Math.
No. 130
www.sugakukobo.com

会報 2019 年 9 月

数学工房

2019 年 秋 巻 頭 言

純粋に知的好奇心から、あるいは応用のためにせよ、一定水準以上の数学を学ぼうとすれば、必ずといっていいほど困難に突き当たります。特に数学工房の会員の皆さんは、高度な数学をちゃんと理解したいという強い意欲がある方が多いいから尚更です。困難の原因は何だろうか。一概には言えませんが、一つの大きな原因と思われるのは、小中高での数学の学び方、その惰性で学ぶ大学数学の学びなのです。内容ではありません。ある数学科の先生によると、小中高の数学が十全に学習できていることが、数学科の講義の前提だそうです。実際には、うまくいかない。基本的な知識や技能が欠落している。では高校数学の補講となるのですが、数学として物事に接する姿勢ができてないのですから、補講をしても、効果がないのです。十全の学びとは、意味がはっきりしませんが、私見では、すでに中高の段階で、ある主張や概念などが、本当かな？ということが、たくさんあるはずですが、その疑問を大切にして、素直に解決しようとすると必然的に、現代数学の方法や概念構成の祖型に行き着くことが多いいと思います。現代数学といえどもその一歩一歩とかけ離れてあるわけでは決してないのです。ところで、会報の巻頭にこんな事を書いたのは、数学セミナー 8 月号に「現代数学の難しさについて」というなかなか興味深い特集が載っていたからです。7 人の著者がおのおの立場から、現代数学の学び、難しさについて、論じています。現代数学の困難に対する、感受性たち位置は 7 人 7 様で, その点では数学工房の会員の状況と同じで、現代数学の語法や方法に向くも向かないと思われる人もいます。批判的に読んでみると、私はいつも悩まされている問題ですから、最初の論説だけ読んで寝ようと思っていたのですが、面白くなってきて、明け方になってしまいました。特に、わたしと考え方も、感受性も全く逆の T 先生の記事が面白くて、自分ならどうかと思いながら読んでいきました。私にとって不思議だったのは、T 先生現代数学は退屈だというのです。古典数学のアイデアは、どうして思いついたかわからぬが、鶴亀算のように鮮やかだというのです。そうでしょうか？古典の自然な発想を見出そうとすれば、現代数学の方法が適しているのではないでしょうか？それに Leibniz も Euler もその時代の現代数学の作り手で、十分に抽象的で同時代の一般的な数学とはかけ離れたものです。

たまたま、その後数セミの編集長の I さんと電話で話すことがあり、この記事の感想を述べたのですが、なかなかこの特集は人選から始まって大変だったそうです。

この記事を読んだからといって現代数学の学びの困難が解決するわけではありませんが、幸い、簡単に読めますからご自身の、現代数学に対する立ち位置を著者たちとの問答を通してざっと見つめなおす機会にしたらよろしいかと思います。

それでは、秋学期も一歩一歩着実に進んでいきましょう。

2019 年晩夏 数学工房　桑野耕一

秋　学　期　講　座　案　内

2019年9月〜12月

2019 年秋学期講座は、入門 3 講座、入門初級 1 講座、初級 2 講座、初中級 1 講座、中級 3 講座を開講します。

<< 秋学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	9 月 21 日	入門
I.C	Unitary 表現	11 月 9 日	初中級
I.D	初等線型代数と多変数の微積分	9 月 29 日	入門
I.E	微分方程式論	9 月 29 日	入門初級
I.F	数学の基本語彙と文法	未定	入門
E.C	多様体概論　テンソル場と微分形式 II	11 月 10 日	初級
G	抽象線型代数	9 月 22 日	初級
M.A	可換 C^* 代数の Gelfand 表現と関数算法	9 月 28 日	中級
M.B	C^* 代数の表現論	11 月 3 日	中級
M.C	Sobolev 空間 I I	9 月 22 日	中級

