Math.
No. 124
www.sugakukobo.com

会報 2017 年 9 月
数学工房

2017 年 秋 巻 頭 言

数学工房の講座はしばしば非常に抽象的だと言われます。そこで、数学における抽象性とは何か？あるいは人がある数学を学ぶときに抽象的と感じるのはいつか？今回はこのような問題を取り上げようと思います。ソクラテスの弁明ならぬ桑野の弁明です。

さて、これから述べる数学における抽象性には、区別すべき 2 つの段階がある事を始めに申し上げておきます。

一つ目は知的活動としての数学が、もとより持っている抽象性。これは歴史の中にも個人の発展の中にも見ることができます。もう一つは数学の方法、道具としての抽象性で、こちらは 20 世紀初頭に始めて現れた意識的な数学の組織化の原理です。無論両者の間には相互関係があり、後者は前者の成熟の結果生まれたのです。前者を第 1 の抽象性、後者を第 2 の抽象性と呼ぶことにします。

数学工房の講座はもともと後者の立場、第 2 の抽象を道具として使いこなすための、準備を念頭において作ってきたもので、それが数学工房の特色になっています。残念ながらこの辺りの理解は会員の皆さんに十分に行きわたっているとは言えませんが！

まずは順に従って第 1 の抽象から見ていきましょう。

◆ 数学は事の始まりから抽象的である

あれやこれを数えたり、長さや重さ量を比較したりということは前史時代から繰り返された営みであったにちがいありません。この行為が長い年月のうちに成熟して組織的な記述のための原始的な数や量記号が現れた時、既に特定のものを数えたり測ったりすることから言えばかなりの抽象度に立っていると思われます。記号が現れれば、曲がりなりにも算法の原初的形態も可能になってきます。ギリシャのピュタゴラス学派のように自然数全体を考え、素数の概念を作り出し、無限個の素数があることを論証したり、有理数の概念を発見し、無理数の存在まで示すようになるとその抽象の程度は半端ではありません。すでに個別を離れた数の概念が立ち現われています。無論このような数の理解は、当時ほんの一部の人のものに違いありません。いや現在だって個別の数えあげや測定の操作から離れた数の概念を持たない隣人は珍しくありませんね。

もう少し歴史を下りましょう。

数学の歴史の中で直面する対象の理解に大きな困難が生じると、必ずと言ってよいほど同時代人にとって抽象度の高い概念が現れます。少し歴史から拾うと、例えば、文字記号が導入された時、座標概念（空間の量化）の発明、多次元空間、無限小解析（無限の代数）極限概念による解析学の基礎付け（無限小解析の厳密化）さらに、この流れの中で完備性・コンパクト性などの諸概念が解析を展開するための本質的基礎概念として抽出されてくるのです。また、Fourier 級数の研究から集合論がさらに積分の定義が論理化されその中から測度の理念が徐々に表れてきました。

さて、歴史から幾つかの例をあげましたが、しばしば個別の領域で起きた困難の本質を明らかにするために、それ以前に比べると抽象的に感じられる新概念が導入され、既存の理論が明確に表現し直され、新しい枠組みのもとで問題が再度定式化され、解決される。このような過程を数学の歴史は繰り返してきました。ここで現れた新概念はむしろ直面する数学的現象の理解にとってはむしろ具体的といえます。

第 1 の抽象性は森羅万象の法則性を理解する言語の属性といえます。特に数学では抽象と具体は対立するものではないのです。

◆ 人はいつ抽象的と感じるのか？

文字代数、無限小解析、微積分、$\varepsilon-\delta$ 論法、多次元空間等もそれが現れた時、多くの同時代人にとっては恐ろしく抽象的な数学だったに違いありません。時代が違っても平凡な学生にとって、既に微積分の理論は抽象的で、なかなかついていけないもののようですね！

