数学工房会報

2018年
No.125

巻　頭　言

会員の皆様、今年も数学工房を宜しくお願い致します。

春学期は秋学期の続きで解析が中心です。2018 年度からは代数系や幾何学系の講座を強化していこうと考えています。例えば抽象線形代数（基礎編）や Lie 群の基礎を含む多様体等の開講を考えています。

さて前号の巻頭言で「数学における抽象について」について話し始めました。張り切って抽象が方法として確立するまでの歴史をこの巻頭言で簡略ながら資料に基づいて考察しようと思ったのですが、まだ 10 年早い！と言われそうな気がしてきました。資料を眺めれば眺めるほど歴史に実際に現れる現象は複雑に入り組んでいて、私の力量では結び目をほどくのが大変で、現時点ではちょっとやそっとのことでは纏まりそうにありません。このような仕事は数学工房を引退してからじっくり時間をかけて取り組むべき問題だと思えてきて、歴史の部分は棚上げにして、抽象の方法についての私の見方を話します。

抽象を方法として使いこなすプロジェクトを最初にはっきり提唱したのは、恐らく Hilbert です。彼の提唱した公理主義はギリシャの幾何学の理論の論理的な枠組みの現代的な再生をもくろんだもので、その思想により数学の知識を再編成しようとしたのです。別に公理的方法そのものは抽象的形態をとる必要はないのですが。

代数は学問の性質上公理主義的な方法と相性が良く、公理化＝抽象化という形の発展が短期間のうちに進展しました。こうして皆さんが、現在数学科の標準教程としておなじみの群、環、体の概略を述べる代数の基礎教程ができてきたわけです。抽象の方法の威力を理論と応用にわたって明確に示したのは von Neumann の抽象 Hilbert 空間とその unitary 同値関係の導入、さらに非可換幾何学としての作用素環の理論の創始、また Banach による膨大な Banach 空間上の線型作用素論であると思います。どちらも集合の一般論、代数、位相、測度論を道具として駆使して、抽象的な公理から出発して膨大な知識を組織的に論じています。膨大な 19 世紀解析学の結果の総合と純粋、応用の多くの新分野への発展、さらに前 2 者に比較すると数学としてはまだ萌芽の段階ですが Wiener の提唱したサイバネテクスなどもこの仲間に加えてもよいかもしれません。この方法のモットーは森羅万象興味深い法則性があれば何事にせよ「数学の研究対象にする」という発想なのです。

抽象の方法の核心は代数化と何らかの表現論です。対象を公理化し、そこに捉えられた関係を代数化する。そこに現れた代数を何らかの表現論によって、具体的計算が可能な豊かな対象に置き換え、さらに理論の対象のより深い性質の解析を可能にする、逆に表現論を通して具体的な応用をより組織的、効率的に深く調べられる。例えば有用な等式や評価が、系統的に導き出せるのです。このような方法の使いこなしのためには、学校で漫然と学んだ数学の知識では役に立ちません。このような数学は第 2 段階以上の数学で、基礎知識を学びつつ其々の理論を可能にする本質的な概念をつかむ訓練をしていかなくてはなりません。個別の結果を証明すること以上に数学的真実を見る目を養うことが肝心の様な気がします。数学工房の教程は基礎的な部分から不十分とは言え、そのような狙いでかなり体系的に作られています。

最後に、抽象の方法はしばしば安直な一般化と混同される事があるので注意しなければなりません。実際にそういう例は少なからず現れました。抽象の方法の創始者 Hilbert が空虚な一般化（leere allgemainheit）と呼んで警告をしています。

