Radon-Nikodym の定理
(2) Radon 測度
(3) Riesz-Markov-Kakutani の表現定理

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
11/6、11/20、12/3

中級

◆ MB 作用素環と C^* 代数 II

(1) C^* 代数の定義と例、基本的性質
(2) Gelfand の定理とその帰結
(3) C^* 環の正元

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
10/30、11/13、11/27

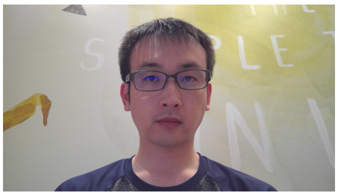
講座料について
各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目￥12,000(学割 ￥9,000)、3 回目￥10,000(学割 ￥9,000) です。
・4 回講座は、1 回目￥10,000(学割 ￥9,000)、2 回目以降￥8,000/回 (学割 ￥6,000/ 回）です。
・6 回講座は、1 回目￥6,500(学割 ￥6,000)、2 回目以降￥5,500/回 (学割 ￥4,000/回）です。

会員からのメッセージ

◆自己紹介
数学工房会員の砂子和正と申します。現在は栃木県に在住し、プログラマーとして自動車関連の仕事を主にしています。車載ワイヤーハーネスの専用 CAD、3DCAD の拡張機能、CAE のプリポスト処理を主に開発してきました。C#が得意な言語ですが、業務では C++ や VBA も使います。
◆数学工房との関わり
初めて数学工房の講座を受講したのは大学生の頃になります。当時は東京理科大学の理工学部・電気電子情報工学科に所属していました。学科の授業で電気回路の理論を習うことになるわけですが、当然それらは数式で記述されています。「この数式をより理解すれば、電気回路を理解できるのでは？」と考え数学を学習する方法を模索していたところ、数学工房を発見したわけです。
線型代数や微積分の講座を受講したと記憶してますが、数学科でもなかったためどこまで理解できたかは正直自信がありません。しかし、大学以外で専門的な知識を学習したのは良い経験になったと思います。当初の電気回路の理解が達成できたかは不明瞭ですが、事情により転居を余儀なくされたため 2 年間程度の受講後は数学工房との関わりはなくなりました。
◆仕事と数学
それから大学を卒業して、地元静岡県で就職しました。冒頭の自己紹介のように自動車関連のソフトウェア開発が主な業務となります。仕事を続けていくと、担当案件と密接に関連する数学の領域があることに気付きます。車載ワイヤーハーネスの専用 CAD ではグラフ理論、3DCAD の拡張

機能では計算幾何学、CAE のプリポスト処理ではフーリエ変換と偏微分方程式がという具合に恐らくこの領域が基礎になるだろうというものがあります。また会社でも機械学習や DeepLearning 等のキーワードも頻出するようになり、より一層数学との関わりが深くなるような気がしています。当然、1 つの案件に割ける時間は限られるため基礎からの理解等は望むまでもありません。大半の状況では開発する機能に関わるアルゴリズムが分かればよいため、理論等はさらっと読む程度になります。

◆数学に期待すること



数年程前に仕事の都合で勤務先が栃木県の自動車関連会社となりました。上述した計算幾何学の専門書を眺めながら、学生時代に講座を受講した数学工房のことを思いだしました。「基礎的な学習を十分に行なえば将来の仕事に対応できるのでは?」と考え、再度数学を学ぼうと数学工房にやってきた次第です。

プログラマーとして働き様々な案件に関わってきましたが、最終的な成果物よりも開発時の基礎理論やツールにばかり関心がいきます。これは案件そのものが自分で選択したものではないことも一因としてあるのかもしれません。仕事に活かすまで数学を学ぶのはどのくらいかかるは分かりません。理解したとしてどのように現在の仕事に活かすかもまだ見えません。しかし、開発時に遭遇する現象と数学の領域が噛み合えば理解に費やす時間は減らせると考えています。

◆結び

このメッセージを執筆していて、どうも数学に対する自分の目的は漠然としていると改めて思いました。学生時代から数学に対してソフトウェア開発でよく言う銀の弾丸を求めているだけなのではないかと自問自答することがあります。もし機会があれば、数学工房の会員の方々の仕事と数学の関わりを聞くことができたらと考えております。ではこれにて。

入門　桑野道場　（第32回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//

前回の問題

1. 複素数平面上に点 z をとり，3 点 $1, z, z^2$ を頂点とする三角形が鋭角三角形になるための z の条件を求め，複素数平面上に図示せよ．
2. (a) $0 < r < 1$ となる任意の実数 r をとる．非負整数 n に対して

$$f_n(x) := \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu x^\nu \,,\ f(x) := \frac{1}{1+x} \ (x \in [-r, r])$$

とする．
このとき関数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ は閉区間 $[-r, r]$ 上一様収束することを示せ．
（すなわち，$\|f_n - f\|_{[-r,r]} := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [-r, r]\} \to 0 \,(n \to \infty)$ を示せ．）

(b) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^\nu$ $(\, x \in (-1, 1)\,)$ を示せ．

(c) $|\log(1+x) - x| \leq \dfrac{|x|^2}{2(1-|x|)}$ $(\, x \in (-1, 1)\,)$ を示せ．

解答

1. まず方針を述べる．
複素数 $w(\neq 0)$ に対して $w = |w|e^{i\theta}$ と書ける．ここで $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
複素数平面上で w の絶対値 $|w|$ は原点 O と w の距離であり，w の偏角 θ は正の実軸と半直線 Oz との角（反時計回りは正，時計回りは負）である．
偏角 θ が鋭角 $\Leftrightarrow -\pi/2 < \theta < \pi/2$ かつ $\theta \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(w) > 0$ かつ $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ である．