G は変則日程となっております。ご注意ください。

◆ I.A　解析教程
（1）絶対収束級数
（2）連続関数と連続関数の 3 つの基本定理
（3）微分法
（4）Riemann 積分
9/21 より隔週全 3 回 (9/21, 10/5, 10/19)

◆ I.C　Unitary 表現
（1）Peter-Weyl の定理とその帰結

11/9 より隔週全 3 回 (11/9, 11/23, 12/7)

◆ I.D　初等線型代数と多変数の微積分
（1）線型代数からの補充
（2）体積形式と応用
（3）領域上の積分と基礎公式
（4）変数変換公式
（5）いくつかの積分
9/29 より隔週全 3 回 (9/23, 10/13, 10/27)

◆ I.E　微分方程式概論
（1）定数係数の線型方程式
（2）線型方程式の変形理論
（3）比較定理
9/29 より隔週全 6 回 (9/29, 10/13, 10/27, 11/10, 11/24, 12/8)

◆ I.F　数学の基本語彙と文法
（1）代数系と総和記号
（2）集合の概念と集合の代数
（3）部分集合族
（4）写像と写像の基本的性質
（5）像と原像の代数
日程未定

◆ E.C　多様体概論　テンソル場と微分形式 II
＜1＞　共変テンソル場（続）
＜2＞　ベクトル場上の p 次形式と p 次共変テンソル場
＜3＞　写像によるテンソル場の変形
＜4＞　微分形式と外微分作用素
11/10 より隔週全 3 回 (11/10, 11/24, 12/8)

◆ G　抽象線型代数（標準形）
＜0＞　固有値と固有多項式
＜1＞　多項式空間の Shift 不変部分空間
＜2＞　線型変換の分解
＜3＞　Jordan 標準形
9/22 より 6 回変則日程 (9/22, 10/6, 10/20, 11/2, 11/17, 12/1)

◆ M.A　可換 C^* 代数の Gelfand 表現と関数算法
＜1＞　可換 C^* 代数の Gelfand 表現と応用の基本
＜2＞　連続関数算法
＜3＞　スペクトル側度
9/28 より隔週全 3 回 (9/28, 10/12, 10/26)

◆ M.B　C^* 代数の表現論
＜１＞　既約表現と状態
（１）　正値線型形式とサイクリック表現
（２）　非退化表現の分解
（３）　既約表現
（４）　純粋状態
＜２＞　推移定理
　11/3 より隔週全 3 回 (11/3, 11/17, 12/1)

◆ M.C　Sobolev 空間 II
＜１＞　弱導関数と滑らかな関数との積
＜２＞　W^{mp} におけるテスト関数の稠密性
＜３＞　C^∞ 級の W^{mp} の W^{mp} における稠密性
＜４＞　線分条件を満たす開集合における稠密定理
　9/22 より隔週全 3 回 (9/22, 10/6, 10/20)

[料金]
通常講座
一括払い ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）　２回目以降￥5,500（学割￥4,000）
特別講座 ￥30,000
*講座、研究会等にご参加いただくには該当年度の数学工房の年会費がお支払い済みであることが必要です。

会員からのメッセージ

【自己紹介】
　はじめまして、2018 年の夏より会員になりました坂本紘樹と申します。職業は、医療行政に関わる企業のプログラマーですが、前職が不動産の営業だったため、現在は顧客対応、社内調整、プロジェクト調整などを行っています。会員の皆様のように仕事で数学や数式を使うことはほとんどなく（部署によってはあるのですが）、人相手の仕事をメインにしています。

