巻　頭　言

C^* 代数や作用素代数のような抽象的な性格の数学に携わる醍醐味は、個別に知っていた別の領域の知識が統合されたり、抽象化されたおかげで、共通の現象に対してより簡明で本質的なアプローチが見つかったり、更には新しい領域への研究の指針が得られたりします。お正月のセミナーでは、すべては正の概念の一般化と積分の概念の代数化から非可換解析学への一歩が始まったというお話をさせてもらいました。この領域に向き合うといつも生き生きと感じる、根を深く地中に伸ばし樹液を吸い上げ、天へ向かって枝を繁茂させ伸びていく巨樹のようなビジョンを参加者の皆さんにお伝えしたかったのです。

ところで、私は今年が生まれて 6 回目の年男なので、そろそろ数学工房にどのように引導を渡すかを考えなければならないのですが、数学に対して生き生きした面白みや感動を覚えなくなったら、やめようと思っています。年を取ると、技術的にははるかに巧みになっているのに、やはり若いころのように鮮烈な感動を感じる事は少なくなっていくような気がします。お正月は、いつものように次の講座の準備に追われないので、辞め時を意識しながら、今後 5 年間の計画を考えてみました。

皆さんご存知のことと思いますが、数学工房には始まって以来全体の柱になる現代数学の語法を扱う、数学の基本語彙と文法、抽象線形代数、抽象位相の 3 講座があります。この 3 講座で学んでいただきたいことは単に個別の知識ではなく、現代数学の概念構成にもちいられる語法なのです。アドバンスコースの講座で落ちこぼれる原因の多くが、現代数学の語法に対する不慣れ、理解不足だと思います。その結果、内容の展開以前に、定義や、命題がすでに理解できていないということがしばしば起こります。結局は、抽象線形代数や抽象位相を十分に理解していないという結論になるのですが、とはいうものの、いくら多変数の微積分や抽象線形代数、一般位相を改めて、新しい目でやった方が良いと薦めたところで、一度どこかでやった事には熱が入らないし、うかうかすると漫然と学びなおすことになってしまいます。そこで基礎素養を養うための新しい 3 本柱を計画しています。積分論や実解析、複素解析などの基礎を、線形代数、位相を制御原理とする発展的な立場で学びなおすような、しかも応用上重要なテーマを扱う講座を設けます。何らかの縁で数学工房を訪れた皆さんが、数学を核とした活発なコミュニティー活動を続けていっていただければ数学工房も多少の存在意義があったといえましょう。そのために必要な力の補いです。

数学工房　桑野耕一　　2020 年　春学期に

春学期講座案内

2020年
1月～4月

春学期スケジュール

入門

◆ ID 多変数の高階微分と幾つかの基本定理

<1> 線形代数学からの補充
<2> 連続微分可能な関数のクラス
<3> グラージェント、ヘッシアン、ラプラシアンと線形形式
<4> 高階微分と剰余付き Taylor 公式
<5> 2 次形式と極値の分類

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
3/8、3/22、4/5

入門・初級

◆ IA 解析教程 微分法 I、微積分の基本定理

<1> 微分法 I
<2> Riemann 積分
<3> 微積分の基本定理

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
2/29、3/14、3/28

◆ IE 線形微分方程式 II

(隔週日曜 6 回 11:00–13:00)
1/26、2/9、2/23、3/8、3/22、4/5

初級・中級

◆ IC 局所コンパクト群の表現論 I Banach 代数

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
1/18、2/1、2/15

◆ EC 多様体 外微分と Lie 微分 II 多様体のコホモロジー環

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
1/19、2/2、2/16

中級

◆ MA C^* 代数の正元、正の線形形式

<1> C^* 代数の正元と正錘
<2> 作用素と半線形形式から
<3> 近似単位と準同型

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
3/7、3/21、4/4

◆ MB C^* 代数の表現 II

<1> 既約表現の特徴づけの幾つかの帰結
<2> 推移定理
<3> C^* 代数の左イデアル

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
1/26、2/9、2/23

◆ MC Sobolev 空間

<1> Sobolev 空間におけるオペレーション
<2> n 次元 Euclid 空間における Sobolev の埋蔵定理

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
3/1、3/15、3/29

講座料について
各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。
途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目￥12,000(学割 ￥9,000)、3 回目￥10,000(学割 ￥9,000) です。
・6 回講座は、1 回目￥6,500(学割 ￥6,000)、2 回目以降￥5,500/回 (学割 ￥4,000/回）です。
・特別講座 講座料 ￥30,000