しかし、数学工房の会員の皆さんにとってはきっとこの辺りは抽象的とは感じますまい。理学者・工学者にとっては、座標空間や微積分、ベクトル解析、やテンソル解析は日常的で多分具体的な事でしょう。どこである数学的知識が抽象的と感じるかは、第 1 の抽象性については千差万別です。

ある数学の理論、方法が第 1 の意味で“抽象的”に感じると言うとき、私は新しい方法やスタイルになじみがないために起きる受け手の否定的違和感の事では無いかと考えています。もっと広く一般の個人の数学的概

念の成長の歴史でも同じことが起きますね。「個体発生は系統発生をくりかえす。」というわけです。
　こちらは広い意味の数学教育の問題ですが、現象としては、専門的で高度な数学まで学ぶ人たちに起きる得る事とパラレルです。私が学部の 1 年の時でした。線型代数の演習を担当した講師が指定された抽象線形代数のテキストを呪って、こんな非実用的な趣味的なテキストを書きやがって！と吐き捨てるように言ったのを覚えています。何しろ 1 年生の最初の授業ですから印象的で今でも覚えています。要するに彼にはなじみの無いスタイルでどう教えるか見当がつかぬということなのですが！また、当時 3 世代にわたる幾何の先生がいて年齢の順に ABC としましょう。B 先生は A 先生をあの人は Riemann 多様体が全然わかっていない、ベクトル解析しかできないで幾何の先生をやっているのだ！一番若い C 先生は B 先生について、テンソル計算は御得意だが、Lie 群や Lie 環になると、からっきし駄目だ。抽象的すぎて理解できないそうだよ！この例からも察せられぬように玄人でも同じことなのです。私の所属していた研究室の専門分野の位相線形空間に至っては「そんな抽象的なことばかりやってどうするつもりなのだ！」といろいろな分野の人から言われていました！
　まとめると、数学の第 1 の抽象性は、成長する知的な学問としての必然的な性格であり、数学の第 1 の抽象性は知的かつ技術的学問に共通に付きまとう問題ですが、数学の専門教育と関係する部分については、レベルの移行のための適切な教育がされていれば、かなり補えると確信しています。
　言葉の用法としての「○○は抽象的だ」は、この場合は、新しい概念や方法になじめない、もっと軽い意味では難しく感じるという意味で使われることが多いように思います。
　さて、いよいよ第 2 の抽象と呼んだ数学の抽象性ですが、20 世紀数学の建築術と活用術にかかわることで、第 1 のものが数学とかかわりの無い一般人から玄人までを含む幅広い教育問題であるのに対して、どちらかというと技術的で専門性が高いものです。
　この問題については次号で述べたいと思います。

2017 年 9 月 数学工房　桑野耕一

秋　学　期　講　座　案　内

2017 年 9 月～ 12 月

　2017 年秋学期講座は、入門 3 講座、初級 3 講座、初中級 2 講座、中級 2 講座を開講します。

<< 秋学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	9 月 17 日	初級
I.B	複素関数論	9 月 24 日	初級
I.C	代数演習	11 月 4 日	入門
I.D	微積分と初等線型代数	10 月 14 日	入門
I.E	Fourier 解析	9 月 24 日	初中級
I.F	数学の基本語彙と文法 II	11 月 3 日	入門
E.A	一般位相 (基礎編)	9 月 23 日	初級
M.A	函数解析概論	11 月 5 日	初中級
M.B	C^*-代数の表現	9 月 17 日	中級
M.C	超関数入門を読む	10 月 29 日	中級

◆ I.A　解析教程

　微積分の基礎理論の中心部分に入ります。
（１）連続性
　１）定義と基本的なクラス
　２）連続関数のクラス
　３）連続関数に関する 3 つの大域的定理
　４）関数の極限
（２）微分可能性 I
（３）Riemann 積分と微積分の基本定理
　１）有界関数の積分
　２）微積分の基本定理
（４）関数項の級数
　１）各点収束と一様収束
　9/17 より隔週 6 回 (9/17, 10/1, 10/15, 10/29, 11/12, 11/26)

