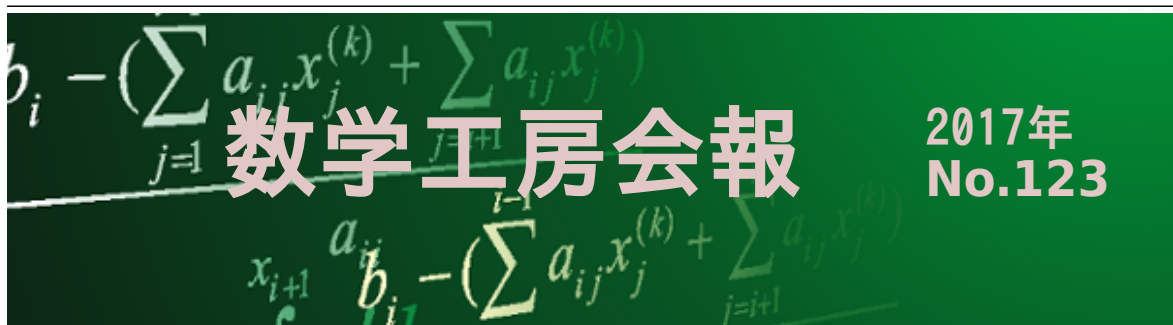




数学工房会報

2017年
No.123

巻 頭 言

例年の事です、春学期が終わると同時に、泥縄式に次の年度の計画をあたふたと立てることになります。とはいっても、2、3日は久しぶりに世の中の事を忘れてあれがやりたいな、あれはできるかな？などと夢に耽っていました。学期中は目先の事に追われて全般の事を考える時間は案外ないものです。

ところで、本来、数学工房は数学の基礎教程の型の学びを通して数学の専門的技能を伸ばす事を目的にして誕生しました。どのような高度な数学をやるにせよ、それ以前の問題として、図形感覚、論理感覚、等式感覚、不等式感覚といったものが、萌芽として十分に育っている事が大切です。良質な初等、中等教育が重要である理由です。感覚養成の補いとして、かつては専門的数学以前の数学力養成にも力を入れていたような気がします。入門2、初級2、中級1講座ぐらいで入門以前のセミナーが結構充実していたのですが、そのうち基礎コースの稽古だけだと飽きてしまうので、厳格な型稽古の講座のほかに、サービスとして、あまり素養をうるさく言わない専門分野の入門講座を開設しました。それがいつの間にか増殖して、今は専門性の高い講座が主流になっています。古くからの会員の中には昔は今より敷居が低く、楽しくて良かったという方も結構いらっしゃると思います。今の形になったのはそれなりの事情と必然性があるので元の形になることはありませんが、今年度から原点に戻って、数学の基礎感覚を養う講座を少しずつ復活したいと思います。

さて、年度初めなので、今年度の講座の説明を簡単にします。今年度も前年度に続き解析中心のプログラムです。初級解析教程は、数直線の捉え方から始まり、Fourier 解析の古典論までを含んでいます。 C^r 級関数や実解析関数の体系的な扱いが特徴で、全般に構造的で代数的、位相的に厳密な形になっています。演習問題を兼ねて歴史のノートもつけようと計画しています。初等線型代数と微積分は多次元の微積分の入門編で長年改良を重ねながら使ってきたものですが、今期から積分を改定し充実させる予定です。前年度に続いての函数解析概論は現代の解析の各専門分野の基礎素養としての Banach 空間上の解析学です。基礎編 Banach 空間と Banach 空間の双対、Banach 空間上の作用素、Banach 空間上の微積分、作用素の解析学、Dunford 積分もどこかでやりたいと思っています。