それでは今年も数学との実り豊かな関係に一歩、歩みを進めてください。

数学工房　桑野耕一 2018 年 1 月

春学期講座案内　2018年 1月〜4月

春学期スケジュール

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	初級解析教程	1 月 28 日 (日)	入門・初級
IB	複素関数論	1 月 21 日 (日)	初・中級
IC	線形代数演習	3 月 17 日 (土)	入門
ID	初等線型代数と微積分	1 月 27 日 (土)	入門
IE	超関数の Fourier 解析 II	1 月 21 日 (日)	初・中級
IF	同値類と商空間	3 月 10 日 (土)	入門
EA	位相の構造	1 月 20 日 (土)	初級
MA	関数解析概論 Banach 空間の弱位相	3 月 11 日 (日)	初・中級
MB	Von Neumann Algebras I	1 月 28 日 (日)	中級
MC	「シュワルツ超関数入門」を読む IV	3 月 18 日 (日)	中級

入門

◆ IC 線型代数演習
座標系と初等幾何の表現を材料に今学期も感覚を磨きましょう。
(変則土曜日程 14:00–18:00) 3/17、3/31、4/14

◆ ID 初等線型代数と微積分
多変数の微分法を座標フリーの方法で扱います。線型代数の基礎的な理論を振り返りつつ停留値の分類までの基本的理解まで進みます。途中でなぜテンソル場が入ってくるかの理由も明らかになると思います。多変数の解析学に本格的に進む前に基本的なアイデアをつかみましょう。この講座の内容は多様体の理解にも役に立つはずです。

(1) C^1 級関数のクラスとグラージェント
(2) C^2 級関数のクラスと Hessian、Laplacian
(3) C^k 級関数のクラスとテンソル表現
(4) 剰余付 Taylor 公式
(5) 停留値の分類

(変則土曜日程 14:00–18:00) 1/27、2/10、3/3

◆ IF 同値類と商空間
同値類による数学的対象の構成は現代数学の最も基本的な手段です。分数はもとより実関数というような最も基本的な対象ですら同値類を用いて概念形成されるのです。

(1) 同値関係と集合の分割
(2) 群構造に整合する同値関係
(3) 群の作用と軌道空間
(4) 商空間演習

(変則日程 11:00–17:00 昼休みあり) 3/10、3/21

入門・初級

◆ IA 初級解析教程
閉区間上の有界関数の Riemann 積分の定義から始めて、基本的な性質を導く。最も重要な可積分関数のクラスとして連続関数のクラスを導入し微積分の基本定理を示す。この定理により微積分は代数化され、古典解析の大発展の礎になった。微分と積分という 2 大道具がそろったところで関数列、関数項の級数と各点収束と一様収束と基本的な 2 つの関数のクラスの作る Banach 代数を導入する。

(1) Riemann 積分
  1) 可積分の概念と基本的な性質
  2) 微積分の基本定理
(2) 収束のモード
  1) 関数列の各点収束、一様収束
  2) 連続関数環、C^1 級関数の環
(3) 高階導関数と基本的な関数空間
  1) 高階導関数と基本的な性質
  2) C^k 級関数、B^k 級関数の作る関数環

(変則日曜 6 回 11:00–13:00)
1/28、2/11、3/4、3/18、4/1、4/15

初級

◆ EA 位相の構造
位相が用いられる発展的な局面では様々な位相を誘導したり、比較したりすることが起きてくる。あるいは同時に異なる位相を使い分ける等の技術が有用な役割をしばしば果たす。そのような展開のための基礎素養である。

(1) 位相の構造 I
  1) 開集合の基底、近傍の基底
  2) 第 1 可算公理・第 2 可算公理　可分
  3) 完備性・全有界　再論
  4) 直積位相

(2) 位相の構造 II
  1) 位相の強弱
  2) 位相の束
  3) 誘導位相

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00) 1/20、2/3、2/17

初級・中級

◆ IE 超関数の Fourier 解析 II
このタイトルの講座の中心部分です。この講座は後 1 回で完結の予定です。

(1) 緩増加超関数　構造定理
(2) 緩増加超関数と急減少関数の接合積
(3) 緩増加超関数の Fourier 変換

(変則日曜 6 回 11:00–13:00)
1/21、2/4、2/18、3/11、3/25、4/8

◆ MA 関数解析概論 Banach 空間の弱位相
ノルム位相と並んで最も基本的で理論にも応用にも有用な位相に弱位相があります。函数解析の理論に深入りすると多くの重要な場面で弱位相の有用性に出会うことになります。例えば、Banach 空間の双対の単位球が弱位相で閉ということが、Banach 空間や Banach 環の表現定理に根拠を与えます。