講座、研究会等に御参加いただくには該当年度の数学工房の年会費がお払込み済みであることが必要です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金 口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

会員からのメッセージ

会員の松本隆則さんに、作用素環論研究会の紹介記事を寄稿してもらいました。

今を去ること 30 数年前、大学の時に量子力学を勉強していました。量子力学の読書会で、ハイゼンベルクの行列力学というものが出てきました。ただ、ハイゼンベルクの行列力学の中に出てくる行列は無限次元でした。無限次元行列は、どのように論理が構築されるのか良くわかりませんでした。そういったことを疑問に思う人間は物理系では、うまくやっていけませんでした。

現在、数学工房で、月 1 回程度の頻度で作用素環論の読書会が開かれております。ここでは、行列の一般化が取り扱われており、有限階 (値域が有限次元) 作用素とそのノルム閉包のコンパクト作用素等が出てきます。そういう訳で、抱いていた疑問が解決されるのでは、と期待しているところです。

この読書会では、Murphy の *C^*-Algebras and Operator Theory* (Academic Press) を使っていますが、この本は、様々な事柄が 1 冊 286 ページに集約されており、著者がその分野の専門家であるため、要点のみ書かれていることが多いです。それに反して、この読書会は、そこに書かれていることを突き詰めて

考えていこうという主旨に基づいて運営されております。そのために、参加者の中で発表者を順番に回しながら、発表者に準備をして頂き、準備された論理立てを元に、みんなで吟味して進めていきます。このため、一人で読む場合に比べ、深く理解できるように思います。

ここで、この場をお借りしまして、現在、読書会で参考になりそうな自分が所持しております本とその特徴についてご紹介させて頂きます。

Kadison and Ringrose の本（[1]、[2]）は 関数解析をやっていた人はその延長として読んでいけそうです。最初、吉田先生の本 ([3]) との違いがよくわかりませんでしたが、数学工房の講義等に出席して、観点の違いが認識できるようになったように感じています。

ブルバキのスペクトル論 ([4]) は、ゲリファントの定理、及び詳細な Functional calculus の記載がある作用素環論の本です。最近、第 2 版が出版されました。岩波基礎数学のスペクトル理論 I ([5]) は微分作用素に関するもので、スペクトル論 II（[6]）はシュレディンガー作用素に関するものなので、趣が異なります。

Bratteli Robinson の本は、第 1 巻 ([7]) は作用素環論の本のようでした。なお、第 2 巻 ([8]) には場の量子論の基礎となるフォック空間が出てきますので、量子統計力学の本のようです。

Dixmier の本 ([9]) については、例えば、竹崎先生の本 ([10]) では、von Neumann 環の分類が、partial isometry を利用したものとなっていますが、この本では trace を用いて定義されており、有限、固有無限、純無限等の概念が、感覚的に納得のいくものとなっているように感じています。

参考文献

[1] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, volume 15 of G.S.M. AMS, 1983.
[2] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, volume 16 of G.S.M. AMS, RI, 1986.
[3] K. Yoshida, *Functional Analysis*, 6th ed., Springer 1980.
[4] N. Bourbaki, *Théories spectrales. Éléments de mathématique*, Springer 1967, 2007, 2019.
[5] 木村俊房, 「スペクトル理論 I」, 岩波基礎数学講座, 岩波書店, 1979.
[6] 黒田成俊, 「スペクトル理論 II」, 岩波基礎数学講座, 岩波書店, 1979.
[7] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1987.
[8] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1996.
[9] J. Dixmier, *Translated as Von Neumann algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1981. First Edition 1957.
[10] M. Takesaki, *Theory of operator algebras. I*, volume 124 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

入門　桑野道場　（第42回）

//記　桑野道場師範代　半田伊久太//

前回の問題

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 F がアフィン平面であるとは，$a \in F$ と $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間 U_F が存在して $F = a + U_F = \{a + u \,|\, u \in U_F\}$ と書けるときを言う．このとき $b \in F \Rightarrow F = b + U_F$ が成立する．（容易にわかる）

U_F は a のとり方によらず定まる．（これも容易にわかる）U_F を F の底空間と言う．$\dim U_F$ を F の次元と呼び $\dim F$ と記す．すなわち $\dim F := \dim U_F$.