Fourier 解析は前年度の続きで、入門 Fourier 解析はいくつかの重要な Topics を楽しんでもから、一変数緩増加超関数の Fourier 変換を取り扱います。中級 Fourier 解析は、テスト関数から始まり緩増加超関数の Fourier 変換、開集合上の超関数へと進んでいきます。教科書第3章の超関数の核定理や合成積あたりまでを目標にしています。 C^* 代数と作用素代数は、正值作用素、Gelfand-Naimark の定理までで C^* 代数の一般論を終え、作用素の各論は集中で取り扱います。続きは C^* 代数の表現論と von Neumann 環の基礎までを考えています。一般位相は、基礎編 I、II、III と発展編 I、II、III の形に再編成しました。位相はまるで観光地の温泉旅館のように増改築を繰り返すうちに、大部のものになってしまったので、多くの領域で使われる最低限の内容を扱う基礎編と、各種位相を生成したり、何種類もの位相を同時に扱うような、主に函数解析で組織的に用いられるような部分を分離して発展編にする予定です。基礎編は距離空間の基礎、位相空間、連続写像、コンパクト、連結、完備性、Baire のカテゴリー、発展編は位相の比較、上限位相、下限位相、直積位相 フィルタ、ネット、一様位相等を含みます。代数系の講座は、冒頭で述べた数学の基礎感覚を養う講座の第1段として、栗田勇先生のテキストを参考にして式感覚の養成を主眼にした講座を開講します。今後はこういう講座を継続的に企画したいと思っています。数学の基本語彙と文法は、受講ご希望の方の人数が少ないので今年度から随時受け付けとします。日程は御希望の方との相談になります。それでは今年度も数学の充実した学びをお楽しみください。

2017 年の初夏に 数学工房 桑野耕一

夏学期講座案内

2017年
5月～8月

夏学期スケジュール

5/21、6/4、6/18、7/2、7/16、7/30

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	初級解析教程	5月21日(日)	入門
IB	複素関数論(基礎編)	5月21日(日)	初・中級
IC	線型数学演習 I	5月28日(日)	初級・中級
ID	多次元空間、微積分と初等線型代数(改訂版)	7月9日(日)	入門
IE	Fourier 解析 II	5月28日(日)	初・中級
EA	一般位相(基礎編) I	5月27日(土)	初級
MA	関数解析概論	7月1日(土)	初・中級
MB	C^* 代数と作用素環	5月20日(土)	中級
MC	「シュワルツ超関数入門」を読む II	7月2日(日)	中級

入門

◆ IC 線型数学演習 I

- (1) 複素数、複素数平面
 - 1) 複素数
 - 2) 極形式、1 の n 乗根
 - 3) 平面幾何の問題
 - (2) 多項式と代数方程式に続く
- (隔週日曜 3 回 14:00–18:00) 5/28、6/11、6/25

- ◆ ID 多次元空間、微積分と初等線型代数(改訂版)
 *多次元空間から多変数の Taylor 公式、極値の分類まで。
 (隔週日曜 3 回 14:00–18:00) 7/9、7/23、8/6

入門・初級

◆ IA 初等解析教程

- (1) 数直線の捉え方
 - (2) 収束列、収束級数の理論
 - 1) 級数数列の収束の Cauchy 理論
 - 2) 絶対収束級数
 - 3) 級数の収束の仕方の分類
- (隔週日曜 6 回 11:00–13:00)

◆ IB 複素関数論(基礎編)

- (0) 実微分可能性
 - (1) 複素微分可能性
 - (2) 正則関数
 - (3) Wirtinger-Poincaré 算法
- (隔週日曜 3 回 14:00–18:00) 5/21、6/4、6/18

初級

◆ EA 一般位相基礎編 I

- (0) 距離空間の基礎概念 I
 - 1) 距離関数
 - 2) 集合の直径、有界性
 - 3) 点列と点列の収束
 - 4) Cauchy 列と完備性
 - 5) 距離空間の連続写像
- (1) 位相空間の基礎概念 I
 - 1) 開集合系、閉集合系、近傍系
 - 2) 点のトポス
 - 3) 連続写像

(変則土曜 3 回 14:00–18:00) 5/27、6/10、7/8

初級・中級

◆ IE Fourier 解析 II

- (1) Poisson の和公式
- (2) 正型関数
- (3) Fourier 変換の複素化
 - 1) Phragmén-Lindelöf の定理
 - 2) Poisson-Jensen 公式
 - 3) Hardy の定理、その他
 - 4) Paley-Wiener の定理

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
 5/28、6/11、6/25、7/9、7/23、8/6

