Math.
No. 132
www.sugakukobo.com

会報 2020 年 6 月

数学工房

2020 年 夏 巻 頭 言

およそ考えるに値するものは、なんでも数学の対象にできる。これは現代数学の方法の強力さをあらわす特徴ですが、数学の世界に得体の知れないウイルスをもたらすことにならないか？

古代の Pythagoras 教団の無理量の発見についての言い伝えは、数学が実は古代以来、危険と共存する道を切り開いて来たことを示しているように見えます。。

今、私たちが直面していることは、大きな目で見れば、この世界の進化と変容の過程に過ぎないのでしょう。そう考えると変なもので希望が生まれてきます。考えてみれば、数学の発展は、たとえて言えば、美しい秩序の支配する王国の境界をどんどん広げて、魑魅魍魎、たとえて言えば得体のしれぬウイルスが紛れ込む危険性を許容した歴史といえるでしょう。実際、集合論の無制限な適用は数学の基礎における様々な危機を引き起きました。そして現代数学のスタイルは、いかにその危険性を回避するかという努力により生まれてきました。それ自体疑義の余地がある Zorn の補題を度々使う理由もまさにウイルスと共存するためだと言ったら、わかりやすいかもしれません。Kronecker や Siegel といったそうそうたる数学者が数学の新しい傾向に否定的だったのもそういう危機感によるものでしょう。

以上はこの危機のおかげで得られた数学の性格についての小さな気付きです。

さて 3 月末から 5 月一杯数学工房はお休みしました。4 月からは、緊急事態宣言が出ましたので都の休業要請に応じるということになりました。さらに初めは 3 月・4 月の講座の代替えは 5 月の連休にこなす予定でしたが、緊急事態宣言の延長に伴い。教室の休業を 5 月一杯とし、レジュメを送付して、メールあるいは Zoom によるご質問を受ける方式になりました。該当講座にご参加の方にはご不自由をかけました。また研究会も Zoom によるやり取りになりました。今年度は 6 月から 8 月一杯夏学期です。このような長い休業は、1994 年数学工房設立以来、初めてのことです。Zoom を補助手段にして講座を開く可能性など、今まで考えてもいなかったことを、会員のご協力で頑固な心を励ましつつ様々な可能性を検討したりセミナーの実験に加わったり、面白い経験することができました。今後の講座の改良運営に生かしたいと思います。

教室で皆様に新鮮な気持ちでお目にかかれる日を楽しみにしております。

2020 年 5 月末 数学工房　桑野耕一

夏 学 期 講 座 案 内

2020 年 6 月〜8 月

2020 年夏学期講座は、入門 2 講座、初級入門 2 講座、初級 1 講座、中級 4 講座を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	6 月 13 日	入門
I.C	局所コンパクト群の表現	8 月 1 日	中級
I.D	初等線型代数と多変数の微積分	8 月 2 日	入門
I.E	微分方程式論	6 月 7 日	初級入門
I.H	可換代数序論	6 月 14 日	初級入門
E.C	微分多様体概論	6 月 14 日	初級
M.A	関数解析概論	7 月 4 日	中級
M.B	C^*-代数の表現論	6 月 7 日	中級
M.C	Sobolev 空間	7 月 26 日	中級

IC、IE、IH、MA は変則日程となっております。ご注意ください。

◆ I.A　　解析教程
(1) 連続関数の積分
(2) 微積分の基本定理
(3) 高階微分
(4) C^k 級関数のクラス

(5) 剰余付き Taylor の定理
6/13 より隔週 3 回 (6/13, 6/27, 7/11)

◆ I.C　局所コンパクト群の表現
(1) 速習 Banach 代数 II
(2) Banach* 代数の表現 I
8/1 より変則日程 3 回 (8/1, 8/15, 8/22)

◆ I.D　初等線型代数と多変数の微積分
(1) 2 次形式と極値の分類
(2) 高階導関数のテンソル表示
(3) 剰余付き Taylor 公式
8/2 より隔週 3 回 (8/2, 8/16, 8/30)

◆ I.E　微分方程式概論
(1) 周期係数を持つ線型微分方程式
(2) 解析的微分方程式
6/7 より変則日程 6 回 (6/7, 6/21, 7/5, 7/26, 8/9, 8/23)

