Math.
No. 126
www.sugakukobo.com

会報 2018 年 5 月
数学工房

2018 年 夏 巻 頭 言

素振り 3 年という言葉があります。推察されるようにこれは昔の剣術修行の厳しさを表した言葉です。入門した弟子は初め素振りばかりやらされ、師匠が形になってきたことを認めて「よし！１本目を」となって初めて入門の型の稽古が許されたと聞いています。3 年たっても声がかからない場合は、剣術はあきらめて他の道へ進みなさいとなったそうです。

これはある藩の剣術師範の家に伝わる話です。今風に言えば、剣術エリート養成教育です。

一時代前のオーソドックスな理学部数学科は、意図的かどうかは分かりませんが、昔の道場と似た雰囲気が色濃く残っていました。

ところで、この話の示唆するところはもう一つあって、高度な技芸を学ぶ際の基本稽古の難しさです。そもそも入門者はこれからやることを十分に知らないし動きが見えないのですから、手ほどきだけで一見単純に見える基本素振りの動作を正しく認識し行うのは、極めて大変です。

時代も違い、対象も違うわけですが、高度な専門的技芸を習得するという点で「始まりの難しさ、基本稽古の難しさ」は数学の専門教育でも同じだと思います。

その上、沢山の数学教師や、高度な数学を使いこなすユーザーが必要とされる現代社会では、当然、往時の基準では平凡でも、数学の教育、研究、に携わる人材の養成が必要になったわけです。しかしその状況に見合う、高等数学の専門家養成のための理にかなった教程というものが未だあるようには思えません。

小中高と積み上げてきたはずの数学はあくまでも一般向で現代数学の型と作法とは、大きなギャップがあります。知らず知らずのうち子供の時から修練を積み重ねてしまった才能のある一握りの人を除いては基本の型から丁寧に組み立てなおさねばなりません。数学工房の骨組みの原型は、行きがかりで、専門分野の基礎数学を教えなくてはならぬことになったとき、困ってしまい微積分や線形代数、解析学の基礎を自分で土台から作り直したときにできました。

現在の数学の基本語彙と文法、解析教程　抽象線形代数（基礎編）一般位相（基礎編）は現代数学入門のための基本素振りと入門型稽古として作ったものが発展したものです。実のところ多くの人が　この水準の数学を漫然と学んでしまってちゃんと習得していません。困難なのは、剣術の場合と同様極めて原理的なことだからです。学び方によっては数学の作法、記述法、作り方を身に着けるための稽古の体系として用いられます。それまでの数学というものに持っていた漠とした思い込みを一度リセットして、あらためて学びつつ意味を問わなければならないのです。この作業は入門段階で終わるわけではなくその後の発展的な基礎数学、例えば、幾何学、多様体、表現論　関数解析などを学びつつ意識的に意味を問い、学んだ基礎を身体化して始めて、基本素振りと入門の型の本当の意味が見えて来ます。長年つまずいている方を見てきましたが、かなりの割合の人が内容以前、扱っている対象を理解するための基本的な作法ができていないために既に定義、概念の理解手前で引っかかっています。内容の困難さにより足踏みしたり、行ったり来たりするのは当然の事で、構わないのですが、中身と関係のないところで引っかかっている人も少なくありません。型と作法が身についていないためにおこる現象です。基礎的な部分の学びを、ある程度数学の力がついたところで、意識的に徹底的にやり直すのが効果的で、その上結果として自分用の手入れの行き届いた道具箱を持つことになるので決して無駄にはならないのです。たとえ非凡でなくとも数学の世界と良い関係を築くためにチャレンジしてみてください！

2018 年 5 月 数学工房　桑野耕一

夏学期講座案内

2018年5月〜8月

2018年夏学期講座は、入門2講座、初級入門1講座、初級3講座、初・中級1講座、中級2講座を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	5月20日	入門
I.B	複素数関数論の基礎	5月20日	入門
I.C	群と表現	7月7日	初級入門
G	抽象線型代数 (基礎編 I)	5月27日	初級
E.A	一様位相	6月30日	初級
E.C	多様体の基礎理論 I	5月27日	初級
M.A	関数解析概論	7月8日	初・中級
M.B	von Neumann 代数 II	5月26日	中級
M.C	Schwartz 超関数 I	7月1日	中級

◆ I.A　解析教程
5/20 より隔週 6 回 (5/20, 6/3, 6/17, 7/1, 7/15, 7/29)
（1） C^k 級関数のクラス
（2） 関数の級数
（3） 冪級数と実解析関数

◆ I.B　複素関数論の基礎　大域 Cauchy 理論
5/20 より隔週 3 回 (5/20, 6/3, 6/17)
＜1＞ 複素対数関数、正則対数関数
＜2＞ Index 関数、Cauchy 関数
（1） 閉曲線に対する指数
（2） 大域 Cauchy 理論の主定理
（3） 道の代数化　ホモロジー
＜3＞ Residue 理論