◆ MA 関数解析概論

*Banach 空間の基本事項から作用素の基本、Banach 空間値の解析学まで
 (隔週土曜 3 回 14:00–18:00) 7/1、7/15、7/29

中級

◆ MB C^* 代数と作用素環

- (1) 正値作用素の例
- (2) 正値作用素から導かれる Hermite 形式

- (3) 正值作用素の基本的性質
(4) Jordan の分解定理

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00) 5/20、6/3、6/17

◆ MC 「シュワルツ超関数入門」を読む II
*緩増加超関数の Fourier 変換から Schwartz の
核定理第 3 章あたりを予定
(隔週日曜 3 回 14:00–18:00) 7/2、7/16、7/30

講座料について

各講座、税込 ¥32,000(学割 ¥25,000) です。
途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目 ¥12,000(学割 ¥9,000)、
3 回目 ¥10,000(学割 ¥9,000) です。
・4 回講座は、1 回目 ¥10,000(学割 ¥9,000)、2
回目以降 ¥8,000/回 (学割 ¥6,000/ 回) です。
・6 回講座は、1 回目 ¥6,500(学割 ¥6,000)、2
回目以降 ¥5,500/回 (学割 ¥4,000/回) です。

会員からのメッセージ

◆自己紹介

会員の青木嘉郎と申します。2015 年の冬季集中セミナーからお世話になっています。職業はゲームプログラマーで、現在は主に Computer Graphics(描画) の分野を担当しています。

近年のゲームには、実写映画のような高いレベルのクオリティが求められており、必要とされる技術がどんどん高度化してきています。アカデミックの分野からも、映画やゲーム向けの様々な技術がたくさん提案されている状況で、例えば世界的な Computer Graphics の学会である Siggraph は、多くのゲーム開発者に注目されています。そのため、私もアカデミックの論文を読む必要に迫られている状況ですが、数学的な内容のものがほとんどで、なかなか理解が進みません。自分の数学的な基礎力が不足していると痛感したことが、数学工房の門を叩くきっかけでした。

◆数学との関わり

業務の中で始めて数学の必要性を感じたのは、Quaternion(四元数) との出会いでした。Quaternion は距離最小での回転補間が行えるので、ゲームの分野では好んで利用されるのですが、具体的な計算はできても、その計算が何を意味しているのかがさっぱり分からなかったのです。その当時、背後に潜んでいる意味が知りたくて、関連書籍を手当たり次第調べましたら、どうやら群論という分野で扱っているものらしいと分かり、関連書籍を読み漁って見たわけです。すると、SU(2)、パウリ行列、リー群……などなど、聞いたこともない概念がズラズラと出てきて、高校数学しか知らなかった私は、数学という分野にはこんなにも知らないことが山のようにあるのかと、面食らったことを覚えています。

その後も業務の中で、データ圧縮に PCA(主成分分析)、直交関数展開、ベイズ統計が必要だったり、Antialiasing(ピクセルの輪郭がギザギザになってしまうのを滑らかにする手法) にフーリエ変換が使われたり、影の輪郭部分を滑らかにする方法として、確率の分野で使われている不等式を利用して影になる確率を求めたりと、数学が至る所で顔を出してきます。さらに、ゲームにはリアルタイム性が求められますので、いかに計算量や使用メモリを少なくしながら高い精度で近似できるか、ということも重要になってきます。

このように業務上で遭遇する様々な難題を解決するための考え方の一つとして、数学が心強い武器になるのではないかと、考えるようになりました。

◆数学工房との関わり

数学工房入会前は、業務で必要な一部分だけを切り取って、そこだけを勉強するような方法をとっていましたが、その一方で、こんなやり方ではまったく応用が利かないと危機感を感じていました。なんとかせねばと専門的な数学書を紐解いてみたこともありましたが、1 ページ目からいきなり定義が始まったかと思えば、蕩々と数式が羅列され、証明無しに「～なのは容易にわかる」などと締めくくられるため、すっかり匙を投げてしまう日々でした。だからといって平易な入門書に目を向けてみても、なんとなく分かったような気はするものの、本質的な理解が抜け落ちているような気がいつもしていました。自分が何が分からないのか分からないというのが、正直なところだったのだと思います。そんな悩みを抱える中、たまたまインターネットで数学工房のホームページを拝見し、思い切って桑野先生に連絡し、入会の運びとなりました。