(1) 弱位相と汎弱位相
(2) 凸性と弱位相
  1) ノルム閉と弱閉の一致するとき
  2) Banach-Steinhaus の定理
  3) Alaoglu の定理
(3) Bipolar 定理
(4) いくつかの帰結

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00) 3/11、3/25、4/8

中級

◆ MB　Von Neumann Algebras I
von Neumann 代数とは、$L(H)$ の強閉 $*$ 部分代数の事である。秋学期に C^* 表現における重要性はご理解いただけたと思います。von Neumann 代数は射影と相性が良く、例えば表現の像の構造の理解に有用な commutant が von Neumann 代数であると言う事を用いました。

(1) C^* 代数上の行列環
(2) $L(H)$ の強位相と射影代数
(3) Von Neumann 代数
(4) Von Neumann 代数の遺伝的 C^* 部分代数とコンパクト作用素の特徴付け

(変則日曜 3 回 14:00–18:00) 1/28、2/11、3/4

◆ MC 「シュワルツ超関数入門」を読む IV
今学期は、緩増加超関数の Fourier 変換の理論の中心部分です（テキスト 70p-86p)。

(1) 緩増加超関数と急減少関数の convolution
(2) 緩増加超関数の台
(3) Paley-Wiener-Schwartz の定理
(4) 部分 Fourier 変換
(5) 乗法作用素

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00) 3/18、4/1、4/15

講座料について
各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。
途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目￥12,000(学割 ￥9,000)、3 回目￥10,000(学割 ￥9,000) です。
・6 回講座は、1 回目￥6,500(学割 ￥6,000)、2 回目以降￥5,500/回 (学割 ￥4,000/回）です。

会員からのメッセージ

◆入会の動機
初めまして。佐々木潤と申します。気象関連サービスを扱う企業で統計数理モデルの開発を担当しております。気象は、古くからの系統的な観測によって膨大なデータの蓄積があり、データサイエンスとの相性が良い分野です。さらに近年は、新しい気象衛星の導入などにより、データは日々爆発的に増えています。一方で、機会学習をはじめとした解析手法も目覚ましい速度で進歩しており、モデルも高度なものが要求される時代となりました。　当然、統計学に関して最先端の研究 (deep learning や Bayes 等) をフォローする必要があり、関連論文をあたるのですが、なかなか理論の本質が掴めず思い悩む日々が続いています。このまま論文をさらっても頭打ち、時間の浪費、何かを変えねばと一念発起して入会を決意しました。おそらく、数学基礎力がないのが一因だと思うので、初心に戻って基礎から徹底的に勉強するつもりです。
◆数学との関わり
大学時代は物理学科に所属しており、応用数学に加えて抽象数学もそれなりに勉強していました。ただ、洪水のごとく黒板に溢れ返る数式達、こんぱくと、いそうくうかん、るべーぐせきぶん...、論理を必死に追いかけても、結局何の役に立つか分からず、頭に定着する前に忘却の彼方へ。

そして徒労感だけが残る、そんな数学との付き合い方をしていたように思います。でも何故か数学は好きでしたね。物理学を通して間接的に学んだリーマン幾何学やフラクタルなどから数学の面白さ、美しさを肌で感じていたからでしょうか。大学を出て以降は数学を本格的に学ぶ機会は減り、仕事でも初等的な回帰分析を扱う程度でした。今は、数学工房で最先端の数学まで学べると知って子供のようにワクワクしています。

◆受講してみて

実際に受講してみると「錆び付いてるなー」という感覚を強く抱きました。数式による表現、数式の計算など、テクニカルな部分に関しては、古びて錆付いた機械のように頭が上手く動いてくれません。普段から計算ライブラリに頼っていたツケでしょうかね...。でも、久しぶりに数式をいじり回すと、それだけで楽しくなってきます。しかも、手を動かすことで一つ一つの概念が意味を持って脳内に刻み込まれていく感じがして、とても有意義に勉強ができていると実感します。PCによる作業では全く使われない脳の機能があるんだろうなと思いますね。