◆ I.C　群と表現
7/7 より隔週 3 回 (7/7, 7/21, 8/4)
（1） 群と群準同型
（2） 群の作用
（3） 群と関連する代数構造

◆ G　抽象線型代数（基礎編 I）線型空間と基礎モデル
5/27 より隔週 6 回 (5/27, 6/10, 6/24, 7/7, 7/21, 8/4)
（1） 線型空間の公理とその直接の帰結
（2） 線型部分空間
（3） 線型独立、従属、基底、次元
（4） 基礎モデル

◆ E.A　一様位相
6/30 より隔週 3 回 (6/30, 7/14, 6/28)
一様空間は擬距離の族で定義される位相空間で局所凸空間を含みます。関数解析では最も自然に出現するものです。ここでは完備性、全有界、等連続などの役割が自然に一般化されます。この機会に関数解析の一般論や各論にしばしば現れ、しかも理解しにくいこれらの基礎概念と帰結を整理する機会にご活用ください。
（1） 擬距離空間と一様位相
（2） 完備性
（3） 全有界とコンパクト
（4） Baire 空間
（5） 同程度連続

◆ E.C　多様体の基礎理論 I
5/27 より隔週 3 回 (5/27, 6/10, 6/24)
（1） 可微分多様体の概念
（2） 多様体の可微分写像、関数
（3） 接空間と自然基底
（4） 関数、写像の微分と部分多様体

◆ M.A　関数解析概論　Duality
7/8 より隔週 3 回 (7/8, 7/22, 8/5)
＜1＞ Dual System
（1） Duality より定まる弱位相
＜2＞ 極集合と位相
（1） 極位相
（2） 位相
（3） 等連続性の特徴づけ
（4） Bipolar Theorem

◆ M.B　von Neumann 代数 II
5/26 より隔週 3 回 (5/26, 6/9, 6/24)
＜1＞ von Nuemann 代数の構造と正射影
（1） Introduction
（2） von Nuemann 代数の構造
（3） C^* 代数の作用と von Nuemann 代数
（4） いくつかの応用
＜2＞ 弱位相、超弱位相
（1） Introduction コンパクト作用素のトレースクラス

◆ M.C　Schwartz 超関数 I
教科書 pp.87〜111
Schwartz 超関数を通して、解析に現れる各種関数のクラス、測度、種々の汎関数などの世界の統一的な眺めを楽しみにしてください。2 章とは基本的な部分は独立なので関数解析の素養のある方なら中途参加可能です。
＜1＞ 超関数の定義と構造
（1） 開集合上の超関数
（2） Radon 測度
（3） 位相有限の超関数
＜2＞ 超関数の局所構造

（１） 張り合わせの原理
（２） コンパクト台を持つ超関数
（３） 超関数の局所構造

[料金]
通常講座
一括払い ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）　２回目以降￥5,500（学割￥4,000）

会　員　か　ら　の　メ　ッ　セ　ー　ジ

今回は応用数理の基礎数学研究会の開講 100 回を記念しまして、研究会のメンバーそれぞれから近況や研究会についての感想などを報告していただきます。

写真１：研究会のみなさん

■研究会世話人：田中英輝さん
本研究会は 2009 年３月７日に第１回が開催され、以後月１回のペースで実施されています。2018 年２月には 100 回目の研究会を迎え、区切りのよいこの機会に、研究会の紹介と参加者のメッセージを紹介したいと思います。研究会では逸見昌之さんのご指導の元「数理統計学　稲垣宣生　裳華房」の輪講を行なっています。スピードより理解に重点を置く方針で進め、2018 年１月現在、約 300 ページ中の 265 ページにたどり着いたところです。私自身は統計と密接に関わる情報工学の研究に携わっているため、この本はまさに読みたい一冊でした。しかし実際に研究会で読み始めると、高度な数学の知識を暗に仮定した部分が所々に顔を出していることが分かり、独力で理解するのは難しかっただろうと思います。仲間と一緒に読み進める本会は貴重な機会となっています。

■逸見昌之さん
私は統計科学の研究を生業としていることから、本研究会のアドバイザーを務めさせていただいております。ただ、私は大学等で統計学の講義は一切受けたことがなく、統計学に関する基礎的なことも全て独学で学びましたので、私が教えるというのではなく、初心に戻って私も一緒に勉強させていただいています。統計学の概念や手法は数学の言葉を用いて書かれていますが、理論的なことに触れられている本であっても、技巧的な行列計算を行うなどして数学の使われ方には無頓着な傾向があるように感じます。本研究会では、微積分と線型代数を中心としながら、時には測度論にまで踏み込んで、数学が使われているその構造ができるだけ明確になるように、議論も積み重ねています。