私は、数学を考える際、頭の中に具体的な絵を浮かべる癖があるのですが、数学工房で学ぶ内容は抽象的な理解力を求められるので、具体的な絵が浮かばず、理解するのにとても時間がかかってしまいます。稽古が足りないが故のことだと思いますので、精進していく所存です。



◆会員の方へのメッセージ

数学をご専門とされている方々には失礼になるかもしれず恐縮ですが、ゲームプログラマの立場としては、数学を応用につなげるという実務的な部分が目標です。(似たような考え方の方もいらっしゃるでしょうか?) 数学には現場の問題を開く力があると信じて、これからも数学を続けていきたいと思っております。授業をご一緒させていただく際は、どうぞよろしくお願いいたします。



入門 桑野道場 (第34回)

//記 桑野道場師範代 半田生久太//



前回の問題

- z と z_0 を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の 2 点とし、 $z \neq 0$ かつ $|z_0| = 1$ を満たすとする。
このとき次のことを示せ。
 - $|z| > 1$ ならば $\left| \frac{z}{|z|} - z_0 \right| < |z - z_0|$.
 - $|z| < 1$ ならば $\left| \frac{z}{|z|} - z_0 \right| > |z - z_0|$.
- $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数 (n は正整数) とし、関数列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ は次の条件を満たすとする。
 - $f_n(x) \geq 0, g_n(x) \geq 0 (x \in \mathbb{R}) n \in \mathbb{N}$.
 - $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx = 1 (n \in \mathbb{N})$.
 - 任意の $\delta > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} f_n(x) dx = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} g_n(x) dx = 0$.
このとき $h_n(x, y) := f_n(x)g_n(y) ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ として $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を定義するとき、
任意の $\delta > 0$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{x^2+y^2} > \delta} h_n(x, y) dx dy = 0$$

解答

1. は熊野充博さんの解答をご紹介します。1.(b) については熊野さんのご指摘通り間違いです。

1. 不等式の両辺を 2 乗した差を考える。便宜上、 $t = 1/|z| (> 0)$ とおく。

$$\begin{aligned} |tz - z_0|^2 - |z - z_0|^2 &= t^2|z|^2 - t(z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + |z_0|^2 - \{|z|^2 - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + |z_0|^2\} \\ &= (t^2 - 1)|z|^2 - (t - 1)(z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) \\ &= (t - 1)\{(t + 1)|z|^2 - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0)\} \end{aligned}$$

$t = 1/|z|$ を代入すると

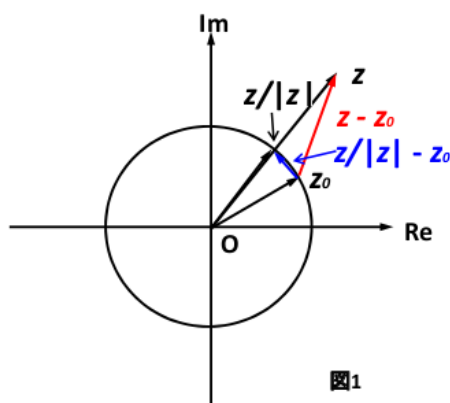
$$= \frac{1 - |z|}{|z|} \{|z|^2 + |z| - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0)\}$$

ここで $w = z\bar{z}_0$ とおくと、 $|w| = |z\bar{z}_0| = |z||z_0| = |z|$ だから、

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - |w|}{|w|} (|w|^2 + |w| - w - \bar{w}) \\ &= \frac{1 - |w|}{|w|} \{(w - 1)(\bar{w} - 1) - 1 + |w|\} \\ &= -\frac{|w| - 1}{|w|} (|w - 1|^2 + |w| - 1). \end{aligned}$$