◆ I.H　可換代数序論
(1) 素イデアル、極大イデアル
(2) イデアルの演算 II
(3) 多項式代数による各種イデアルの例の検討
6/14 より変則日程 6 回 (6/14, 6/28, 7/12, 8/2, 8/16, 8/30)

◆ E.C　微分多様体概論
(1) Cohomology 環
6/14 より隔週 3 回 (6/14, 6/28, 7/12)

◆ M.A　関数解析概論
(1) 正元、正の線型形式 II
(2) 遺伝的 C^*-代数
(3) 正の線型形式
7/4 より変則日程 3 回 (7/4, 7/25, 8/8)

◆ M.B　C^*-代数の表現論
(1) 原始イデアルと既約表現
6/7 より隔週 3 回 (6/7, 6/21, 7/5)

◆ M.C　Sobolev 空間
(1) Sobolev の埋蔵定理 (続)
7/26 より隔週 3 回 (7/26, 8/9, 8/23)

[料金]
通常講座
一括払い ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い 3 回のセミナー　1、2 回目￥12,000（学割￥9,000）　3 回目￥10,000（学割￥9,000）
6 回のセミナー　1 回目￥6,500（学割￥6,000）
2 回目以降￥5,500（学割￥4,000）

会員からのメッセージ

今回は長野県在住の会員である范揚武さんに寄稿していただきました。

■自己紹介から
会員の范揚武と申します。この度、桑野先生から、お正月セミナー(「全ては Riesz- Markov-Kakutani の定理から始まる。」*）についての概略と感想を会報に寄せてみてはどうかとのお話を頂きました。良い勉強になるとの先生の親心と思って、未熟ではありますが書かせていただくことにしました。
セミナーの項目は、概ね以下のようなものでした。

1. C^*-代数の定義
2. 単位付き可換 C^*-代数の Gelfand 表現定理
3. 自己共役元と正元の特徴づけ
   (1) $C(X)$ の場合（X はコンパクト・ハウスドルフ空間、以下同じ）
   (2) $L(H)$ の場合（H はヒルベルト空間、$L(H)$ は有界線型作用素全体）
   (3) C^*-代数の場合
4. 正の線型形式
   (1) 定義
   (2) Riesz-Markov-Kakutani の定理と（上記の）Gelfand 表現
   (3) 正の線型形式を使って $C(X)$ から L^2 函数を構成する話

主題は、上記 4 です。個々の話はついていけたのですが、全体の繋がりが見通せずきれいにまとめらていませんが、概要は次のようなものでした。
A を単位付き可換 C^*-代数、X を指標空間（コンパクト・ハウスドルフ空間になる)、$M(X)$ を X 上のラドン測度全体とすると、「A と $C(X)$ は等長＊同型」(Gelfand 表現定理）だから、Riesz-Markov-Kakutani の定理を使うと、「A^* と $(C(X))^*$ と $M(X)$ は、バナッハ空間の等長同型」が従います。
ここで、Riesz-Markov-Kakutani の定理は、「コンパクト・ハウスドルフ空間 Y について、$(C(Y))^*$ と $M(Y)$ がバナッハ空間の等長同型である」という定理で、本質は、全射性、特に正の線型形式に対して、正のラドン測度が対応するところにあります。
これと関連して、測度論を用いずに、正の線型形式 ϕ を使って $C(X)$ から X 上の L^2 空間 $L^2(X,\mu)$ を構成することができることを示さ

れました（フォン・ノイマンの方法）。

セミナーでは、Gelfand 表現定理、Riesz-Markov-Kakutani の定理の命題は説明してくださり、$L^2(X,\mu)$ の構成も、論理の流れを一つ一つ丁寧に話してくれました。

Gelfand 表現定理と Riesz-Markov-Kakutani の定理をつなげると、C^*-代数の方にも測度と絡む話がありそうなことは、印象に残っています。この点に関して、実は手元のノートに、「$L(H)$ の部分 C^*-代数上で測度を作りたくなる」との記載（板書ではなく先生が口頭で話されたことをメモにしたものだと記憶しています。）があるのですが、まだ自分ではうまく繋げることができていません（普段の講座でもたまにあることですが、勉強していくうちに何かのきっかけで蘇ってくることがあり、これも楽しみです。）

