

2021 年 春 卷 頭 言

疫病の大流行は、確かに恐怖だが、次の新しい時代を準備する母体にもなりえます。実際、中世が終わりルネッサンスを準備したのはヨーロッパの人口の 1/3 を死に至らしめた黒死病の大流行であったといわれています。Newton の大作ができたのも疫病の大流行により大学が閉鎖され 2 年間故郷へ疎開していた時期のことでした。Galilei の提唱した数学的科学の基礎がこうして確立され、数学的方法が自然研究の主流になり、そうして解析学の輝かしい歴史が始まりました。コロナ禍で不自由を強いられることも多々ありますが私たちには、数学という道づれがいつもそばにいます。Newton とは言わないまでも、今までやりたくてもできなかった勉強や研究をするチャンスになるかもしれませんね。

◆コロナが私たちの日常を支配し始めてそろそろ 1 年になります。思い起こすと去年の 2 月になると何やら雲行きが怪しくなり、外出、行事、催しの自粛ムードが始まり、3 月に入ると、数学工房でも、職業上、東京に出られないという受講者も出てきて、春学期後期講座は途中で、レジュメ配布とメールによる質問受付という形でやることになってしまいました。4 月には、先の見通しも立たないまま休業要請に協力するという一方で、数学工房始まって以来、初めて 2 か月間にわたる休業を余儀なくされました。相手は自然の摂理、人間の楽観的、ご都合主義的希望は通用するものではないと思いながらも、やはりじたばたと、会員の協力をいただいてオンライン講義の実験などをしておりました。今までは、会員からのせっかくの助力の申し出があっても、真剣に検討する気が起きなかったことですが。しかし効用もありました。普段はじっくりと構想を練る暇もなく準備に追われる自転車操業です。本当は私の年を考えると数学工房をどのように終わらせるかを考えねばならない！その日が来るのは後継者が無い限り自明のことなのに。終わりの見えない疫病の大流行という現実を前に、否応なしの教室閉鎖も視野に入れなくてはならない、この期に及んで問題に向き合う余裕が初めて出来た次第です。結局、会員の皆さんのご寄付や一部の講座のオンライン化、また数学工房の役割などについて、終わり方についてのヒント等々、色々助けていただいたおかげで何とか持ちこたえています。ご協力に、この場を借りて感謝いたします。

◆最後に今後の方針について述べます。

数学工房の活動の締めくくりを見据えて抽象位相、抽象線型代数、現代的応用解析序論を今年度から数学工房の講座の柱に据えます。前者 2 領域への熟達者は、現代数学をお一人で学ばれる場合にはより強力な援軍になります。3 つ目は、応用解析に携わる人にとってこそ現代的な解析学は、有用な道具だと思われるからです。無論これは出発点で、基礎装備にすぎませんが、強力な助人です。抽象位相は今期春学期後期に開講します。抽象線型代数は現在その前段として抽象線型代数への招待をこの春学期から開講しています。また現代的応用解析序論は去年の秋学期から開講しています。最後にご報告になりますが、先日駒込教室の契約更新をしました。少なくともあと 2 年間は、数学工房という場を皆さんに提供できるようになりました。何の問題もなく、皆さんが教室に来られる日が来ることを願っています。

それでは、すっかり遅くなりましたが、今年も数学工房をよろしくお願いいたします。

2021 年 春 数学工房 桑野耕一

春 学 期 講 座 案 内

2021 年 1 月～4 月

2021 年春学期講座は、入門初級 3 講座、初級 2 講座、初中級 2 講座、中級 3 講座を開講します。

<< 春学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	初等超越関数	3 月 6 日	入門初級
I.C	局所コンパクト群の表現	1 月 17 日	中級
I.E	線型微分方程式と群論	1 月 24 日	初級
I.H	加群のテンソル積	3 月 13 日	入門初級
G	抽象線型代数への招待	1 月 23 日	入門初級
E.A	抽象位相 I	3 月 7 日	初中級
E.C	多様体概論	1 月 17 日	初中級
E.D	現代応用解析序論 II	3 月 14 日	初級
M.A	von Neumann 代数入門 I	1 月 16 日	中級
M.B	C^* -代数の基礎	1 月 24 日	中級