F_1, F_2 を $\mathbb{R}^n$ のアフィン平面とする．$F_1 \vee F_2$ で F_1 と F_2 を含む最小のアフィン平面を表すことする．この $F_1 \vee F_2$ はいつでも存在する．実際，F_1 と F_2 を含むアフィン平面全体の集合を $\mathfrak{A}$ とすると，$F_1 \vee F_2 = \bigcap\{F \,|\, F \in \mathfrak{A}\}$ が成立する．

問題

F_1, F_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ のアフィン平面とし，F_j の底空間を U_j とする．$(j=1,2)$

1. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ のとき以下を示せ.
   (a) $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$
   (b) $x_0 \in F_1 \cap F_2$ ならば $F_1 \vee F_2 = x_0 + (U_1 + U_2)$
   (c) $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim(F_1 \vee F_2) + \dim(F_1 \cap F_2)$
2. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ のとき以下を示せ.
   (a) $F_1 \vee F_2 = x_1 + \mathbb{R}(x_2 - x_1) \oplus (U_1 + U_2)$．ただし $F_j = x_j + U_j\ (j=1,2)$
   (b) $\dim F_1 + \dim F_2 \geq \dim(F_1 \vee F_2) - 1$

解答

1. (a) $x_0 \in F_1 \cap F_2$ とすると $F_1 = x_0 + U_1$ かつ $F_2 = x_0 + U_2$.
   $\tau_{x_0} : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto x_0 + x \in \mathbb{R}^n$ と定義すると τ_{x_0} は全単射。したがって
   $$F_1 \cap F_2 = \tau_{x_0}(U_1) \cap \tau_{x_0}(U_2) = \tau_{x_0}(U_1 \cap U_2) = x_0 + (U_1 \cap U_2)$$
   よって $F_1 \cap F_2$ の底空間は $U_1 \cap U_2$．したがって $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$.
   (b) F を F_1 と F_2 の含む任意の平面とする．$x_0 \in F_1 \cap F_2$ より $F = x_0 + U_F$．ここで U_F は F の底空間．$U_j = F_j - x_0 \subset F - x_0 \subset U_F$．よって $U_j \subset U_F\ (j=1,2)$．したがって $U_1 + U_2 \subset U_F$．よって $x_0 + (U_1 + U_2) \subset x_0 + U_F = F$.
   したがって $x_0 + (U_1 + U_2)$ は F_1 と F_2 を含む最小の平面.
   すなわち $x_0 + (U_1 + U_2) = F_1 \vee F_2$.
   (c)
   $$\begin{aligned}\dim(F_1 \vee F_2) &= \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)\\ &= \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)\end{aligned}$$
   $$\text{以上より}\ \ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim(F_1 \vee F_2) + \dim(F_1 \cap F_2)$$
2. (a) $W := \mathbb{R}(x_2 - x_1) \oplus (U_1 + U_2)$ とおく．F を F_1 と F_2 を含む任意のアフィン平面とする．F の底空間 U_F が W に含まれることを示せばよい．仮定から $F_1 \subset F \Rightarrow U_1 = F_1 - x_1 \subset F - x_1 = U_F$．よって $U_1 \subset U_F$.
   $F_2 - x_1 = F_2 - (x_1 - x_2) - x_2 = F_2 - x_2 - (x_1 - x_2)$.
   $F_2 - x_2 = U_2$ かつ $-(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 \in U_F$ より $U_F \supset U_2 - (x_2 - x_1)$ かつ $\mathbb{R}(x_2 - x_1) \subset U_F$．以上で $\mathbb{R}(x_2 - x_1) + U_1 + U_2 \subset U_F$ が従う.
   したがって $x_1 + \mathbb{R}(x_2 - x_1) + U_1 + U_2 \subset x_1 + U_F = F$．左辺は作り方から F_1, F_2 を含むから F_1, F_2 を含む最小の平面.
   よって $F_1 \vee F_2 = x_1 + \mathbb{R}(x_2 - x_1) + U_1 + U_2$.
   ところで $\mathbb{R}(x_2 - x_1) \cap (U_1 + U_2) = \{\mathbf{0}\}$ が成立する.
   実際，$\mathbb{R}(x_2 - x_1) \cap (U_1 + U_2) \supsetneq \{\mathbf{0}\}$ が成立するとき $\lambda(x_2 - x_1) = u_1 - u_2$ となる $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ と $u_j \in U_j\ (j=1,2)$ が存在する．初めから両辺を λ で割ることにより $x_2 - x_1 = u_1 - u_2$ としてよい．したがって $x_2 + u_2 = x_1 + u_1 \in F_1 \cap F_2$．これは $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ に反する.
   以上により $\mathbb{R}(x_2 - x_1) \cap (U_1 + U_2) = \{\mathbf{0}\}$.
   したがって $F_1 \vee F_2 = x_1 + \mathbb{R}(x_2 - x_1) \oplus (U_1 + U_2)$.
   (b) (a) より
   $$\begin{aligned}\dim(F_1 \vee F_2) &= \dim(\mathbb{R}(x_2 - x_1) \oplus (U_1 + U_2))\\ &= \dim(\mathbb{R}(x_2 - x_1)) + \dim(U_1 + U_2)\\ &= 1 + \dim(U_1 + U_2)\\ &= 1 + \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)\\ &= 1 + \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(U_1 \cap U_2)\end{aligned}$$