また、数理構造や抽象概念に対する理解度が学生時代よりも高いことに気付かされます。数学の勉強は長らくサボっていたわけですが、社会経験を積んで具体的な事象に数多く触れてきたことで、抽象概念を理解する土台が帰納的に作られたのだと勝手に解釈しています。

◆今後の展望

現在、仕事では deep learning 等の neural network 系のモデル作成に取り組んでいます。ネットワークの設計は、中間層で情報群をどう抽象化し、利用するかがキーになります。多くの先行研究に触れることも大切ですが、抽象数学を基礎から学び、抽象的な世界を見るセンスを養うことも結構重要ではないかと感じています。授業を通して、その辺りを強化するのが一つの狙いです。

また、neural network 系のモデルは、しばしばブラックボックス型であることが問題となります。気象のような自然科学の世界では、因果律を重視しますので、例えモデルの予測精度が高くとも、答えの理由が判然としないと好まれない傾向にあります。これは、ド素人の妄想に過ぎませんが、多次元の情報ネットワークを多様体とみなして、トポロジカルな解析をすれば、いわば人間の意識に該当する大局的な機能、つまり「モデルの挙動」が抽出され、答えの理由も分かるのではと考えています。果たして、これが見当違いのことなのか、少しでも実現性があるものなのか、講座で学んで見識を深めていきたいです。

◆最後に

先生の講義は、分かりやすく、常に先を見据えた構成になっているため、好奇心を掻き立てられます。末長く続けられそうですので、いつかは研究会等に参加できるレベルまで到達したいですね。また他の方がどのような動機で受講しているかも興味があります。講座でお会いできましたら、色々お話聞かせて頂ければと思います。どうぞ、よろしくお願い致します。

入門　桑野道場　（第36回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//

前回の問題

※問題に関して誤記がありました．申し訳ありません．ここに訂正してお詫びします．

(a,b): 開区間，m: 非負整数とし，$B^m((a,b)) := \{f \in C^m((a,b)) : \|f^{(k)}\|_{(a,b)} < +\infty, 0 \le k \le m\}$ とおく．ここで $C^m((a,b)) := \{f : (a,b) \to \mathbb{C} \,|\, f$ は (a,b) 上 m 階微分可能かつ $f^{(m)}$は (a,b) 上連続 $\}$，$\|f^{(k)}\|_{(a,b)} := \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in (a,b)\}$ とする．ただし $C^0((a,b)) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R} \,|\, f$ は (a,b) 上連続 $\}$ とする．

1. $f(x) := e^{i/x}\ (x \in (0,1))$ とするとき，$f \in B^0((0,1))$ かつ $f \notin B^1((0,1))$ であることを示せ．すなわち $f \in C^0((0,1))$ であることは認めて，$\|f\|_{(0,1)} < +\infty$ かつ $\|f'\|_{(0,1)} = +\infty$ であることを示せ．ただし i は虚数単位を表すものとする．
2. 前問をヒントにして $f \in B^1((0,1))$ かつ $f \notin B^2((0,1))$ となる f を見つけよ．
3. 任意の非負整数 m に対して $B^{m+1}((0,1)) \subsetneq B^m((0,1))$ となることを示せ．（$B^m((0,1)) \subsetneq B^{m+1}((0,1))$ と誤記がありました）
4. (研究問題) 上記の問題を実数値関数の場合に考察せよ．