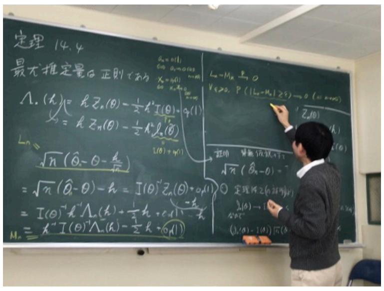

写真２：研究会の様子

■江草文子さん
後半になってきて、これまで聞いたこともないようなことが増えてきましたが、桑野先生の講座で勉強した線型代数や位相が証明で使われることがあり、あ〜こうやって使うのかとそれらの効用を感じることができて、統計学の面白さだけでなく、抽象数学のおもしろさも感じられるようになった今日この頃です。自分の分担は大変ですが、逸見さんやみなさんに助けていただき、自分で発表することでとてもよい学びになっています。

■白鳥茂男さん
もう 100 回なんですね。独学ではとてもできないような本の精読ですが、熱心な仲間の存在と、逸見さんのサポートでここまで来れました。ありがとうございます。受け身の授業ではなかなか身につかないことでも、この研究会で自分が担当部分を考えたり調べたりすると、よく解り記憶にも残ります。また逸見さんからはテキストには書いていないような幾何学的な意味など説明していただけるので、さらに理解が深まります。本当は担当部分と同じ熱心さで他の部分にも取り組めたら良いのですが、それはなかなか実行できていません (笑)。なお逸見さんにはお忙しい中、無償でご指導を戴いています。いつも感謝しております。

■半田伊久太さん
確率・統計は数学の中でも特に苦手でしたので、少

しでも統計をわかりたいと思い研究会に参加させていただいております。現在、数理統計の理論的なことを数学的にやっているわけですが、統計で使われている数学や統計から派生していく数学にも興味がありますので、いろいろな数学に踏み込んでやってくれるこの研究会は大変有意義です。以前、ネイマン-ピアソンの定理から派生して、ある種のベール関数が存在するということを（テキストから少し離れて）2 回にわたってやらせていただいたことが印象に残っています (後で桑野先生よりもっと定性的に証明できることをご教授いただきました)。このようにある程度自由にやらせてもらえるという大らかさも魅力的です。これからもよろしくお願いします。

■坂口尚文さん

各種社会調査の分析をしている仕事柄、比較的高度な統計手法をコンピューター上で扱ってはいますが、その中身は私にとってブラックボックスです。当初は仕事の役に立てばくらいの軽い気持ちで参加したのですが、研究会は統計学の土台となる基礎を丁寧に扱ったものでした。会を通して自分は基礎が全然分かっていないことを毎回、痛感させられ、教科書にさらりと書いてある一字一句がいかに深く重要であるかを認識させられています。独学や講義では難しい恥をかきながら学ぶ環境にありがたさを感じつつ、10 年近く学び続けることができたのは参加者の皆さんからのアドバイスや議論によるところが大きいです。まだまだ途半ばの身ですが、10 年前を振り返ると、見える風景が違ってきたなあと実感しています。

入門桑野道場（第 37 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

1. $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ を考える．
   f は $[a,\infty)$ で連続で，かつ (a,∞) で微分可能で，さらに $f'(x)\to l(x\to\infty)$ とする．このとき次を示せ．
   (a) $f(x+1)-f(x)\to l\,(x\to\infty)$.
   (b) $f(x)/x\to l\,(x\to\infty)$.
2. 次の不等式を示せ．
   $t\in\mathbb{R}\,, x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して，$(1+\|x\|^2)^t\le 2^{|t|}(1+\|y\|^2)^t(1+\|x-y\|^2)^{|t|}$
   ただし，$x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\xi_i^2}$ とする．

解答

山口県下関市の会員、熊野充博さんより解答をいただきましたので紹介します。

1. (a) 平均値の定理から，$f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(\xi)=f'(\xi)\,(x<\xi<x+1)$ となる ξ が存在する．よって $x\to\infty$ のとき $\xi\to\infty$ だから
   $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=l$.
   (b) 任意の $x\in[a,\infty)$ をとり、固定する．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して
   $f(x+1)-f(x)=l_1\,, f(x+2)-f(x+1)=l_2\,,\ldots, f(x+n)-f(x+n-1)=l_n$ とおく．辺々加えると $f(n+n)=f(x)+(l_1+l_2+\cdots+l_n)$．したがって

$$\frac{f(x+n)}{x+n}=\frac{f(x)}{x+n}+\frac{\sum_{i=1}^n l_i}{x+n}=\frac{f(x)}{x/n+1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{x/n+1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n}.$$