よって $\dim(F_1 \vee F_2) \leq 1 + \dim F_1 + \dim F_2$.

今回の問題

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 F がアフィン部分空間であるとは,
任意の $x, y \in F$ に対して $l(x,y) := \{(1-s)x + sy | s \in \mathbb{R}\} \subset F$ を満たすときを言う.
$\mathbb{R}^n$ の凸集合 X が与えられたとき $f : X \to (-\infty, +\infty]$ が凸関数であるとは
任意の $x_1, x_2 \in X$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ を満たすときを言う.

1. A を $\mathbb{R}^n$ のアフィン部分空間とする.
   このとき A が $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間である必要十分条件は $\mathbf{0} \in A$ であることを示せ.
2. $p \geq 1$ と $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\eta_p(x) := \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

と定義する.
(a) $B_p := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \eta_p(x) \leq 1\}$ とおくと B_p は凸集合であることを示せ.
ただし $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto |\xi|^p \in \mathbb{R}$ が凸関数であることは認める.
(b) 任意の $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\eta_p(x+z) \leq \eta_p(x) + \eta_p(z)$$

$$\text{すなわち } \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \zeta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |\zeta_j|^p\right)^{1/p}$$

であることを示せ.（ミンコフスキーの不等式）
(c) $\eta_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は正斉次凸関数であることを示せ．すなわち f は凸関数かつ任意の $\alpha \geq 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ が成立することを示せ.

チャレンジ問題

問題 2.(b) のミンコフスキーの不等式から次のヘルダーの不等式が導出できるか？
$p > 0\,, q > 0\,, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす任意の p, q と任意の $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j \zeta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |\zeta_j|^q\right)^{1/q}$$

問題について一言

今回の問題は 2020 年 1 月の集中「凸関数」で扱われた問題です．皆さんの解答をお待ちしております.
またチャレンジ問題は同じ集中に参加されていた逸見昌之さんより提出されたものです．ヘルダーの不等式をまず証明して，それを用いてミンコフスキーの不等式を証明するのはよく知られてしますが，逆は見たことがないということです．証明はできていないのでチャレンジ問題としました．チャレンジお待ちしております.

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2020 年 4 月 30 日（木)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　　2020 年 2 月 26 日発行
発行人　　　桑野耕一
編集人　　　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401