写真１：坂本紘樹さん

【数学との関わり】
　大学院時代は、物理学科の物性理論の研究室に在籍しており、グラフェンという炭素原子で出来た２次元の六角格子の研究を行っておりました。この物質中の電子は質量がゼロであるような振る舞いをしており、その振る舞いが素粒子に近い動きをします。ちょうど、私が大学に入学したころに、グラフェンを作成された方々にノーベル賞が授与されたこともあり、研究としてもブームの時期でした。
　私の研究は、磁場を加えたりと歪みを発生させるなどして、位相不変量がどうなるか確認したり、固有値計算をしていました。しかし当時は、日々、教授から言われた計算をただ漠然としており、研究の本質を深く理解していませんでした。就活もひと段落して、学会のために勉強しましたが、この物質のバックグラウンドは広く、トポロジーの勉強だけでなく、指数定理なるものまであり、授業を受けている程度の学力では全くわからず、そのまま修了を迎えてしまいました。
　いつかは、勉強してわかるようになりたいとは思っており、老後にでもゆっくりやろうかと考えていましたが、昨年、仕事に少し余裕ができたので、何かやれないかと、インターネットで調べていたら当スクールを見つけました。明らかに、他の数学のスクールと異なり、受けるなら今しかチャンスがないと思い入会しました。
【授業を受けてみて】
　基礎が全くできていないと、毎回痛感させられます。そもそも、たいして学力ないこと、物理では集合や論理を使うタイミングがほとんどないこと、さらに社会人になってからは、数学に触れていなかったため、時々、授業に置いてけぼりになっています (笑)。また、社会人になってから集中力が落ちたせいか、授業の終わりごろにはへとへとになっており、桑野先生含めて会員の皆様の授業への集中力に、毎回、驚か

されます。
　先生の説明がすごくわかりやすいため、始めての内容でも意外に理解できることも多く、また、久しぶりに数学に触れているため、結構、楽しんでいます。まあ、授業の問題はもう少し自力で解けないといけないんですが、、汗。
　個人的には、トポロジーなど研究のバックグラウンドが理解できるようになりたいですが、いつになるやらなので、気長にやっていきたいと思っています。
　現在は入門コースを参加しており、ゆっくりですが、ゆくゆくは自身の手で自由に数学が扱えるようになりたいと思っております。どうぞ、よろしくお願いいたします。

入門桑野道場（第41回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

1. n を正整数とし $0 \leq u_j < 1\,(j = 1, \ldots, n)$ とするとき
$$(1-u_1)\cdots(1-u_n) \geq 1 - u_1 - \cdots - u_n$$
を示せ.
2. t を任意の実数とするとき，以下を示せ
（a）
$$(1+t)e^{-t} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right)t^k$$
（b）
$$|(1+t)e^{-t} - 1| \leq |t|^2 e^{|t|}$$

解答

下関市の会員，熊野充博さんより解答があり，正解されていますので紹介します.

1. n に関する数学的帰納法で示す.
$n = 1$ のとき，左辺 $= 1 - u_1$，右辺 $= 1 - u_1$ より左辺=右辺.
n のとき問題の不等式が成立すると仮定する．すなわち
$$\prod_{j=1}^{n}(1-u_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n} u_j$$
$n+1$ のとき，
$$\text{左辺} = \prod_{j=1}^{n+1}(1-u_j) = \prod_{j=1}^{n}(1-u_j)\cdot(1-u_{n+1}) > \left(1 - \sum_{j=1}^{n} u_j\right)(1-u_{n+1})$$
$$= 1 - (\sum_{j=1}^{n} u_j + u_{n+1}) + u_{n+1}\sum_{j=1}^{n} u_j > 1 - \sum_{j=1}^{n+1} u_j$$
すなわち $n+1$ のときも不等式は成立する．よって与えられた不等式はすべての自然数 n について成り立つ.