   よって $X=x+n$ とおくと

$$\lim_{X\to\infty}\frac{f(X)}{X}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{x+n}=\frac{f(x)}{1}\times 0+1\cdot l=l.$$

   ここで (a) より $n\to\infty$ のとき $l_n\to l$ だから周知の極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n l_n/n=l$ を用いた．
   ゆえに $f(x)/x$ は $[a,\infty)$ で連続かつ有限確定だから ($a>0$ としてよい)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l.$$

2. 証明する不等式を $(*)$ とする．

$(*)$ は $t=0$ のとき明らかに成り立つ．
$t>0$ のとき

$$(1+\|x\|^2)^t \leq 2^t(1+\|y\|^2)^t(1+\|x-y\|^2)^t \tag{1}$$

$t<0$ のときは x と y が入れかわるだけだから，結局 (1) を示せばよい．
さらに，ベキ関数 $f(t)=x^t\ (x>0\,,t>0)$ は単調増加なので (1) は次と同値．

$$1+\|x\|^2 < 2(1+\|y\|^2)(1+\|x-y\|^2) \tag{2}$$

記号の簡略化のため，$x-y=z$ とおくと $x=y+z$ だから，

$$1+\|y+z\|^2 < 2(1+\|y\|^2)(1+\|z\|^2) \tag{3}$$

を示せばよい $(y\,,z\in\mathbb{R}^n)$．(3) において

$$\begin{aligned}\text{右辺}-\text{左辺} &= 2(1+\|y\|^2+\|z\|^2+\|y\|^2\|z\|^2)-1-(\|y\|^2+\|z\|^2+2\langle y,z\rangle)\\ &= 1+\|y\|^2+\|z\|^2+2\|y\|^2\|z\|^2-2\langle y,z\rangle\end{aligned}$$

ただし $\langle y,z\rangle$ は y と z の $\mathbb{R}^n$ における標準内積を表す．ここでコーシー-シュワルツの不等式から $\|y\|\|z\|\geq\langle y,z\rangle$ 及び相加・相乗平均の不等式から

$$\begin{aligned}&\geq 1+2\sqrt{\|y\|^2\|z\|^2}-2\langle y,z\rangle+2\|y\|^2\|z\|^2\\ &= 1+2(\|y\|\|z\|-\langle y,z\rangle)+2\|y\|^2\|z\|^2\\ &\geq 1+2\|y\|^2\|z\|^2>0\end{aligned}$$

解説

1. 熊野さんは (a) を平均値の定理を用いて，いとも簡単に示しています．
   また (b) の解答でもっと一般に次のことを示しています．
   「$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ を考える．f は $[a,\infty)$ で連続で $f(x+1)-f(x)\to l\ (x\to\infty)$ が成立するならば $f(x)/x\to l\ (x\to\infty)$」．つまり，$f$ の (a,∞) における微分可能性は使っていません．また、問題 1 は平均値定理の代わりに微積分学の基本定理を使っても示すことができます．
2. 熊野さんは効率よく証明されています．

今回の問題

1. n を正整数とし $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^n$ とする．ここで $a_1,a_2,\ldots,a_n$ は縦ベクトル，$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ を実 n 次正方行列と見て，行列式 $\det(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ を考える．
   このとき以下の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ が存在することを示せ．

   $$\det(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\langle a_1,f_1\rangle\langle a_2,f_2\rangle\ldots\langle a_n,f_n\rangle$$

   ただし，$\langle,\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ における標準内積を表す．
2. $K(\subset\mathbb{R}^n)$ をコンパクト凸とするとき，
   $\mathrm{H}_K(y):=\sup\{\langle x,y\rangle\,|\,x\in K\}\ (y\in\mathbb{R}^n)$ として $\mathrm{H}_K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を定義する．
   ただし K がコンパクトであるとは K が有界閉集合のことであり，$\langle\,,\,\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ における標準内積のこととする．
   このとき $K,K_1,K_2\subset\mathbb{R}^n$ をコンパクト凸，$y\in\mathbb{R}^n$ とするとき，以下を示せ．
   (a) $\mathrm{H}_K(y)<+\infty$.
   (b) $K_1+K_2:=\{x_1+x_2|x_1\in X_1\,,x_2\in X_2\}$ もコンパクト凸．
   (c) $\mathrm{H}_{K_1+K_2}(y)=\mathrm{H}_{K_1}(y)+\mathrm{H}_{K_2}(y)$.
   (d) $K_1\subset K_2$ ならば $\mathrm{H}_{K_1}(y)\leq\mathrm{H}_{K_2}(y)$.

問題について一言

1. は集中「Gram 行列の幾何と曲面上の積分」の問題から派生したものです．
2. は関数論およびフーリエ解析の講座で取り上げた問題です．

皆様の解答をお持ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2018 年 8 月 31 日（金）
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2018 年 5 月 26 日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401