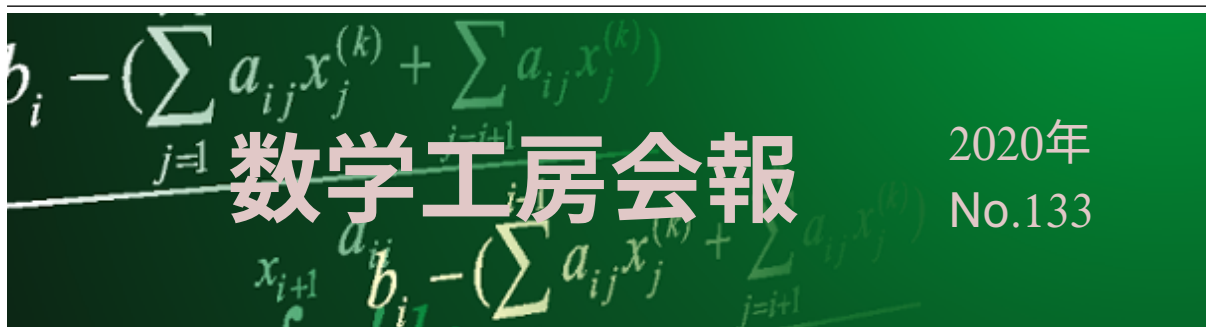




数学工房会報

2020年
No.133

巻 頭 言

コロナ禍による休業および収入減少により、教室の維持が難しくなっていましたので会員の皆様に寄付のお願いをしたところ、多くの会員の方からご寄付が寄せられました。ありがとうございます。とりあえずは講座を再開でき、何とか夏学期を乗り切り、秋学期の準備にかかることができました。この場を借りて皆様に感謝を申し上げます。

◆この頃思うこと

学生の時に指導教官から数学への責任感が必要だと言われた事があります。数学は面白いからやるので、「責任感」とは職業としての倫理のことと若い頃は思っていたのですが、最近、この言葉の真意はそれだけではないと思うようになりました。実際、誠実に責任感を持って数学に向かい合わないと、どうしようもない陳腐でつまらぬものになり、数学の女王様からそっぽを向かれ、得るものが何もない単なる人生の浪費になってしまいます。ここで言う責任感は武術という礼式に当たるのではないのでしょうか？個人で行うならそれでも当人だけの問題ですが、輪講などでは一人でも数学に対する礼を欠く参加者がいると、その悪影響が全員におよび、せっかくの協同の時間を台無しにしてしまいます。私は出来不出来を言っているのではありません。結果として、出来が悪かったり理解不充分だったとしても理解しようと誠実に努力したことは話の節々から伝わってきます。そしてセミナーの場で問題が解決した時の嬉しさは、困難が大きかっただけ大なるものがあります。礼を欠くのは別の問題です。数字工房の会員の皆さんならご存知のことでしょう。じっくりと誠実に数学に向き合って、森羅万象の背後にある数学的秩序と対話する喜びを味わいましょう。

数学工房 桑野耕一 2020年 秋学期に

秋学期講座案内

2020年
9月～12月

入門

(変則日曜 6回 11:00-13:00)

9/13、9/27、10/11、11/1、11/15、11/29

◆ID 多変数の微積分と初等線形代数

- <0> 対称変換と極値の分類
- <1> 高階微分と剰余付き Taylor 公式
- <2> 体積形式の積分 I

(隔週土曜 3回 14:00-18:00)

11/7、11/21、12/5

◆IH 可換代数概論 加群 I

- <1> 加群と加群の準同型
- <2> 部分加群と剰余加群
- <3> 直和と直積
- <4> 部分加群の種々の演算
- <5> 有限加群

入門・初級

◆IA 解析教程

Taylor 公式と幾つかの応用を丁寧に扱います。次の節は実解析関数の一般論で、古典解析の土台です。この節での関数の展開と Taylor 公式を混同している人が多い、注意すべきところです。今学期の講座 IA はこの節の歴史的にも、理論的にも自然な発展編です。最後に私たちに最もなじみ深い初等超越関数たちを統一的に扱います。