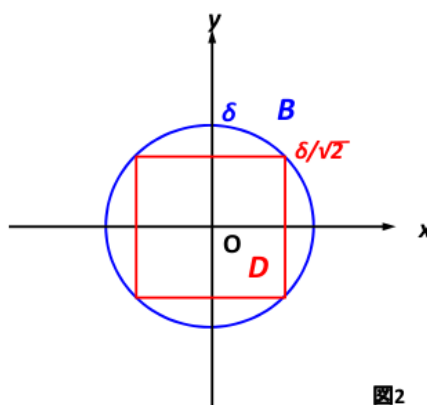
- (a) $|z| = |w| > 1$ のとき, $|w-1|^2 > 0$, $|w|-1 > 0$ より上式から, $|tz-z_0|^2 - |z-z_0|^2 < 0$.
 よって $|tz-z_0| = \left| \frac{z}{|z|} - z_0 \right| < |z-z_0|$.
- (b) $|z| < 1$ のとき次のような反例がある. $z = 1/2$, $z_0 = 1$ とすると, $|z| = 1/2 < 1$ かつ $|z_0| = 1$ であるから,

$$\left| \frac{z}{|z|} - z_0 \right| = 0. \quad |z-z_0| = 1/2. \quad \text{よって} \quad \left| \frac{z}{|z|} - z_0 \right| < |z-z_0|.$$



2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta\}$, $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leq \delta/\sqrt{2}\}$,
 $E_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > \delta\}$, $E_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > \delta\}$ とおくと $D \subset B$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\sqrt{x^2+y^2} > \delta} h_n(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} h_n(x, y) dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D} h_n(x, y) dx dy = \int_{E_1 \cup E_2} h_n(x, y) dx dy \\ &\leq \int_{E_1} h_n(x, y) dx dy + \int_{E_2} h_n(x, y) dx dy \\ &= \int_{|x| > \delta} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g_n(y) dy dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{|y| > \delta} f_n(x) g_n(y) dy dx \\ &= \int_{|x| > \delta} f_n(x) dx \int_{\mathbb{R}} g_n(y) dy + \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \int_{|y| > \delta} g_n(y) dy \\ &= \int_{|x| > \delta} f_n(x) dx + \int_{|y| > \delta} g_n(y) dy \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$



解説

- (a) 図を見ればほとんど明らかそうです。余弦定理での証明も考えられますが、複素数の特性を活かした証明がほしいところです。熊野さんはその部分をうまくやっています。
(b) 熊野さんはもう一つ反例を挙げていましたが、省略します。てっきり成り立つものと思いきや、うかつでした。すみません。
- 積分領域の分割についての問題でした。この問題も次のように錯覚しやすいので注意です。

$$0 \leq \int_{\sqrt{x^2+y^2} > \delta} h_n(x,y) dx dy \leq \int_{E_1} h_n(x,y) dx dy \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

今回の問題

$\mathcal{D} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \text{supp } f \text{ はコンパクト}\}$ とおく。ここで $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 関数全体、 $\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$ を表すものとする。また $\mathbb{R}$ の部分集合 S に対して $\bar{S}$ は S の閉包 (S を含む最小の閉集合) を意味する。さらに $\mathbb{R}$ の部分集合 K がコンパクトとは、 K が有界かつ閉集合のこととする (K 上の任意の点列が K 内に収束部分列を持つと言ってもよい)。
 $\varphi \in \mathcal{D}$ に対して次のように定義する。

$$I(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt, \partial\varphi := \varphi'$$

- $\partial: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ は $\mathbb{R}$ -線型変換である。また $I: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ -線型形式である。
- $\partial\mathcal{D} := \{\partial\varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}\} = \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \theta \in \mathcal{D} \text{ が存在して } \theta' = \varphi\} = \text{Im } \partial$,
 $\ker I := \{\theta \in \mathcal{D} \mid I(\theta) = 0\}$ とする。
 - $\partial\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ の線型部分空間。また $I\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ の線型部分空間。
 - $\partial\mathcal{D} (= \text{Im } \partial) = \ker I$ 。(このとき図式 $\mathcal{D} \xrightarrow{\partial} \mathcal{D} \xrightarrow{I} \mathbb{R}$ は完全系列であると言う)。
 - $\partial: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ は単射。
 - $I: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ は全射。

問題について一言

シュワルツ超関数の講座で扱われた問題です。多数の解答をお待ちしております。

宛先と締切

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com (郵送の場合は数学工房オフィス宛)
締切 2017 年 8 月 31 日 (木)

数学工房 2017 年 6 月 6 日発行
発行人 桑野耕一
編集人 増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話: 042-495-6632
数学工房連絡用携帯: 080-6576-2691
連絡は極力 e-メールをお願いします。
e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail: monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
<http://www.sugakukobo.com/>
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F 202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401