◆ I.B　複素関数論

　全複素関数論の基礎の要の部分です。
（１）冪級数の基本定理
（２）複素線積分
（３）Cauchy の積分定理・積分公式
　9/24 より隔週 3 回 (9/24, 10/8, 10/22)

◆ I.C　代数演習

　多項式、有理式、代数方程式からの演習で、式感覚を養い、鍛えることを目標にします。
　11/4 より隔週 3 回 (11/4, 11/18, 12/2)

◆ I.D　微積分と初等線型代数

　Euclid 空間の間の線型写像、線型変換の初歩的な基本事項を思い出した後、体積形式と補充概念として、n 重線型形式を導入し、基本図形の有向体積と線型変換の行列式を調べます。
（１）線型写像・線型変換
（２）体積形式と行列式
（３）領域上の積分
（４）Gram 行列式と曲面の体積要素
（５）演習
　10/14 より隔週 3 回 (10/14, 10/28, 11/11)

◆ I.E　Fourier 解析（マイルドな関数と Fourier 変換 I）
Fourier 変換その他の積分変換やポテンシャル論の結果などを見通しよくまとめるには、超関数にもっていくのが自然だと思います。急減少関数・テスト関数について簡単に復習した後、Schwartz 超関数の概略から始めます。
（１）急減少関数・テスト関数
（２）Schwartz 超関数　例と基本事項
（３）緩増加超関数
１）定義、基本的性質
２）構造定理
３）超関数の Fourier 変換
9/24 より隔週 6 回 (9/24, 10/8, 10/22, 11/5, 11/19, 12/3)

◆ I.F　数学の基本語彙と文法 II
（１）Zorn の補題・選択公理
１）Zorn の補題
２）選択公理
（２）集合の濃度
１）集合の対等
２）集合の濃度
（３）無限次元線型空間
11/3 より全 2 回変則日程 (11/3, 11/25)

◆ E.A　一般位相 (基礎編)
実解析の諸問題の解決の必要から始まった点集合論の発展の中心部分からネット、位相の構造その 1 に続きます。
（１）連結性
（２）コンパクト
（３）距離空間における全有界、完備性、コンパクト
（４）コンパクト集合上の連続関数
9/23 より隔週 3 回 (9/23, 10/7, 10/21)

◆ M.A　函数解析概論
（１）連続線型形式と共役空間
（２）ノルム空間のカテゴリーにおける Hahn-Banach の定理とその応用
１）いくつかの基本的応用
２）線型作用素の共役作用素
３）陪双対空間と反射性
（３）弱収束
11/5 より隔週 3 回 (11/5, 11/19, 12/3)

◆ M.B　C^*-代数の表現
指定テキスト第５章に対応します。
ここでは、正線型形式、表現、C^*-代数上の種々のタイプのイデアル達とその相互関係を調べたい。Krein-Milman の定理より純粋状態なる概念が導入され、既約表現と純粋状態が 1 対 1 に対応するのである。また、可換 Banach 代数におけるスペクトルに対応するものとして、原始イデアルの空間が導入される。大まかに言って、既約表現全体の空間と原始イデアルの空間が 1 対 1 に対応するのである。
（１）既約表現と純粋状態
（２）推移理論
（３）C^*-代数の左イデアル
9/17 より隔週 3 回 (9/17, 10/1, 10/15)

◆ M.C　超関数入門を読む
緩増加関数の定義から Paley-Wiener-Schwartz の定理あたりまで、49p-77p を予定しています。
10/29 より隔週 3 回 (10/29, 11/12, 11/26)

[料金]
通常講座
一括払い ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）　２回目以降￥5,500（学割￥4,000）

