数学工房会報

2018年
No.127

巻　頭　言

数学工房では、「数学の基本語彙と文法」から作用素環にいたるまで、基礎数学の学びと稽古の場を長年にわたって提供してきました。しかしながら、抽象の使いこなしの復仇は日暮れて道遠しです。表の知識は伝わるように見えても、その背後にあるセンスを教えることは実に難しいと感じています。抽象を使いこなすためにはセンスが必要です。これは、ご自身の興味のある数学の分野、或いは日頃かかわっている専門分野に関連する数学を材料に一人稽古により養うほかありません。そうは言っても、「自分達は素人なのだから、何をしていいかがわからない！無責任なことを言うな」と怒られそうですね。

今年の夏は、集中セミナーの企画のこともあって、こんな事を鬱々と考えていました。何か良い切り口のヒントはないかなと、数学セミナーをぱらぱらとめくっていたら、「33 の素敵な数学小景」（徳永典瑛訳　日本評論社）というタイトルの本が目に入りました。副題は、「フイボナチ数、タイル張り、アルゴリズムを線形代数で眺めてみると」というものです。著者はイジイ・マトウジュクという方で、チェコの数学者で離散幾何学とその理論計算機科学への応用が専門だそうです。著者の言によれば、「著者の専門分野での最も目覚ましいもののほとんどは確率論と合わせて、線形代数の応用がある。」とのこと。百万の味方を得た思いで、夏休みの楽しみにと早速、取り寄せて読んでみました。この本では組み合わせ論、グラフ理論、計算理論等への応用を扱っています。幾何学的不変量に帰着させることがポイントなので、抽象線形代数が十分に身についていれば簡単な計算のみ、あるいは計算なしでもできると思います。問題の理解にそれほど手間がかからないので、上に述べたような一人稽古や、線形代数の基礎知識がちゃんとしているかどうかの理解度チェックにも手頃だと思います。また、解法が鮮やかなので頭の刺激にもなるでしょう！本書はお勧めです。

早速、今回の夏の集中セミナー「線形代数の様々な応用」で試してみることにして、線形写像のランク、正値対称変換、Gram 行列、行列表示の意味、環係数の行列の準同型と det の意味の理解に資する問題を準備しました。参加者の皆さんは、楽しみながら線形代数の強力さを感じていただけたでしょうか？また、線形代数の基本概念における理解の穴は悟られたでしょうか？今後の集中セミナーでは、このようなテーマの演習を増やしていきたいと考えています。

数学工房　桑野耕一

秋学期講座案内　2018年 9月～12月

秋学期スケジュール
入門・初級 2 講座、初級 4 講座、初・中級 2 講座、中級 1 講座。また希望者があれば IF 無限の作法を臨時に開講します.

講座料について
各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。
途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目￥12,000(学割 ￥9,000)、3 回目￥10,000(学割 ￥9,000) です。
・6 回講座は、1 回目￥6,500(学割 ￥6,000)、2 回目以降￥5,500/回 (学割 ￥4,000/回）です。

略号	講座名	講座開始日	レベル
IA	解析教程	9 月 30 日 (日)	入門・初級
IB	Residue 定理とその応用	9 月 23 日 (日)	入門・初級
IC	位相群の表現	11 月 3 日 (土)	初級
EA	一般位相 II	9 月 22 日 (土)	初級
EC	多様体の基礎理論 II	9 月 30 日 (日)	初級
G	抽象線型代数（基礎編 II）	9 月 23 日 (日)	初級
MA	関数解析概論 Banach 環	11 月 11 日 (日)	初・中級
MB	Von Neumann Algebras III	10 月 13 日 (土)	中級
MC	「シュワルツ超関数入門」を読む VI	11 月 4 日 (日)	初・中級

入門・初級

◆ IA 解析教程

古典解析は、実解析関数の理論とその応用と言ってもよいでしょう。前回の一般論を受けて今回は初等超越関数と解析的微分方程式を主に取り扱います。

<0> 実解析関数のまとめ
<1> 初等超越関数
<2> 定数係数の常微分方程式
<3> 常微分方程式

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
9/30、10/14、10/28、11/11、11/25、12/9

◆ IB Residue 定理とその応用

夏学期は、Global Cauchy 理論の概略を論じました。今学期は、Residue 理論とその応用の基本を扱います。

<1> Residue 理論
　(1) 定義と基本的な性質
　(2) Residule 定理
<2> Residue 定理の応用
　(1) 零点と極の数え上げ
　(2) Rouché の定理