2.（a）$t \mapsto -t$ と置換した

$$(1-t)e^t - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) t^k$$

を示す．

$$右辺 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 \right) - t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= e^t - 1 - te^t = (1-t)e^t - 1$$

（b）(a) 両辺の絶対値をとると

$$|(1+t)e^{-t} - 1| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) |t|^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} |t|^k \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} |t|^k$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^k}{(k-2)!} = |t|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} = |t|^2 e^{|t|}$$

今回の問題

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 F がアフィン平面であるとは，$a \in F$ と $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間 U_F が存在して $F = a + U_F = \{a + u \,|\, u \in U_F\}$ と書けるときを言う．このとき $b \in F \Rightarrow F = b + U_F$ が成立する．（容易にわかる）

U_F は a のとり方によらず定まる．（これも容易にわかる）U_F を F の底空間と言う．$\dim U_F$ を F の次元と呼び $\dim F$ と記す．すなわち $\dim F := \dim U_F$．

F_1, F_2 を $\mathbb{R}^n$ のアフィン平面とする．$F_1 \vee F_2$ で F_1 と F_2 を含む最小のアフィン平面を表すことする．この $F_1 \vee F_2$ はいつでも存在する．実際，F_1 と F_2 を含むアフィン平面全体の集合を $\mathfrak{A}$ とすると，$F_1 \vee F_2 = \bigcap\{F \,|\, F \in \mathfrak{A}\}$ が成立する．$(*)$ 詳細は後述．

問題

$F_1\,, F_2$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ のアフィン平面とし，F_j の底空間を U_j とする．$(j = 1, 2)$

1. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ のとき以下を示せ．
   （a）$\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$
   （b）$x_0 \in F_1 \cap F_2$ ならば $F_1 \vee F_2 = x_0 + (U_1 + U_2)$
   （c）$\dim F_1 + \dim F_2 = \dim(F_1 \vee F_2) + \dim(F_1 \cap F_2)$
2. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ のとき以下を示せ．
   （a）$F_1 \vee F_2 = x_1 + \mathbb{R}(x_2 - x_1) \oplus (U_1 + U_2)$．ただし $F_j = x_j + U_j\ (j = 1, 2)$
   （b）$\dim F_1 + \dim F_2 \ge \dim(F_1 \vee F_2) - 1$

$(*)$ $F_1 \vee F_2 = \bigcap\{F \,|\, F \in \mathfrak{A}\}$ の証明

$\mathfrak{A} := \{F \subset \mathbb{R}^n | F$ は A_1 と A_2 を含むアフィン平面 $\}$ で，$\mathbb{R}^n$ はアフィン平面で明らかに $A_1\,, A_2 \subset \mathbb{R}^n$．したがって $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{A}$．すなわち $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ ．$F_0 := \bigcap_{F \in \mathfrak{A}} F$ とおくと F_0 はアフィン平面であることを示す．$a \in F_0$ をとると，任意の $F \in \mathfrak{A}$ に対して $F = a + U_F$ と書ける．ここで U_F は $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間．任意の $F' \in \mathfrak{A}$ に対して $a + \bigcap_{F \in \mathfrak{A}} U_F \subset a + U_{F'}$．したがって $a + \bigcap_{F \in \mathfrak{A}} U_F \subset \bigcap_{F \in \mathfrak{A}}(a + U_F) = F_0$．

逆に $F_0 = \bigcap_{F \in \mathfrak{A}}(a + U_F) \subset a + U_{F'}(F' \in \mathfrak{A})$ だから $F_0 = \bigcap_{F \in \mathfrak{A}}(a + U_F) \subset a + \bigcap_{F \in \mathfrak{A}} U_F$．以上により $F_0 = a + \bigcap_{F \in \mathfrak{A}} U_F$．したがって F_0 はアフィン平面．（線型部分空間の共通部分は線型部分空間！）F_0 が F_1 と F_2 を含み最小であることは明らかなので，$F_0 = F_1 \vee F_2$ である．

問題について一言

夏の集中「Euclid 空間の基本図形の幾何学、凸図形、アフィン平面」で扱われた内容です.

解答をお待ちしております.

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2019 年 12 月 31 日（火)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2019 年 9 月 30 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203

数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401