- <1> 剰余付き Taylor 公式
- <2> 実解析関数
- <3> 初等超越関数

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
9/19、10/3、10/17

◆ IE 微分方程式概論

古典解析の自然な発展であるとともに、群論と結びつき現代数学への道を拓いた深い内容を持つ世界への準備となるでしょう。この講座は、夏学期からのつづきですが、古典解析と複素関数論の基本的な知識がある人にとっては、新規講座として受講できるようになっています。

- <0> 確定特異点型微分方程式まとめ
- <1> Bessel 関数
- <2> 超幾何関数
- <3> Fuchs 型微分方程式

(変則日曜 6 回 11:00–13:00)
9/20、10/4、10/18、11/8、11/22、12/6

初級

◆ EC 微分多様体概論 - Riemann 多様体上の積分 I

まずは、向きの数学定式化から始めます。向きの概念を言い換えると正の体積形式の概念が出てきます。これを基礎にして積分を定義するわけです。線型代数の奥深さを実感されるでしょう。最終的には、コンパクト多様体上の Laplacian と調和関数あたりまで扱う予定です。

- <1> 多様体上の向きと体積要素
- <2> 微分形式の積分
- <3> Stokes の定理

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
9/20、10/4、10/18

◆ ED 現代的応用解析序論 I

- <1> 測度の一般論から
- <2> 実解析学の基礎事項（特に Lebesgue 積分と微分）

(隔週土曜 3 回 14:00–18:00)
11/14、11/28、12/12

初級・中級

◆ IC 局所コンパクト群の表現

今回は、 C^* 代数のカテゴリにおける可換 C^* 代数の Gelfand の表現定理と関数演算への応用の復習から入り、Banach 代数の表現の準備、そして Von Neumann 代数に入ります。この講座では、Von Neumann 代数の定義は、講座 IB と異なって Double commutant が自分自身と一致するという、もう一つの定義を採用しました。Banach 代数の表現論は、結局 C^* 代数の表現に帰着することを理解し、一般

化された Plancherel の定理や Bochner の定理を導きます。作用素環の知識を違う切り口から深めたい人にはお勧めします。

- <1> 可換 C^* 代数の Gelfand 表現
- <2> Banach 代数の表現

(変週土曜 3 回 14:00–18:00)
9/26、10/10、10/31

◆ MA 関数解析概論 - 正線形形式と Gelfand-Naimark の定理

- <1> 正線形形式 II 正線型形式の特徴付けから A^* の Jordan 分解
- <2> GNS 構成法とお Gelfand-Naimark の定理

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
11/8、11/22、12/6

中級

◆ MB C^* 代数の表現

表現の縮小、拡大とそれに伴って、生じる原始イデアルの空間、一般指標空間の間の関係から始めます。

- <1> 表現の拡張と縮小
- <2> Liminal、Postliminal Algebra

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
9/13、9/27、10/11

◆ MC Sobolev 空間

- <0> 高階の Sobolev の埋蔵定理
- <1> Fourier 変換概略
- <2> Sobolev 空間と Fourier 変換

(隔週日曜 3 回 14:00–18:00)
11/1、11/15、11/29

講座料について

各講座、税込 ¥32,000(学割 ¥25,000) です。
オンラインの場合 ¥25,000 (ただしオンライン受講可能な場合) 途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目 ¥12,000(学割 ¥9,000)、3 回目 ¥10,000(学割 ¥9,000) です。
・6 回講座は、1 回目 ¥6,500(学割 ¥6,000)、2 回目以降 ¥5,500/回 (学割 ¥4,000/回) です。
・オンラインの場合は、各回 ¥9,000 です。

講座、研究会等に御参加いただくには該当年度の数学工房の年会費がお払込み済みであることが必要です。

- ・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金 口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
- ・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