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
9/23、10/7、10/21

初級

◆ IC 位相群の表現

表現論の基礎から始めます。線型代数の概念構成の仕方と、一般位相の基礎知識をお持ちの方なら、新規開講講座ですので参加しやすいと思います。

<0> 準備の章
<1> 位相群の表現

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
11/3、11/17、12/1

◆ EA 一般位相 II

夏学期に一様位相の基礎的な概念と結果を一通り取り扱いました。今回は一様空間の完備化から始め、しばしば実際的にも有用な関数族の相対コンパクトの特徴づけをします。

(1) 完備性と完備化
(2) 全有界とコンパクト集合
(3) Baire Category 定理
(4) 同程度連続、同程度一様連続
(5) 連続写像空間の各種一様位相
(6) Ascoli-Arzelá の定理

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00) 9/22、10/6、10/20

◆ EC 多様体の基礎理論 II

前回は、接空間、多様体間の可微分写像まで扱いました。今学期は、多様体という現象が生じる場のより詳しい検討です。 次学期はテンソルと外積代数に入る予定です。

<0> 位相からの注意
<1> ベクトル場と微分作用素
<2> 1 パラメータ群

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
10/14、10/28、12/8

◆ G 抽象線型代数（基礎編 II）

線型代数の概念構成の枠組みと諸結果は、初等的な部分だけでも有用であることはよく知られています。この講座の材料を選ぶにあたって念頭においたのは、抽象線型代数の枠組みが有用な様々な分野、例えば多様体、表現論、関数解析学、そしていくつかの著しい応用分野です。ここで学ぶことは、様々な世界に姿を変えて有用な、理解の道具として現れるのを見ることができるでしょう。

<1> 線型写像の一般論
<2> 線型形式と双対空間
<3> 直和と商空間
<4> 線型変換と線型変換の自己準同型環
<5> 多項式の作用と最小多項式
<6> 射影変換と内部直和
<7> 行列表現

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
9/23、10/7、10/21、11/18、12/2

初級・中級

◆ MA 関数解析概論 Banach 環

純粋および応用において極めて有用な基礎理

論です。初歩から丁寧にやりますので、微積分、線型代数、一般位相、Banach 空間とその双対（特に Hahn-Banach の定理の使い方）の基礎的な部分が理解できる方なら参加できます。いわゆる解析だけでなく表現論の基礎知識としても学んでおかれると宜しいかと思います。

<1> 定義と基本的な性質
<2> Banach 環の位相について基本的な結果
<3> Index Group 指数写像
<4> 可換 Banach 環
(1) スペクトルとリゾルベント
(2) Maximal ideal space
(3) Gelfond 変換

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
11/11、11/25、12/9

◆ MC 「シュワルツ超関数入門」を読む IV
今学期は、超関数の局所性と貼り合わせから始めます。超関数が正に解析的対象であることが示されるわけです。それを用いると超関数の局所構造がきまります。後半は超関数の列、級数についての基本的な性質および超関数のテンソル積です。
* テキスト :『シュワルツ超関数入門』（垣田高夫著、日本評論社）（p.111-p.140）

<1> 超関数の局所構造
(1) 1 の分解と貼り合わせ
(2) コンパクト台を持つ超関数の特徴づけ
(3) 構造定理
(4) コンパクト台を持つ超関数の表現定理
<2> 超関数の列の収束
<3> 超関数のテンソル積

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
11/4、11/18、12/2

中級

◆ MB Von Neumann Algebras III
先ず、Hilbert 空間の trace class の作用素のイデアルを調べ、H 上の有界線型作用素環がその双対になることを示します。したがって $L(H)$ 上にこの双対に対する弱位相が定義されます。この局所凸位相を超弱位相といいます。しかもこの事実は、von Neumann 代数の重要な特徴付け : V.N.A はある Banach 空間の双対であることを示唆します。
今学期は 3 つの TVS 位相の関係論じた後、この結果が必要であることを示します。逆は我々の段階では取り上げられません。これは Sakai の結果です。

<1> Hilbert 空間上の trace class と trace class の双対としての $L(H)$
<2> $L(H)$ の弱位相と超弱位相
<3> Von Neumann 代数の弱位相による特徴づけ
<4> Pre-dual による von Neumann 代数の特徴づけ