$L^2(X,\mu)$ の構成では、正の線型形式がもつ構造的な性質の一つを見たように思います。Riesz-Markov-Kakutani の定理の証明で、まず正の線型形式をもとに正測度を作ったことと合わせて整理できれば面白いと考えています。

前後してしまいましたが、主題の前の布石としての「自己共役元と正元の特徴づけ」の話もとても勉強になったので、正元の方だけでも簡単に紹介したいと思います。

$C(X)$、$L(H)$、C^*-代数のいずれについても、正元は、「元 f のスペクトルが正値」⇔「元 g が存在して $f = g * g$ と表せる（$L(H)$ の場合は、さらに「$< f(x), x >$ が正値」も加わる）。」として特徴づけができるという話ですが、セミナーでは、$C(X) \to L(H) \to C^*$ の順に話していただき、諏訪先生は、構成が音楽的とおっしゃっていました。

$C(X)$ や $L(H)$ は、C^*-代数の一種なので、同じ表現ができるのは当然ですが、セミナーの話をきいて、$L(H)$、 C^*-代数の正元の定義が自然な拡張になっていること、スペクトルや共役元との関係でとらえる方が、むしろ正元の本質をついているような気がして、うれしい「気づき」でした。そのためには、$C(X)$ の正元を「$f(x) \geq 0$」とすることから見方を変えて、「スペクトルが正値」に言い換える必要があり、数学でよく登場する逆（というか構造）から捉え直すと本質が見えるという現象でした。

以上、自分なりにまとめてみましたが、思うようにまとまらず、また誤解等はないかと不安です。その折には悪しからずご容赦ください。

最後になりましたが、先生はじめ皆様の健康をお祈りいたします。工房で会える日を楽しみにしています。

注 *) お正月セミナー 2020 年 1 月 12 日「すべては Riesz-Markov-Kakutani の定理から始まる」　講師　桑野耕一

写真１：范揚武さん

入門桑野道場（第 43 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 F がアフィン部分空間であるとは，
任意の点 $x, y \in F$ に対して，x, y を結ぶ直線が F に含まれるときを言う．
$\mathbb{R}^n$ の凸集合 X が与えられたとき $f : X \to (-\infty, +\infty]$ が凸関数であるとは
任意の $x_1, x_2 \in X$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ を満たすときを言う．

1. A を $\mathbb{R}^n$ のアフィン部分空間とする．
   このとき A が $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間である必要十分条件は $\mathbf{0} \in A$ であることを示せ．
2. $p \geq 1$ と $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\eta_p(x) := \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

   と定義する．

(a) $B_p := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \eta_p(x) \leq 1\}$ とおくと B_p は凸集合であることを示せ．
ただし $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto |\xi|^p \in \mathbb{R}$ が凸関数であることは認める．

(b) 任意の $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\eta_p(x+z) \leq \eta_p(x) + \eta_p(z)$$

$$\text{すなわち} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \zeta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |\zeta_j|^p\right)^{1/p}$$

であることを示せ．（ミンコフスキーの不等式）

(c) $\eta_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は正斉次凸関数であることを示せ．すなわち f は凸関数かつ任意の $\alpha \geq 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ が成立することを示せ．

チャレンジ問題

問題 2.(b) のミンコフスキーの不等式から次のヘルダーの不等式が導出できるか？
$p > 0\,, q > 0\,, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす任意の p, q と任意の $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j \zeta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |\zeta_j|^q\right)^{1/q}$$

訂正とお詫び

問題 2.(c) に間違いがありました．申し訳ございません．訂正してお詫び申し上げます．

- 誤 ：すなわち f は凸関数かつ任意の $\alpha \geq 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ が成立することを示せ．
- 正 ：すなわち η_p は凸関数かつ任意の $\alpha \geq 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\eta_p(\alpha x) = \alpha \eta_p(x)$ が成立することを示せ．

解答

1. A が $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間ならば $\mathbf{0} \in A$ であることは明らかである．逆を示す．
アフィン部分空間 A が $\mathbf{0} \in A$ を満たすとする．
仮定より $A \neq \emptyset$ であることは明らかである．
任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と任意の $x \in A$ をとる．A はアフィン部分空間なので

$$\lambda x = (1-\lambda)\mathbf{0} + \lambda x \in A \tag{1}$$

任意の $x_1\,, x_2 \in A$ に対して，A はアフィン部分空間なので

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in A$$

(1) より

$$2 \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = x_1 + x_2 \in A$$

以上により A は $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間．

2. (a) 任意の $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in B_p$ と任意の $t \in [0,1]$ をとり，$f(\xi) := |\xi|^p$ ($\xi \in \mathbb{R})$ とおく．