会員からのメッセージ

今回は逸見昌之さんに寄稿していただきました。

■自己紹介
会員の逸見昌之と申します。私が数学工房に入会したのは 1994 年頃で、数学工房が誕生してまだ間もない時期でした。現在は、統計数理研究所という国の研究機関で統計科学に関する研究を行いながら、総合研究大学院大学という大学院のみの大学教員を兼任して大学院生の指導もしております。数学工房には私が数学科の学部学生の頃からお世話になっており、これまでの人生の中で多大な影響を受けて来ましたので、短い文章ではとても言い尽くせない想いがありますが、私の数学工房との関わりついて紙面の許す限り書かせていただこうと思います。

■数学工房との関わり
私が数学工房に出会ってからの道のりを振り返ると、それはもうただ「感謝」の一言に尽きます。私は少なくとも三度、数学工房に救われており、そのどれかが欠けていても今の私は存在していませんでした。１つ目は、出会いです。私はもともと数学が好きで大学も数学科に入学しましたが、講義の速さと自分の勉強不足で 3 年生になる頃には完全に落ちこぼれていました。そんな時、同級生からの誘いがきっかけで数学工房の教室に足を運びました。最初はただ圧倒されるだけでしたが、何度か数学工房の講座に参加しているうちに、次第に桑野先生の数学のスタイルに引き込まれていき、また数学と向き合う気持ちを取り戻しました。2 つ目は、大学院生の頃

のことです。修士課程では4年生の時に読み始めた多様体論の本を続けて読んでいましたが、勉強をただ漫然と続けてきたせいか研究の目標が見いだせず、新たな指導教官との意思疎通もうまく行かずに心身を病み、休学を余儀なくされました。そこで、桑野先生と当時、数学工房事務局長をされていた大野さんに相談をしたところ、厳しくも暖かく迎えていただき、線型代数の本を用いて個別にセミナーをしていただくことになりました。すると不思議なことに、暗闇の中で途方に暮れていた心の中が次第に明るくなっていき、半年間の休学を経て何とか大学院に復学することができました。数学だけが原因というわけではありませんが、この年は、数学は付き合い方によっては毒薬にも良薬にもなることを身を持って感じた1年でした。3つ目は、「講師科」に所属していた頃のことです。2000年を目前に控えた頃、桑野先生以外に講師を養成するという計画が持ち上がり、数学工房の中に「講師科」が誕生しました。講師科では桑野先生との一対一のセミナーを基本としながら、講師見習いとして数学工房の様々な活動に関わらせてもらいました。しかしながら、本格的に見習い修行を始めてから1年目を過ぎる頃に、桑野先生から「ここで講師を目指すよりも、博士課程に進学して研究者を目指した方がよいのではないか」といった内容の助言を受けることが多くなりました。私は当時、数学工房の講師を目指すという強い気持ちを持っていましたので、もちろん簡単に受け入れることはできず、何度もその助言を退けてしまったのですが、桑野先生は私のことをよくよく考えて助言して下さっていたのでしょう。数学工房の講師を務めるために必要なスキルは非常に高く、確かで豊かな数学力が求められるのは言うに及ばず、数学工房は確立された組織ではなかったので、独り立ちしてそこで生きていくためには、数学工房の精神を損なわずに顧客や市場を開拓する力も求められます。私の当時の力量は遠く及ばず、また、これからそのような力を飛躍的に伸ばす見込みもありませんでした。そのことに気づくには時間がかかりましたが、桑野先生は辛抱強く、私が納得するまで何度も説得して下さいました。今思えば、これは本当に有難いことでした。