会員からのメッセージ

会員の田中英輝さんにアイルランド紀行文を寄せてもらいました。

「ゴセツ-フィッシャー書簡集」

私は数学工房の自主セミナーの1つ、応用数理の基礎数学の研究会に参加しています。2019年8月末、仕事の関係でアイルランドの首都ダブリンで開催される国際会議に参加することになりました。工房での研究会（当時は数理統計の本を輪講）の際、メンバーの逸見昌之さんにダブリン行きについてお話すると、「ギネスビールの見学コースのあるギネス・ストアハウスにはゴセツのプレートがあるので見てきたらいいですよ。」と教えてくださいました。「ただし、目立たないところにひっそりと飾ってあるので、見つけるのが難しいかもしれません。私も初回は見つけられませんでした。」とのことで、そのような貴重なプレートならぜひ見つけ出し、写真を撮ってこようとダブリンに向かいました。

ウィリアム・ゴセツ（1876-1937）は「基礎統計学Ⅰ 統計学入門（東京大学出版会）」で、近代統計学理論を作った10人に挙げられていて、その業績は「 t 分布の導入。小（精密）標本理論」と書かれています。おなじみの平均値の t 検定の基礎を作った人です。ゴセツはオクスフォード大学のニュー・カレッジで自然科学（化学）と数学を学んだあと、1899年23歳でアイルランドのビール会社のギネス（Guinness）に就職し、そこでずっと過ごし、最後には総主任技師の要職に付いています。



ゴセツのプレート

ゴセツはギネス在職中に多数の論文を書きましたが、不思議なことに一篇の論文を除いて全て「スチューデント」というペンネームを使っています。このことは、多くの統計の教科書で「スチューデント」の t 分布の名前の由来として紹介されていますが、なぜペンネームなのでしょう。ウィキペディアによると、情報漏洩に懲りた会社がビール、ギネスという単語、本名を使った論文発表を禁止したことを示す文書がギネスのアーカイブから発見されているとのことです。つまり会社の命令だったことになります。

さて、会議の空いた時間にバスでダブリン中心部にあるギネス・ストアハウスに出かけました。早速受付の女性にゴセツのプレートのありかを聞いたのですが、そんなものは聞いたことがないとのつれない返事。「いや、ギネス社の誇る有名な統計学者のプレートが飾ってあることは日本の友人から聞いてわざわざやってきたのだ」と言っても、受付の女性は首を振るばかり。こうなったら自力で発見するしかない。多少無然としつつ、覚悟を決めて見学コースに入りました。するとすぐにハンサムな青年が、「ゴセツのプレートを探している人ですか。」と声をかけてきました。そうだと答えると、「私はこの案内係で、受付に頼まれてあなたを探していました。確かにゴセツのプレートはどこかにありますが、覚えていないので探してきます。しばらく待っていてください」とのこと。

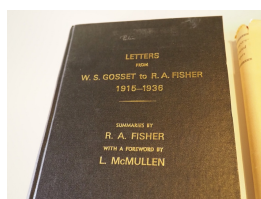
あの有名なゴセツの扱いがこんなものなのか？と驚いて待っていると、「こちらです。見つけました。」と男性が戻ってきました。受付から階段を登った見学コースの最初のコーナー、スクリーンでいろいろな映像が映し出されているフロアの壁に50センチくらいのプレートが飾ってありました。プレートにはゴセツの名前、chief brewer、生年と没年、化学者かつ統計学者、student t -test としか書いてありません。さすがにこれだとゴセツを知っている人だけにしか意味をなさないでしょう。見る人もなくひっそりと佇んでいます。じっと見つめているとたまに目を向けるお客さんもいるのですが、すぐに通り過ぎます。何でこんなプレートを熱心に見ているのだらうと思われたかもしれません。いつの間にか案内の青年はいなくなりましたが程なく戻ってきて、「もし興味があればアーカイブ担当者に会いませんか。ゴセツについて説明してくれると思います。」と誘ってくれました。多少恐縮しながらもぜひお願いして、応接室で待つことしばらく、ジェシカ・ハンディさんという若い女性が現れました。