2/23 から 3/4 までは、数学工房はお休みです。ご注意ください。

◆ I.A 初等超越関数 級数で与えられる関数

本講座は 2019 年夏学期講座の数直線の捉え方から始まり 2020 年秋学期には実解析関数の基礎理論まで進んだ。

先学期の結果を踏まえて、指数関数、対数関数、三角関数、べき乗関数等が体系的に統一的に導入される。

(0) 定数係数の常微分方程式

(1) 指数関数、自然対数関数

(2) 三角関数

(3) べき乗関数

(4) 超越関数

3/6 より隔週 3 回 (3/6, 3/20, 4/3)

◆ I.C 局所コンパクト群の表現

(0) 復習

(1) Banach* 代数の * 表現

(2) Banach* 代数に付随する C^* -代数

1/17 より変則日程 6 回 (1/17, 1/31, 2/14, 3/7, 3/21, 4/4)

◆ I.E 線型微分方程式と群論 (歴史を含むまとめ)

Gauss の超幾何微分方程式に始まり、特異点の周りの解析接続という決定的なアイデアによって超幾何微分方程式の大域解としての Riemann の仕事を出発点に歴史的な流れに沿った概説。

1/24 より変則日程 6 回 (1/24, 2/7, 2/21, 3/14, 3/28, 4/11)

◆ I.H 加群のテンソル積

(1) 完全性

(2) 加群のテンソル積

(3) スカラー制限と拡大

3/13 より隔週 3 回 (3/13, 3/27, 4/10)

◆ G 抽象線型代数への招待

次年度から抽象線型代数の最終コースを開講する予定である。この講座の準備コースとして設けました。基礎から、アドバンストコースの応用までを視野に入れたコースは、これが最後になりますので、この講座は、線型代数の個別の知識以上に、現代数学の理論の読み方、基本的な道具を作り近付く方法を習得してもらうことが目的です。当然、基礎からやるとはいえ、通常、入門書にあるような基礎知識はないと肝心な部分をつかみ損ねる恐れがあります。このコースは、抽象線型代数へ向けての手解きです。

(1) 線型空間の定義と基本的な帰結

(2) Span, 独立、従属 基底、次元

(3) 線型写像の定義と基本的な性質

1/23 より隔週 3 回 (1/23, 2/6, 2/20)

◆ E.A 抽象位相 I

(1) 開集合系と位相空間、関連する概念

(2) 同値な他の概念

(3) 連続写像

(4) コンパクト性、連結性

(5) ネット、フィルター

3/7 より隔週 3 回 (3/7, 3/21, 4/4)

◆ E.C 多様体概論、Riemann 多様体上の積分 II

(1) 続微分形式の積分

(2) Stokes の定理

(3) 写像度

(4) ベクトル場の発散、Laplacian
1/17 より隔週 3 回 (1/17, 1/31, 2/14)

◆ E.D 現代応用解析序論 II 可測関数の積分

(1) 可測関数の積分から収束定理まで
3/14 より隔週 3 回 (3/14, 3/28, 4/11)

◆ M.A von Neumann 代数入門 I

< 0 > 基礎事項の概略

(1) 位相解析の基礎定理

(2) Hilbert 空間上の有界作用素

< 1 > 強作用素位相

(1) 自己共役作用素環の単調収束定理

(2) Double Commutant Theorem

1/16 より隔週 3 回 (1/16, 1/30, 2/13)

◆ M.B C^* -代数の基礎

(1) 続 C^* -代数の表現 Liminal, Postliminal C^* -代数

(2) C^* -代数のテンソル積

1/24 より隔週 3 回 (1/24, 2/7, 2/21)

[料金]

通常講座

一括前納 ¥32,000 (学割 ¥25,000)