なお，$B^m((a,b))$ はバナッハ空間として最も重要な例のひとつです．

解答

1. $|f(x)| = |e^{i/x}| = 1\,(x \in (0,1))$ より $\|f\|_{(0,1)} = 1 < +\infty$．よって $f \in B^0((0,1))$．
$f'(x) = -ix^{-2}e^{i/x} = -ix^{-2}f(x)$．したがって $|f'(x)| = x^{-2}|f(x)| = x^{-2}\,(x \in (0,1))$．
よって $|f'(x)| \to +\infty\,(x \to 0)$．したがって $\|f'\|_{(0,1)} = +\infty$．よって $f \notin B^1((0,1))$．
2. $f_1(x) = x^2 f(x) = x^2 e^{i/x}(x \in (0,1))$ とすると f_1 が求めるものである．
実際，$f_1 \in C^\infty((0,1)) \subset C^2((0,1))$ は明らか．
$|f_1(x)| = |x^2 e^{i/x}| = x^2 < 1\,(x \in (0,1))$ より $\|f_1\|_{(0,1)} \le 1 < +\infty$．
$f_1'(x) = 2xf(x) + x^2(-ix^{-2}f(x)) = (2x-i)f(x)$．
よって $|f_1'(x)| = |2x-i||f(x)| = |2x-i| \le 2|x| + 1 \le 3\,(x \in (0,1))$．
したがって $\|f_1'\|_{(0,1)} \le 3 < +\infty$．以上より $f_1 \in B^1((0,1))$．
$f_1''(x) = x^{-2}(2x^2 - 2ix - 1)f(x)$．ここで $q_{1,2}(x) := 2x^2 - 2ix - 1$ とおく．$q_{1,2}$ は多項式関数で $f_1''(x) = x^{-2}q_{1,2}(x)f(x)\,, |q_{1,2}(0)| = 1 \ne 0$．したがって $\delta(0 < \delta < 1)$ が存在して $0 < x < \delta \Rightarrow |q_{1,2}(x)| > 1/2$．ゆえに $|f_1''(x)| = |x^{-2}q_{1,2}(x)f(x)| = x^{-2}|q_{1,2}(x)| > 1/2x^{-2}\,(x \in (0,\delta))$．よって $|f_1''(x)| \to +\infty(x \to 0)$．したがって $\|f_1''\|_{(0,1)} = \infty$．すなわち $f_1 \notin B^2((0,1))$．
3. 任意の非負整数 m に対して $B^{m+1}((0,1)) \subset B^m((0,1))$ は明らかなので $B^{m+1}((0,1)) \ne B^m((0,1))$ を示せばよい．$m=0$ と $m=1$ のときは既に見た．$m \ge 2$ のときを考える．
   - 主張
   $f(x) = e^{i/x}\,(x \in (0,1))$ とおくとき，任意の非負整数 ν に対して $f^{(\nu)}(x) = x^{-2\nu}p_\nu(x)f(x)\,(x \in (0,1))$ が成り立つ．ここで p_ν は多項式関数で $|p_\nu(0)| = 1$．
   - 主張の証明
   微分の階数 ν に関する帰納法で示す．$\nu = 0$ のときは自明．
   $\nu = 1$ のとき $f^{(\nu)}(x) = -ix^{-2}f(x)$．ここで $p_1(0) = -i$ だからよい．
   ν のとき主張は成立すると仮定する．

$$\begin{aligned} f^{(\nu+1)}(x) &= (x^{-2\nu}p_\nu(x)f(x))' \\ &= x^{-2(\nu+1)}(-2\nu x p_\nu(x) + x^2 p_\nu'(x) - ip_\nu(x))f(x) \\ &= x^{-2(\nu+1)}p_{\nu+1}(x)f(x) \end{aligned}$$

   ここで $p_{\nu+1}(x) = -2\nu x p_\nu + x^2 p_\nu'(x) - ip_\nu(x)$ とした．
   $p_{\nu+1}$ は多項式関数で $|p_{\nu+1}(0)| = |-ip_\nu(0)| = 1$．よって $\nu+1$ のときも主張は成立する．□