彼女はギネスで社内文書管理を担当していて、会社の歴史を調べるのが仕事ですが、ギネスで働き始めて間もないため、これから色々調べたいと自己紹介してくれました。ゴセツの業績には詳しくないとのことでしたが、有名な統計学者であること、ペンネームで論文を発表していたことは知っていました。ペンネームでの発表についてはウィキペディアに書かれている情報漏洩だけではなく、研究者間の嫉妬などもあったようだと言ってくれました。ハンディさんの調査が進むと色々なことが分かるかもしれません。

今回の私の突然の訪問について、ゴセツの正式の調査で研究者がストアハウスに来ることはあるらしいのですが、私のようなゴセツ目当ての一般見学者は殆どいないとのことでした。私はストアハウスにゴセツの説明がないこと、何よりギネスの関係者がこの有名な統計学者のことを全く知らないことに驚いたことを伝えました。そして、「ビッグデータ解析や人工知能が流行していて、統計学に関心を持つ人は増えている。積極的にゴセツの業績を展示するとそれ目当ての見学者がもっと来るようになると思う」と伝えました。現在ストアハウスの展示内容を見直すタイミングらしく、ハンディさんは考えてみたいと言ってくれました。

ハンディさんと話が弾む中、別室から二冊の本を持って来てくれました。一冊は市販されていた

ゴセットの論文集「STUDENT'S Collected papers」で、もう一冊はゴセットとフィッシャーの書簡集「Letters from W. S. Gosset to R. A. Fisher 1915-1936」です。こちらはギネス社内向けに作成された非売品の本です。ハンディさんは親切にもこちらを私に分けてくれると言います。さすがに興味本位レベルの私がいただいても申し訳ないと遠慮したのですが、結局いただくことになりました。



ゴセット-フィッシャー書簡集

ゴセットは統計学の大御所のピアソンの研究室で一時研究したのですが、ゴセットの研究を評価したのは別の大御所のフィッシャーでした。そのフィッシャーとゴセットの書簡集です。本には 93 の書簡が収録されていて、その殆どはゴセットからフィッシャーに宛てた手紙です。手紙には見覚えある記号などありますが、背景が殆ど書かれていないため素人が解読するのは難しそうです。しかしゴセットの研究が生まれる過程を知るには貴重な資料だと思われます。

このような貴重な資料を個人で保有するのもどうかと思い、帰国後、逸見さんにお聞きしたところ、お勤め先の統計数理研究所には所蔵があるとのことでした。ということでしばらく私の手元で保管することにしました。時間ができたら解読してみたいと思います。コロナウイルスの蔓延で簡単にアイルランドに行けなくなってしまったのですが、次回訪ねた時、ゴセットの展示が増えていたら愉快的ことですね。もしダブリンにいらっしゃる機会があればぜひ、ギネス・ストアハウスをお訪ねください。ゴセットのプレートだけでなく、見学コースは充実していますし、何より最後に 1 パイントの美味しいギネスの黒ビールがいただけるのが楽しみです。



ギネスビール



入門 桑野道場 (第44回)

//記 桑野道場師範代 半田伊久太//



前回の問題

1. (a) Young の不等式
 $p \geq 1, q \geq 1$ かつ $1/p + 1/q = 1$ のとき

$$a > 0, b > 0 \text{ ならば } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つことを示せ.

- (b) 一般化された Young の不等式
 $r \geq 2, p_j \geq 1 (1 \leq j \leq r)$ は $\sum_{j=1}^r 1/p_j = 1$ を満たすとする.
 さらに $\alpha_j > 0 (1 \leq j \leq r)$ は任意の正数の r 個組とする.
 このとき

$$\prod_{j=1}^r \alpha_j \leq \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j^{p_j}}{p_j} \quad (*)$$

が成り立つことを示せ.

2. 2 項係数に関する関係式
 $m \geq 0, n \geq 1$ を満たす任意の整数 m, n に対して

$$\sum_{k=0}^m \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{m+n}{n}$$

が成り立つことを示せ.