各回払い 3 回のセミナー 1、2 回目 ¥12,000

(学割 ¥9,000) 3 回目 ¥10,000 (学割 ¥9,000)

6 回のセミナー 1 回目 ¥6,500 (学割 ¥6,000)

2 回目以降 ¥5,500 (学割 ¥4,000)

オンライン受講

一括前納 ¥25,000

各回払い ¥9,000/回

会 員 か ら の メ ッ セ ー ジ

今回は先日開催されたオンライン懇親会についてご報告します。

建国記念日の 2/11 に数学工房のオンライン懇親会が開催されました。私こと増田も懇親会に参加しましたので、そのご報告をします。

参加者は桑野先生と私を含めて、全員で 15 名でした。オンラインということもあり、場所の制約がないので、これだけの方が参加されたのだと思います。そういう私も北海道からの参加であり、他にも長野県や滋賀県からの参加がありました。このようなオンライン懇親会が実現できた背景には、やはりテクノロジーの発達があります。最近ではオンラインで多人数が会話できる無料のツールがいくつもあり、誰でも気軽に利用することができます。つい 10 年前まではオンラインで懇親会をやるなど考えることができませんでした。今回の懇親会では、オンライン会議のツールとしてよく話題になる Zoom を使いました。Zoom はセキュリティ上の問題が指摘されていたり、中国にサーバーがあるなど、個人的には Zoom を使って大丈夫かな、という懸念がありました。私は今回初めて Zoom を使いましたが、使ってみると非常に使いやすいかったです。世界中で Zoom が普及しているのもわかる気がしました。

さて、懇親会の方とはというと、桑野先生による冒頭の挨拶と乾杯の発声の後、恒例の全員による自己紹介をしました。今回は、桑野先生の方から参加者全員に対して、あらかじめ話す内容をメールで指示されていました。それは、数学を学んで一番苦労したこと、印象に残ったことは何か、あるいは最も印象に残る数学の定理

や数学書は何か、というものでした。皆さんそれぞれなぜ数学工房に入会したかを話された後、自分と数学との関わりについて話されました。逸見さんと原田さんはスライドを用いて説明されたのが印象に残りました。

他の人の話した内容をここで正確に再現する自信がないので、自分のことを書きたいと思います。私が数学工房に入会したのは 2006 年の 1 月だったと思います。当時私は数学検定 1 級に合格することに執着していました。何度かチャレンジしましたが、ことごとく失敗しました。独学で数学を勉強しても太刀打ちできないと思い、何かセミナーのようなものがないか探していました。このとき、たまたま雑誌の数学セミナーで会員募集の広告を見つけたことが数学工房との出会いです。私は工学部出身で、抽象的な数学とは全く無縁でした。最初は基本的な集合演算なども全く理解していませんでした。しかし、IA や IF などの基本コースを受講して、数学の基本事項がある程度理解できるようになると、だんだん数学の魅力に取りつかれていった次第です。現在は実家の事情で北海道の釧路市におり、数学工房のレギュラーコースには参加できませんが、年に 2 回ほど集中セミナーに参加しております。

話を懇親会に戻します。このような感じで 15 人がそれぞれ自己紹介していくので、自己紹介だけで 1 時間半ぐらいかかりました。自己紹介の後には会員同士で Q & A をざっくりばらんな雰囲気で行いました。オンラインでは全員が一度に話すことができませんので、桑野先生に指名された人が発言していききました。そして、最後は桑野先生が締め言葉を言って懇親会を終

了しました。

全体的な感想としては、場所の制約がなく誰でも懇親会に参加できるのは本当に便利だと思いました。去年はコロナのせいで集中セミナーに全く参加できなかったのが、この懇親会で個人的に懐かしい人たちに会えたのがうれしかったです。しかし、オンラインの環境では、リアルな懇親会とは違って、あちらこちらで自然に小グループに分かれて、それぞれで雑談するということできません。自分としては、一刻も早くコロナが終息してリアルでセミナーを受講し、リアルで皆さんに会いたいと願ってやみません。