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
10/13、10/27、11/10

会員からのメッセージ

会員の深谷将世（ふかや しょうせい）さんにメッセージを寄せてもらいました。

I 不諦
大学での数学に落ちこぼれたのは、かれこれ 40 年ほど前になろうか、そのことが後の人生に少なからず影響を与えている。大学入試に再び合格し、今度こそしっかり勉強しようと決意する、しかし、会社もあるし家族もいる、どうしたら良いのだろうかと苦悩する、そんな悪夢に襲われる。独学で勉強しようと思い立ち、数物の教科書を収集する。どの本も同じ所で分からなくなる、それで段ボールが一杯になる、この繰り返しである。それでも諦められない自分が居た。

II 発端
収集図書で、とりわけのもの、それが量子力学の数学的基礎（J. ノイマン）である。「理論物理学を学ぶものが一度は熟読しなければならない」の湯川秀樹博士による序文に発奮したはいいが、手も足も出なかった。さらに、数学 30 講シリーズ（志賀浩二）に啓蒙されて、この古典が関数解析の発端と知る。いつしか、関数解析を穂高連峰になぞらえて、登頂を目指すようになる。

III 琴線
10 年程前、会社上司に「深谷さんは朝永論文を読めるのだから数学ができる、だから、LCA をやってほしい」と言われた。LCA とは地球温暖化の原因となる二酸化炭素の排出量を計算する環境部門の評価法である。もとより、「数学ができる」は新しい仕事に従事させるためのリップサービスであったのだが、その一言が琴線に触れた。数学を勉強したいとの思いが再燃する。独学ではダメなことは分かっている、誰か人に教わらなければ... 幸いインターネットで、都内に大人のた

めの数学教室があるのを知る。大げさだが、清水の舞台から飛び降り思いで門を叩いた。そこでは2012-2017 年まで計 3 人の講師からルベーグ積分と関数解析を受講した。

IV 稽古

それから半年後、数学工房に入会させていただく。早いもので 1 年になろうとしている。現在は、自分に合ったレベルを題材に稽古に励んでいる。入門・初級コースでは講義の合間に練習問題が出される。これが手も足も出ない。先生が歩いて来られてノートをご覧になる。小生は下を向いて、考えているふりをする。苦し紛れに、何か書いてみる、すると「全く変なことをやっている」とお叱りを頂戴する。仮に自分が師匠だったら、この弟子は即座に破門であろう、先生は寛容で patient である。不思議な体験もしている、どなたかも会報で書いておられたが、今まで読めなかったルベグ積分入門（吉田洋一）が読めるようになってくる。謦咳に接する効果といっても間違いはなかろう。そうそう、言い忘れる所であった。いつしか例の悪夢からは解放されたようだ。

V 将来

来年に定年を迎える。退社後は数学を教える仕事をしたい。できれば、落ちこぼれの大学生と共に勉強したい。若い頃の自分に向き合いたい、そんなことを夢見て稽古に精進したい。

【プロフィール】

1959 年　長野県長野市に生まれる

1978 年　長野高校卒業

1985 年　東京大学農学部林産学科卒業／三井東圧化学（現　三井化学）入社

2018 年　現在に至る

入門　桑野道場　（第38回）

//記　桑野道場師範代　半田生久太//

前回の問題

1. n を正整数とし $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ とする．ここで $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は縦ベクトル，$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を実 n 次正方行列と見て，行列式 $\det(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を考える．
このとき以下の条件を満たす $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が存在することを示せ．

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \langle a_1, f_1\rangle\langle a_2, f_2\rangle \ldots \langle a_n, f_n\rangle$$

ただし，$\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ における標準内積を表す．

2. $K(\subset \mathbb{R}^n)$ をコンパクト凸とするとき，
$\mathrm{H}_K(y) := \sup\{\langle x, y\rangle \,|\, x \in K\}\ (y \in \mathbb{R}^n)$ として $\mathrm{H}_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定義する．
ただし K がコンパクトであるとは K が有界閉集合のことであり，$\langle\, ,\, \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ における標準内積のこととする．
このとき $K, K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト凸，$y \in \mathbb{R}^n$ とするとき，以下を示せ．
（a）$\mathrm{H}_K(y) < +\infty$.
（b）$K_1 + K_2 := \{x_1 + x_2 | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ もコンパクト凸.
（c）$\mathrm{H}_{K_1+K_2}(y) = \mathrm{H}_{K_1}(y) + \mathrm{H}_{K_2}(y)$.
（d）$K_1 \subset K_2$ ならば $\mathrm{H}_{K_1}(y) \le \mathrm{H}_{K_2}(y)$.