解答

会員の逸見昌之さんより問題 1. の注意及び問題 2. の解答をいただきました。

1. 桑野先生の講座での証明を紹介します。

(a) $f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb$, $t \in [0, \infty)$ とおく。

すると $f'(t) > 0$ ($t > b^{\frac{1}{p-1}}$) かつ $f'(t) < 0$ ($t < b^{\frac{1}{p-1}}$)。したがって f は $t = b^{\frac{1}{p-1}}$ で最小値をとる。

$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{b^p}{q} - b^{(1+\frac{1}{p-1})} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} b^q = \left(\frac{1}{p} - 1\right) b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} b^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

$$\text{よって } 0 \leq f(t) \text{ } t \in [0, \infty). \text{ したがって } 0 \leq f(a) = \frac{a^b}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

(b) $r(\geq 2)$ に関する数学的帰納法により証明する。

$r = 2$ のときは (a) で示した Young の不等式である。

r に対して (*) が成立すると仮定する。

$r+1$ のとき $p_j \geq 1$ ($1 \leq j \leq r+1$) ($\sum_{j=1}^{r+1} 1/p_j = 1$), $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq r+1$) が与えられたとする。 $\beta := \sum_{j=1}^r 1/p_j$ とおくと, $\beta + 1/p_{r+1} = 1$ 。

よって $\prod_{j=1}^r \alpha_j, \alpha_{r+1}$ と $\beta, 1/p_{r+1}$ に Young の不等式を用いれば,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{r+1} \alpha_j &= \left(\prod_{j=1}^r \alpha_j \right) \alpha_{r+1} \leq \beta (\alpha_1 \dots \alpha_r)^{1/\beta} + \frac{(\alpha_{r+1})^{p_{r+1}}}{p_{r+1}} \\ &= \beta \prod_{j=1}^r (\alpha_j)^{1/\beta} + \frac{(\alpha_{r+1})^{p_{r+1}}}{p_{r+1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

$\beta = \sum_{j=1}^r 1/p_j$ だから $\sum_{j=1}^r 1/(\beta p_j) = 1$ 。

$(\alpha_1)^{1/\beta}, \dots, (\alpha_r)^{1/\beta}, \beta p_1, \dots, \beta p_r \geq 1$ に数学的帰納法を用いれば,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^r (\alpha_j)^{1/\beta} &\leq \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j)^{1/\beta \cdot \beta p_j}}{\beta p_j} = \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j)^{p_j}}{\beta p_j}. \\ \text{よって } \beta \prod_{j=1}^r (\alpha_j)^{1/\beta} + \frac{(\alpha_{r+1})^{p_{r+1}}}{p_{r+1}} &\leq \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j)^{p_j}}{p_j} + \frac{(\alpha_{r+1})^{p_{r+1}}}{p_{r+1}}. \\ (1) \text{ より } \prod_{j=1}^{r+1} \alpha_j &\leq \sum_{j=1}^{r+1} \frac{(\alpha_j)^{p_j}}{p_j}. \text{ これより帰納法が完了した.} \end{aligned}$$

2. 逸見さんの解答を紹介します。

二項係数の母関数

$$(1+x)^N = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} x^j \quad (N = 0, 1, 2, \dots)$$

を用いて示す。

まず, 多項式 $(1+x)^{m+n}$ は以下のように変形できることに注意する。

$$\begin{aligned} (1+x)^{m+n} &= 1 + \sum_{k=1}^{m+n} \{(1+x)^k - (1+x)^{k-1}\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m+n} (1+x)^{k-1} \{(1+x) - 1\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m+n} x(1+x)^{k-1} \end{aligned}$$

この等式の両辺の x^n の係数を比較すると、右辺では $k \geq n$ である $(1+x)^{k-1}$ の x^{n-1} の係数を全て加えたものとして得られるので、以下の関係式が成り立つ。

$$\binom{m+n}{n} = \sum_{k=n}^{m+n} \binom{k-1}{n-1} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{n-1} = \sum_{k=0}^m \binom{n-1+k}{n-1}$$