■そして現在

　私は現在、統計科学の研究と教育に携わっていますが、そのための基盤の多くは数学工房で培われました。数学については私もアマチュアの1人ですが、仕事の道具としても、趣味としても「楽しむ」気持ちを持ち続けながら一生付き合っていきたいと思っています。「楽しむ」ためには、そのための訓練が必要なわけですが、数学工房は、数学を自分のものとするための本物の稽古ができる数少ない貴重な場所だと思います。私は最近では、基礎から中級までいくつかの講座に参加しておりますが、特に基礎講座では、再勉強をしてみますと新たな気付きを得ることが多く、大変有意義な時間となっています。数学工房は私にとって特別な場所ですので、個人的な思い入れの強い文章になってしまったかも知れませんが、最後に、数学工房が今後も真摯に数学と向き合いたい方々の道しるべであり続けることを願って、筆を置かせて (キーボードを打ち終らせて) いただこうと思います。今後ともよろしくお願いいたします。

写真1：逸見　昌之さん

入門桑野道場（第35回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

（問題に誤記がありました．お詫びして修正します．申し訳ありません．）
$\mathscr{D} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp} f$ はコンパクト $\}$ とおく．ここで $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 級関数全体（前回「C^∞ 関数全体」と誤記），$\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}}$ を表すものとする．また $\mathbb{R}$ の部分集合 S に対して $\bar{S}$ は S の閉包（S を含む最小の閉集合）を意味する．さらに $\mathbb{R}$ の部分集合 K がコンパクトであるとは，K が有界かつ閉集合のこととする（K 上の任意の点列が K 内に収束部分列を持つと言ってもよい）．
$\varphi \in \mathscr{D}$ に対して

$$I(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt \;, \partial\varphi := \varphi'$$

とする．

1. $\partial : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ は $\mathbb{R}$-線型変換である．また $I : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$-線型形式である．
2. $\partial\mathscr{D} := \{\partial\varphi \,|\, \varphi \in \mathscr{D}\} = \{\varphi \in \mathscr{D} \,|\, \theta \in \mathscr{D}$ が存在して$\theta' = \varphi\} = \mathrm{Im}\partial$,

$\mathrm{Ker}I := \{\theta \in \mathscr{D} | I(\theta) = 0\}$ とする．

(a) $\partial\mathscr{D}$ は $\mathscr{D}$ の線型部分空間．
また $\mathrm{Ker}I$(前回「$I\mathscr{D}$」と誤記) は $\mathscr{D}$ の線型部分空間．

(b) $\partial\mathscr{D}(=\mathrm{Im}\partial) = \mathrm{Ker}I$．（このとき図式 $\mathscr{D} \xrightarrow{\partial} \mathscr{D} \xrightarrow{I} \mathbb{R}$ は完全系列であると言う）．

(c) $\partial : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ は単射．

(d) $I : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ は全射．

解答

1.
   - $\partial\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ であること
     $\varphi \in \mathscr{D} \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ より $\partial\varphi = \varphi' \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$．
     よって $\partial\mathscr{D} \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$．
     $\varphi \in \mathscr{D}$ に対して任意の $x_0 \in (\mathrm{supp}\,\varphi)^C$ をとる．$(\mathrm{supp}\,\varphi)^C$ は開集合だから x_0 の近傍 U が存在して $U \subset (\mathrm{supp}\,\varphi)^C$．
     したがって $\varphi(x) = 0\,(x \in U) \Rightarrow \varphi'(x) = 0\,(x \in U) \Rightarrow U \subset (\mathrm{supp}\,\varphi')^C$．
     よって $(\mathrm{supp}\,\varphi)^C \subset (\mathrm{supp}\,\varphi')^C \Rightarrow \mathrm{supp}\,\varphi' \subset \mathrm{supp}\,\varphi$．
     $\mathrm{supp}\,\varphi$ は有界だから $\mathrm{supp}\,\varphi'$ も有界．
     以上のことから $\mathrm{supp}\,\varphi' = \mathrm{supp}\,\partial\varphi$ はコンパクト．したがって $\varphi' = \partial\varphi \in \mathscr{D}$．よって $\partial\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$．
   - ∂ が $\mathbb{R}$-線型であること
     $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \varphi,\psi \in \mathscr{D}$ に対して $\partial(\alpha\varphi+\beta\psi) = (\alpha\varphi+\beta\psi)' = \alpha\varphi'+\beta\psi' = \alpha\partial\varphi+\beta\partial\psi$．よって ∂ は $\mathbb{R}$-線型．
   - I が $\mathbb{R}$-線型であること
     $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \varphi,\psi \in \mathscr{D}$ に対して
     $I(\alpha\varphi+\beta\psi) = \int_{\mathbb{R}}(\alpha\varphi+\beta\psi)(t)dt = \int_{\mathbb{R}}(\alpha\varphi(t)+\beta\psi(t))dt = \alpha\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt + \beta\int_{\mathbb{R}}\psi(t)dt = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$．よって I は $\mathbb{R}$-線型．