解答

1. （a）$\{a_1, \ldots, a_n\}$ が $\mathbb{R}-$ 線型従属のとき

$\det(a_1, \ldots, a_n) = 0$ が成立する．
一方，$V := \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ とおくと，V は $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}-$ 線型部分空間で $V \subsetneqq \mathbb{R}^n$．よって V の直交補空間を $V^\perp$ とすると $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$(直交直和) かつ $\{\mathbf{0}\} \subsetneqq V^\perp$．$V^\perp$ の正規直交基底を $\{f_1, \ldots, f_r\}$，V の正規直交基底を $\{f_{r+1}, \ldots, f_n\}$ とすると $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底．しかも $a_1 \in V$ かつ $f_1 \in V^\perp$．よって $\langle a_1, f_1 \rangle = 0$．以上により $\langle a_1, f_1 \rangle \ldots \langle a_n, f_n \rangle = 0$.

(b) $\{a_1, \ldots, a_n\}$ が $\mathbb{R}-$ 線型独立のとき
(ただし $n = 1$ のときは明らかなので，$n \geq 2$ のときを考える)

$$\begin{cases} f_1 := a_1 / \|a_1\| \\ f_j := (a_j - \sum_{\nu=1}^{j-1} \langle a_j, f_\nu \rangle f_\nu) / \|a_j - \sum_{\nu=1}^{j-1} \langle a_j, f_\nu \rangle f_\nu\| \, (2 \leq j \leq n) \end{cases}$$

とする．
$\{f_1, \ldots, f_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることは，いわゆるグラム-シュミット (Gram-Schmidt) の直交化法によって $\{a_1, \ldots, a_n\}$ から作られているの明らかである．また各 $j (1 \leq j \leq n)$ に対して $a_j \in \mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_j)$．ここで $\mathrm{Span}(f_1, \ldots, f_j)$ は $f_1, \ldots, f_j$ で生成される $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}-$ 線型部分空間である．
よって $a_j = \sum_{\nu=1}^{\mathrm{j}} \langle a_j, f_\nu \rangle f_\nu \, (1 \leq j \leq n)$．したがって

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \det \left(\sum_{\nu_1=1}^{1} \langle a_1, f_{\nu_1} \rangle f_{\nu_1} , \sum_{\nu_2=1}^{2} \langle a_2, f_{\nu_2} \rangle f_{\nu_2} , \ldots , \sum_{\nu_n=1}^{n} \langle a_n, f_{\nu_n} \rangle f_{\nu_n} \right)$$
$$= \sum_{\nu_1=1}^{1} \sum_{\nu_2=1}^{2} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{n} \langle a_1, f_{\nu_1} \rangle \langle a_2, f_{\nu_2} \rangle \ldots \langle a_n, f_{\nu_n} \rangle \det(f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_n})$$
$$= \langle a_1, f_1 \rangle \langle a_2, f_2 \rangle \ldots \langle a_n, f_n \rangle \det(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底だから $\det(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \pm 1$．$\det(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 1$ のときは $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が求める正規直交基底である．$\det(f_1, f_2, \ldots, f_n) = -1$ のときは正規直交基底を $\{-f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ とすればよい．

2. (a) K はコンパクトなので $\exists M > 0 \, \mathrm{s.t.} \, \|x\| \leq M \, (\forall x \in K)$．ここで $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ はユークリッドノルム．任意の $x \in K$ に対して $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \leq M \|y\|$．ここで Cauchy-Schwarz の不等式を用いた．
よって $\mathrm{H}_K(y) = \sup\{\langle x, y \rangle \mid x \in K\} \leq M \|y\| < +\infty$.

(b)
- $K_1 + K_2$ が凸であることは容易に示せる．
- $K_1 + K_2$ がコンパクトであること
  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $K_1 + K_2$ の任意の点列とする．
  $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists a_n \in K_1 , \exists b_n \in K_2 \text{ s.t. } c_n = a_n + b_n$.
  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} , \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はそれぞれ K_1 , K_2 の点列．
  K_1 , K_2 はコンパクトなので Bolzano-Weierstraß の定理より $\{a_n\} , \{b_n\}$ の部分列 $\{a_{\tau(n)}\} , \{b_{\tau(n)}\}$ と $a \in K_1 , b \in K_2$ が存在して $a_{\tau(n)} \to a$, $b_{\tau(n)} \to b (n \to \infty)$．$c_{\tau(n)} = a_{\tau(n)} + b_{\tau(n)} \to a + b \in K_1 + K_2 (n \to \infty)$．よって $K_1 + K_2$ はコンパクト．