これが示すべき式である。

解説

1. 逸見さんより次の注意をいただきました。

$\sum_{j=1}^r 1/p_j = 1$, $p_j > 0$ と $x_j > 0$ ($1 \leq j \leq r$) が与えられたとき、

$$\text{対数関数の Jensen 不等式 } \sum_{j=1}^r \frac{1}{p_j} \log x_j \leq \log \left(\sum_{j=1}^r \frac{x_j}{p_j} \right)$$

$$\text{と一般化された Young の不等式 } \prod_{j=1}^r \alpha_j \leq \sum_{j=1}^r \frac{(\alpha_j)^{p_j}}{p_j}$$

は $\mathbb{R}_+^r \ni (x_1, \dots, x_r) \mapsto (\alpha_1^{p_1}, \dots, \alpha_r^{p_r}) \in \mathbb{R}_+^r$ なる全単射を通して同値であるという指摘です。さらにこの不等式は p_j の値として $p_j = +\infty$ も含められるということです。

また、講座では一般化された Young の不等式は以下の一般化された Hölder の不等式の導出の準備として扱われました。

(X, μ) : 測度空間, $p_j \geq 1$ ($1 \leq j \leq r$) は $\sum_{j=1}^r 1/p_j = 1$ を満たすとする。

このとき $f_j \in L^{p_j}(X, \mu)$ $1 \leq j \leq r$ に対して、

$$\prod_{j=1}^r f_j \in L^1(X, \mu) \text{ かつ } \int_X \left| \prod_{j=1}^r f_j(x) \right| d\mu(x) \leq \prod_{j=1}^r \|f_j\|_{L^{p_j}}$$

が成立する。

2. 直接数学的帰納法によっても証明できますが、逸見さんはいわゆる母関数の方法でエレガントに証明されています。私はこの恒等式を以下のように見つけました。

$\mathcal{P}_m$ を変数 $X_1, \dots, X_n$ の m 以下の多項式全体の作る線型空間, $\mathcal{H}_j$ ($1 \leq j \leq m$) を j 次斉次多項式全体 (ただし零多項式を含む) からなる $\mathcal{P}_m$ の部分空間とする。

すると $\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_m$ が成立する。両辺の次元を比較して求める恒等式を得る。

今回の問題

E : 体 K 上の有限次元線型空間, $\dim E = n$ とする。

F を E の線型部分空間, $F^\circ := \{\varphi \in E^* \mid F \subset \text{Ker } \varphi\}$ とおく。

このとき以下を示せ。

ここで E^* は E の双対空間, すなわち $E^* = \{\varphi: E \rightarrow K \mid \varphi \text{ は } K\text{-線型}\}$ 。

1. F° は E^* の線型部分空間。
2. F の基底を $\{b_1, \dots, b_r\}$ とする。これに $\{b_{r+1}, \dots, b_n\}$ を付け加えて E の基底を作ることができる。
 $\{b_1^*, \dots, b_r^*, b_{r+1}^*, \dots, b_n^*\}$ を双対基底とすると, $\{b_{r+1}^*, \dots, b_n^*\}$ は F° の基底である。
3. $\dim F^\circ = n - \dim F$ 。
4. $\dim F = r$ とする。
 $\omega_1, \dots, \omega_{n-r} \in E^*$ について

$$F = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \omega_j$$

であれば $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-r}\}$ は F° の基底である。

逆に, F° の基底 $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$ があれば

$$F = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \eta_j$$

問題ついて一言

以前出題された問題（会報 No.128）と重複するところもありますが，重要性に鑑み再度出題しました。今季の夏講座 EC（可積分系）で扱われた題材です．解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2020 年 12 月 31 日（木）

（郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします）

数学工房 2020 年 9 月 20 日発行
発行人 桑野耕一
編集人 増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先

オフィス電話：042-495-6632

数学工房連絡用携帯：080-6576-2691

連絡は極力 e-メールでお願いします。

e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ

<http://www.sugakukobo.com/>

数学工房教室

〒170-0003

東京都豊島区駒込 1-40-4

全国蕎麦製粉会館 2F 202・203

数学工房オフィス

〒204-0023

東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401