すると $\eta_p(x) \le 1$ かつ $\eta_p(z) \le 1$．f が凸関数であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
\eta_p((1-t)x+tz)^p &= \sum_{j=1}^{n} |(1-t)\xi_j + t\zeta_j|^p = \sum_{j=1}^{n} f((1-t)\xi_j + t\zeta_j) \\
&\le \sum_{j=1}^{n} ((1-t)f(\xi_j) + tf(\zeta_j)) = (1-t)\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) + t\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j) \\
&= (1-t)\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p + t\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^p = (1-t)\eta_p(x)^p + t\eta_p(z)^p \le (1-t)+t = 1
\end{aligned}
$$

以上により $(1-t)x+tz \in B_p$．したがって B_p は凸集合．

（b）任意の $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ をとる．$x = \mathbf{0}$ または $z = \mathbf{0}$ のときは明らかに等号成立．よって $x \neq \mathbf{0}$ かつ $z \neq \mathbf{0}$ のときを考える．このとき $\eta_p(x) > 0$ かつ $\eta_p(z) > 0$．

$$
\begin{aligned}
\frac{x+z}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} &= \frac{x}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} + \frac{z}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} \\
&= \frac{\eta_p(x)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} \cdot \frac{x}{\eta_p(x)} + \frac{\eta_p(z)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} \cdot \frac{z}{\eta_p(z)}
\end{aligned}
$$

ここで $\dfrac{\eta_p(x)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} > 0$ かつ $\dfrac{\eta_p(z)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} > 0$ かつ

$$\frac{\eta_p(x)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} + \frac{\eta_p(z)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} = 1.$$

さらに $\dfrac{x}{\eta_p(x)}, \dfrac{z}{\eta_p(z)} \in B_p$ より B_pの凸性から $\dfrac{x+z}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} \in B_p$．

よって $\dfrac{\eta_p(x+z)}{\eta_p(x)+\eta_p(z)} = \eta_p\left(\dfrac{x+z}{\eta_p(x)+\eta_p(z)}\right) \le 1$．

すなわち $\eta_p(x+z) \le \eta_p(x) + \eta_p(z)$．

（c）「$\alpha \ge 0\,, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \eta_p(\alpha x) = \alpha\eta_p(x)$」であることは η_p の定義より明らか．
また直前の性質と 2.(b) から $t \in [0,1]\,, x, y \in \mathbb{R}^n$ ならば
$\eta_p((1-t)x+ty) \le \eta_p((1-t)x) + \eta_p(tx) = (1-t)\eta_p(x) + t\,\eta_p(y)$．
以上により $\eta_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は正斉次凸関数．

・チャレンジ問題についてはまだ解決していません．引き続き皆様の解答をお待ちしております．

今回の問題

1.（a）Young の不等式
$p \ge 1\,, q \ge 1$ かつ $1/p + 1/q = 1$ のとき

$$a > 0, b > 0 \text{ ならば } ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つことを示せ．

（b）一般化された Young の不等式
$r \ge 2\,, p_j \ge 1 (1 \le j \le r)$ は $\sum_{j=1}^{r} 1/p_j = 1$ を満たすとする．
さらに $\alpha_j > 0 (1 \le j \le r)$ は任意の正数の r 個組とする．

このとき

$$\prod_{j=1}^{r} \alpha_j \leq \sum_{j=1}^{r} \frac{{\alpha_j}^{p_j}}{p_j}$$

が成り立つことを示せ.

2. 2 項係数に関する関係式
   $m \geq 0\,, n \geq 1$ を満たす任意の整数 $m\,,\,n$ に対して

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{m+n}{n}$$

   が成り立つことを示せ.

問題ついて一言

1. 2020 年春学期 MC で扱われた題材です.
2. 私が以前に見つけた式ですが，最近再発見しました．帰納法で比較的容易に証明できますが，帰納法を用いない方法も考えてほしいです.

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2020 年 8 月 31 日（月）
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2020 年 6 月 1 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401