以上により $K_1 + K_2$ はコンパクト凸．

(c) $\forall x \in K_1 + K_2 \; \exists x_1 \in K_1 \; \exists x_2 \in K_2 \text{ s.t. } x = x_1 + x_2$.
$\langle x, y \rangle = \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \leq \mathrm{H}_{K_1}(y) + \mathrm{H}_{K_2}(y)$.
$x \in K_1 + K_2$ は任意なので $\mathrm{H}_{K_1+K_2}(y) \leq \mathrm{H}_{K_1}(y) + \mathrm{H}_{K_2}(y)$.
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_i \in K_i \text{ s.t. } \mathrm{H}_{K_i}(y) - \varepsilon/2 < \langle x_i, y \rangle \; (i = 1 , 2)$.
したがって $\mathrm{H}_{K_1}(y) + \mathrm{H}_{K_2}(y) - \varepsilon < \langle x_1 + x_2, y \rangle \leq \mathrm{H}_{K_1+K_2}(y)$.
$\varepsilon > 0$ は任意なので $\mathrm{H}_{K_1}(y) + \mathrm{H}_{K_2}(y) \leq \mathrm{H}_{K_1+K_2}(y)$.
以上より $\mathrm{H}_{K_1}(y) + \mathrm{H}_{K_2}(y) = \mathrm{H}_{K_1+K_2}(y)$.

(d) $x_1 \in K_1 \Rightarrow x_2 \in K_2$ より $\langle x_1, y \rangle \leq \sup\{\langle x, y \rangle \mid x \in K_2\} = \mathrm{H}_{K_2}(y)$.
$x_1 \in K_1$ は任意なので $\mathrm{H}_{K_1} = \sup\{\langle x, y \rangle \mid x \in K_1\} \leq \mathrm{H}_{K_2}(y)$.

解説

1. この問題は平行四辺形の面積、平行 6 面体の公式の一般化にほかなりません！

2. この問題では凸性はあまり効いておらず、コンパクト性しか使っていませんが、H_K はコンパクト凸集合の特徴付けに用いられるものです.

今回の問題

1. $\mathbb{R}^2$ の相異なる 4 点が，どの 2 点間の距離も正整数であるように与えられている．このときどの 2 点間の距離も奇数であることはないことを示せ．
「33 の素敵な数学小景（イジィ・マトウシェク著　徳重典英訳　日本評論社）」より．
2. V を $\mathbb{R}$ 上の線型空間，$\dim V = n < \infty$ とする．さらに $P : V \to V$ は $\mathbb{R}-$ 線型変換で $P = P^2$ を満たすとする．このとき $\mathrm{rank}P = \mathrm{tr}P$ であることを示せ．
ただし $\mathrm{tr}P$ は P のトレース（対角和）を表すとする．
3. 【研究問題】 $A := \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$（100 以下の正整数全体の集合）と置く．
A の部分集合 S に対して S の要素の個数を $|S|$ で表すことにする．
このとき次の命題 $(*)$ を考える．
「$n\,(1 \leq n \leq 100)$ が与えられたとき，$|S| = n$ を満たす A の任意の部分集合 S に対して以下の条件を満たす $a, b, c, d \in S(a, b, c, d$ は相異なる$)$ が存在する：
$$a + b = c + d \quad 」$$
このとき、以下の問に答えよ．
（a）$n = 16$ のとき命題 $(*)$ は真であることを示せ．
（b）$n = 13, 14, 15$ のとき命題 $(*)$ は真であるか，偽であるか考察せよ．

問題について一言

1. 夏の集中「線形代数の様々な応用」で扱われた内容です．ちょっと不思議な気がする命題です．
2. $P^2 = P$ という条件から $\mathrm{tr}P$ が整数とは！この問題に出会ったときとても驚いた記憶があります．
3. この命題 $(*)$ は或る数学好きなグループで話題になっている問題です．
9 月 19 日現在、私の聞いている情報は以下の通りです．
   - $n = 16$ のとき命題 $(*)$ は正しい．
   - $n = 15$ のとき命題 $(*)$ は正しいらしいがはっきりしない．
   - $n = 14$ のとき命題 $(*)$ は正しいか，正しくないか全くわからない．
   - $n = 13$ のとき命題 $(*)$ には反例が見つかったらしい．よって正しくないようだ．

   以上、真偽のほどがはっきりしていません．よって研究問題としました．

皆様の解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2018 年 12 月 31 日（月)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2018 年 10 月 5 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail : sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail : monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401