したがって，3 点 $1, z. z^2$ を頂点とする三角形が鋭角三角形である条件を求めるには $\dfrac{z^2-1}{z-1}, \dfrac{1-z}{z^2-z}, \dfrac{z-z^2}{1-z^2}$ の実部がそれぞれ正になる条件と虚部がそれぞれ 0 にならない条件を見ればよい．
条件より $z \neq 0, z \neq 1, z \neq -1$ が成立する．また Re, Im は実線型であることに注意する．
$\dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1$ より $0 < \mathrm{Re}(z+1) = \mathrm{Re}(z)+1$ かつ $\mathrm{Im}(z+1) = \mathrm{Im}(z) \neq 0$．すなわち

$$\mathrm{Re}(z) > -1 \text{ かつ } \mathrm{Im}(z) \neq 0 \tag{1}$$

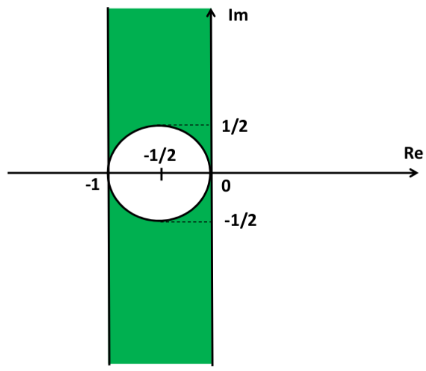
$\dfrac{1-z}{z^2-z} = -\dfrac{1}{z} = \dfrac{-\bar{z}}{|z|^2}$ より $0 < \mathrm{Re}(-\bar{z}) = -\mathrm{Re}(\bar{z}) = -\mathrm{Re}(z)$ かつ $\mathrm{Im}(-\bar{z}) = \mathrm{Im}(z) \neq 0$．よって

$$\mathrm{Re}(z) < 0 \text{ かつ } \mathrm{Im}(z) \neq 0 \tag{2}$$

$\dfrac{z-z^2}{1-z^2} = \dfrac{z}{1+z} = \dfrac{|z|^2+\bar{z}}{|1+z|^2}$ より $\mathrm{Re}(|z|^2+\bar{z}) = |z|^2+(z+\bar{z})/2 = |z+1|^2 - \dfrac{1}{4} > 0$．また $\mathrm{Im}(|z|^2+\bar{z}) = \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z) \neq 0$．したがって

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \text{ かつ } \mathrm{Im}(z) \neq 0 \tag{3}$$

以上まとめると，$-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$ かつ $\left|z+\dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ ——（答え）



zの範囲は図の色を付けた部分、ただし境界線を除く。

2.（a）$|f_n(x)-f(x)| = \left|\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu x^\nu - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} - \frac{1}{1+x}\right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{|1+x|} \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \leq \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$ $(x \in [-r,r])$．したがって $\|f_n - f\|_{[-r,r]} := \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in [-r,r]\} \leq \dfrac{r^{n+1}}{1-r} \to 0\,(n \to \infty)$．よって関数列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ は閉区間 $[-r,r]$ 上一様収束する．

（b）$f_n(t) =: \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t^\nu$, $f(t) =: \dfrac{1}{1+t}$ $(t \in [-|x|,|x|])$ とする．$x \in (-1,1)$ に注意．

$$\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t^\nu dt = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \int_0^x t^\nu dt = \sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu}.$$

また $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \log(1+x)$.

したがって，$\left|\log(1+x) - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(-1)^{\nu-1}x^\nu}{\nu}\right| = \left|\int_0^x\left(\frac{1}{1+t} - \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t^\nu\right)dt\right|$

$$\le \int_0^x \left| \frac{1}{1+t} - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu t^\nu \right| |dt| \le \int_0^x \|f - f_n\|_{[-|x|,|x|]} |dt|$$
$$= |x| \|f - f_n\|_{[-|x|,|x|]} \to 0 \, (n \to \infty).$$

よって，$\log(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^\nu \ (\, x \in (-1,1)\,).$

(c) $|\log(1+x) - x| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^\nu - x \right| = \left| \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} x^\nu \right| \le \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|x|^\nu}{\nu} \le \frac{|x|^2}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |x|^\nu \le \frac{|x|^2}{2(1-|x|)} \ (\, x \in (-1,1)\,)$

解説

1. 高校生にたずねられた問題です。解答には余弦定理を使うやり方が出ていたそうですが、複素数の特性が活かされていません．また、私の知人で全ての点を実 2 次元の成分で表示して cos を計算している人がいました．これも複素数の特性が活かされていないだけでなく、大変な計算です．実部が正でかつ虚部が 0 でないことの条件をかいてみれば比較的容易な問題でした（もっとも制限時間内でこのことに気づくのは至難の業なのですが・・・）
2. ベキ級数の基本的な評価のやり方です．十分に味わってください．

今回の問題

1. m を 1 でない正整数とするとき $5^m + 11$ は 2 のベキで表すことはできない．すなわち，m, n を正整数とする方程式 $2^n = 5^m + 11$ は $(m,n) = (1,4)$ 以外の解を持たない．
2. m を 2 でない正整数とするとき $5^m + 7$ は 2 のベキで表すことはできない．すなわち，m, n を正整数とする方程式 $2^n = 5^m + 7$ は $(m,n) = (2,5)$ 以外の解を持たない．

それぞれ正しいことを証明するか、間違いであること（反例を出す等）を証明してください．

問題について一言

これもある高校生が考えていた問題から派生した問題です．じつはこの問題はまだ解決されていません．m や n が小さいところで PC で計算をしてみました（n が 3000 程度)．しかしながら反例はまだ見つかっておりません．なかなか手強そうな問題ですが、皆様の挑戦をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2016 年 12 月 31 日（土)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2016 年 9 月 12 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401