2. (a)
   - $\partial\mathscr{D}$ は $\mathscr{D}$ の線型部分空間であること
     $\partial\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ は既に示した．
     $\tilde{0}(x) := 0\,(x \in \mathbb{R})$ とすれば明らかに $\tilde{0} \in \partial\mathscr{D}$．よって $\partial\mathscr{D} \neq \emptyset$．
     $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \varphi',\psi' \in \partial\mathscr{D}\,(\varphi,\psi \in \mathscr{D})$ に対して $\alpha\varphi'+\beta\psi' \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ は明らか．よって $\mathrm{supp}(\alpha\varphi'+\beta\psi')$ がコンパクトであることを言えばよい．
     $(\mathrm{supp}\,\varphi' \cup \mathrm{supp}\,\psi')^C = (\mathrm{supp}\,\varphi')^C \cap (\mathrm{supp}\,\psi')^C \subset (\mathrm{supp}(\alpha\varphi'+\beta\psi'))^C$ であることはすぐわかる．したがって $\mathrm{supp}(\alpha\varphi'+\beta\psi')$ は閉かつ有界，すなわちコンパクト．
     したがって $\alpha\varphi'+\beta\psi' \in \partial\mathscr{D}$．よって $\partial\mathscr{D}$ は $\mathscr{D}$ の線型部分空間．
   - $\mathrm{Ker}I$ は $\mathscr{D}$ の線型部分空間であること
     $\mathrm{Ker}I \subset \mathscr{D}$ は自明．また $\tilde{0} \in \mathrm{Ker}I$ も明らか．
     $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \varphi,\psi \in \mathrm{Ker}I \Rightarrow I(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha I(\varphi)+\beta I(\psi) = 0$．
     よって $\alpha\varphi+\beta\psi \in \mathrm{Ker}I$．したがって $\mathrm{Ker}I$ は $\mathscr{D}$ の線型部分空間．

   (b)
   - $\partial\mathscr{D} \subset \mathrm{Ker}I$ であること
     $\varphi \in \partial\mathscr{D} \Rightarrow \theta$ が存在して $\theta' = \varphi$．$I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}}\theta'(t)dt$．$T > 0$ が存在して $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-T,T)$ だから $\mathrm{supp}(\varphi') \subset \mathrm{supp}(\varphi) \subset (-T,T)$．$\int_{\mathbb{R}}\theta'(t)dt = \int_{-T}^{T}\theta'(t)dt = \theta(T)-\theta(-T) = 0-0 = 0$．よって $I(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \in \mathrm{Ker}I$．以上より $\partial\mathscr{D} \subset \mathrm{Ker}I$．
   - $\mathrm{Ker}I \subset \partial\mathscr{D}$ であること
     $\varphi \in \mathrm{Ker}I$ を任意にとる．$\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-T,T)$ となる $T > 0$ をとっておく．$I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt = \int_{-T}^{T}\varphi(t)dt$ である．$\theta(x) := \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$ とおく．
     $x \leq -T$ ならば $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt = 0$．（$\varphi$ の台に注意！）
     $x > T$ のとき，$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{T}\varphi(t)dt + \int_{T}^{x}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt + \int_{T}^{x}\varphi(t)dt = 0$
     ($\varphi \in \mathrm{Ker}I$(仮定）より第 1 項=0, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (-T,T)$ より第 2 項=0)．したがって $\mathrm{supp}(\theta) \subset [-T,T]$．よって $\theta \in \mathscr{D}$．$\partial\theta = \varphi$ は明らかなので $\varphi \in \partial\mathscr{D}$．したがって $\mathrm{Ker}I \subset \partial\mathscr{D}$．