$f_m(x) = x^{2m}e^{i/x} = x^{2m}f(x)\,(x \in (0,1))$ とおく．
$f_m \in C^\infty((0,1)) \subset C^{m+1}((0,1))$ は明らかである．$f_m \in B^k((0,1))\,(0 \le k \le m)$ かつ $f_m \notin B^{m+1}((0,1))$ を示す．また，関数 g に対して $g^{(k)}$ を $\partial^k g$ または $\partial^k(g)$ と記す．
任意の $k(0 \le k \le m+1)$ に対して $f_m^{(k)}$ を求める．ライプニッツ則により，

$$\begin{aligned} f_m^{(k)}(x) = (\partial^k f_m)(x) = \partial^k(x^{2m}f(x)) &= \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\partial^{k-\nu}x^{2m} \bullet \partial^\nu f(x) \\ &= f(x)\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}[2m : k-\nu]\,x^{2m-k-\nu}p_\nu(x) \quad (x \in (0,1)) \end{aligned}$$

ただし $[2m : k-\nu] := (2m)!/(2m-(k-\nu))! = 2m(2m-1)\cdots(2m-(k-\nu)+1)$．
(a) $0 \le k \le m$ のとき
   $0 \le \nu \le k \le m$ より $2m-k-\nu \ge 0$．よって $q_{m,k}(x) := \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}[2m : k-\nu]\,x^{2m-k-\nu}p_\nu(x)$ とおくと $q_{m,k}$ は多項式関数なので $\|q_{m,k}\|_{(0,1)} < +\infty$．
   ゆえに $|f_m^{(k)}(x)| = |q_{m,k}(x)||f(x)| \le \|q_{m,k}\|_{(0,1)}\,(x \in (0,1))$．したがって $\|f_m^{(k)}\|_{(0,1)} \le \|q_{m,k}\|_{(0,1)} < +\infty$．よって $f_m \in B^m((0,1))$．

（b）$k=m+1$ のとき

$$\begin{aligned} f_m^{(m+1)}(x) &= f(x)\sum_{\nu=0}^{m+1}\binom{m+1}{\nu}[2m:m-\nu+1]\,x^{m-\nu-1}p_\nu(x) \\ &= x^{-2}f(x)\sum_{\nu=0}^{m+1}\binom{m+1}{\nu}[2m:m-\nu+1]\,x^{m-\nu+1}p_\nu(x) \end{aligned}$$

$$q_{m,m+1}(x)=\sum_{\nu=0}^{m+1}\binom{m+1}{\nu}[2m:m-\nu+1]\,x^{m-\nu+1}p_\nu(x) \text{ とおくと}$$

$f_m^{(m+1)}(x)=x^{-2}q_{m,m+1}(x)f(x)\,(x\in(0,1))$．$0\le\nu\le m+1$ より $m-\nu+1\ge 0$．したがって $q_{m,m+1}$ は多項式関数で $|q_{m,m+1}(0)|=|p_{m+1}(0)|=1(\neq 0)$.

よって 2. と同様にして $|f_m^{(m+1)}(x)|\to+\infty(x\to 0)$.

ゆえに $\|f_m^{(m+1)}\|_{(0,1)}=+\infty$．すなわち $f_m\notin B^{m+1}((0,1))$.

以上のことから $B^{m+1}((0,1))\subsetneq B^m((0,1))$.

4. は研究問題です．考えてみて下さい．

問題について

帰納法を用いた方法もあるとは思いますができませんでした．研究してみて下さい．

今回の問題

1. $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ を考える．
   f は $[a,\infty)$ で連続で，かつ (a,∞) で微分可能で，さらに $f'(x)\to l(x\to\infty)$ とする．このとき次を示せ．
   （a）$f(x+1)-f(x)\to l\,(x\to\infty)$.
   （b）$f(x)/x\to l\,(x\to\infty)$.
2. 次の不等式を示せ．
   $t\in\mathbb{R}\,, x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して，$(1+\|x\|^2)^t\le 2^{|t|}(1+\|y\|^2)^t(1+\|x-y\|^2)^{|t|}$
   ただし，$x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\xi_i^2}$ とする．

問題について一言

1. は解析教程で扱われた問題です．
2. は数学工房の Fourier 解析の講座でセミノルムの評価に使われている有名な不等式です．

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com (郵送の場合は数学工房オフィスまで)
締切　2018 年 3 月 31 日（土）

数学工房　2018 年 2 月 12 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401