   以上により $\mathrm{Ker}I = \partial\mathscr{D}$．

   (c) $\theta \in \mathrm{Ker}\partial \Rightarrow \theta' \equiv 0$ in $\mathbb{R} \Rightarrow \theta \equiv \mathrm{const}$ in $\mathbb{R}$．ところが $T > 0$ が存在して $\mathrm{Ker}\theta \subset [-T,T]$．したがって $0 = \theta(T) = \mathrm{const}$．よって $\theta \equiv 0$ in $\mathbb{R}$．したがって $\mathrm{Ker}\partial = \{0\}$．以上により ∂ は単射．

   (d) $\varphi \in \mathscr{D}$ を $\varphi \not\equiv 0$ かつ $\varphi \geq 0$ なる関数とする．$\varphi_0(x) := \varphi(x)/\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt\right)$ $x \in \mathbb{R}$ とおく．ここで $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt > 0$ に注意．$I(\varphi_0) = I(\varphi)/I(\varphi) = 1$．よって，任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $I(c\varphi_0) = cI(\varphi_0) = c$ だから I は確かに全射．

問題について

一般に K を体とし U,V,W を K 上の線型空間，$S:U\to V,T:V\to W$ をそれぞれ線型写像とする．$\mathrm{Im}S=\mathrm{Ker}T$ を満たすとき図式 $U\xrightarrow{S}V\xrightarrow{T}W$ を完全系列と言う．（もう少し条件を弱くして U,V,W をアーベル群 ，$S:U\to V,T:V\to W$ をそれぞれ群準同型写像としてもよい）
完全系列の典型的な例として出題してみました．

今回の問題

(a,b): 開区間，m: 非負整数とし，$B^m((a,b)):=\{f\in C^m((a,b)):\|f^{(k)}\|_{(a,b)}<+\infty, 0\le k\le m\}$ とおく．ここで $C^m((a,b)):=\{f:(a,b)\to\mathbb{C}\,|\,f$ は (a,b) 上 m 階微分可能かつ $f^{(m)}$は (a,b) 上連続 $\}$，$\|f^{(k)}\|_{(a,b)}:=\sup\{|f^{(k)}(x)|:x\in(a,b)\}$ とする．ただし $C^0((a,b)):=\{f:(a,b)\to\mathbb{R}\,|\,f$ は (a,b) 上連続 $\}$ とする．

1. $f(x):=e^{i/x}\,(x\in(0,1))$ とするとき，$f\in B^0((0,1))$ かつ $f\notin B^1((0,1))$ であることを示せ．すなわち $f\in C^0((0,1))$ であることは認めて，$\|f\|_{(0,1)}<+\infty$ かつ $\|f'\|_{(0,1)}=+\infty$ であることを示せ．ただし i は虚数単位を表すものとする．
2. 前問をヒントにして $f\in B^1((0,1))$ かつ $f\notin B^2((0,1))$ となる f を見つけよ．
3. 任意の非負整数 m に対して $B^m((0,1))\supsetneqq B^{m+1}((0,1))$ となることを示せ．
4. (研究問題) 上記の問題を実数値関数の場合に考察せよ．

なお，$B^m((a,b))$ はバナッハ空間として最も重要な例のひとつです．

問題について一言

夏の集中「非有界作用素」で扱われた問題です．解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2017 年 12 月 31 日（日）
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2017 年 9 月 30 日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401