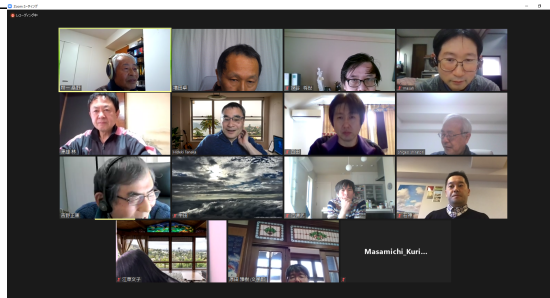


写真 1 : Zoom によるオンライン懇親会



前回の問題

E : 体 K 上の有限次元線型空間, $\dim E = n$ とする.

F を E の線型部分空間, $F^\circ := \{\varphi \in E^* \mid F \subset \text{Ker} \varphi\}$ とおく.

このとき以下を示せ.

ここで E^* は E の双対空間, すなわち $E^* = \{\varphi : E \rightarrow K \mid \varphi \text{ は } K\text{-線型}\}$.

1. F° は E^* の線型部分空間.
2. F の基底を $\{b_1, \dots, b_r\}$ とする. これに $\{b_{r+1}, \dots, b_n\}$ を付け加えて E の基底を作ることができる. $\{b_1^*, \dots, b_r^*, b_{r+1}^*, \dots, b_n^*\}$ を双対基底とすると, $\{b_{r+1}^*, \dots, b_n^*\}$ は F° の基底である.
3. $\dim F^\circ = n - \dim F$.
4. $\dim F = r$ とする.
 $\omega_1, \dots, \omega_{n-r} \in E^*$ について

$$F = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker} \omega_j$$

であれば $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-r}\}$ は F° の基底である.

逆に, F° の基底 $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$ があれば

$$F = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker} \eta_j$$

解答

1. $0_{E^*}(x) := 0 (x \in E)$ とすると, 明らかに $0_{E^*} \in F^\circ$. よって $F^\circ \neq \emptyset$.
 $\alpha_1, \alpha_2 \in K, \varphi_1, \varphi_2 \in F^\circ$ に対して $F \subset \text{Ker} \varphi_1, \text{Ker} \varphi_2$.
したがって $x \in F \Rightarrow (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) = 0$.
よって $F \subset \text{Ker}(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)$. したがって $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \in F^\circ$.
以上により F° は E^* の線型部分空間.
2. $b_j^*(b_k) = 0 (r+1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq r)$ より $F = \text{Span}(b_1, \dots, b_r) \subset \text{Ker} b_j^* (r+1 \leq j \leq n)$.
よって $b_j^* \in F^\circ (r+1 \leq j \leq n)$. したがって $\text{Span}(b_{r+1}^*, \dots, b_n^*) \subset F^\circ$.
逆の包含関係を示す. $\varphi \in F^\circ \Rightarrow F \subset \text{Ker} \varphi \Rightarrow \varphi(b_j) = 0 (1 \leq j \leq r)$.
よって $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(b_j) b_j^* = \sum_{j=r+1}^n \varphi(b_j) b_j^* \in \text{Span}(b_{r+1}^*, \dots, b_n^*)$.
したがって $F^\circ \subset \text{Span}(b_{r+1}^*, \dots, b_n^*)$. 以上により $F^\circ = \text{Span}(b_{r+1}^*, \dots, b_n^*)$.
 $\{b_{r+1}^*, \dots, b_n^*\}$ は線型独立だから F° の基底.

3. 2. より明らか.

4. $F = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \omega_j \subset \text{Ker } \omega_k (1 \leq k \leq n-r)$ より $\omega_1, \dots, \omega_{n-r} \in F^\circ$.

よって $\text{Span}(\omega_1, \dots, \omega_{n-r}) \subset F^\circ$.

$\Psi: E \ni x \mapsto (\omega_1(x), \dots, \omega_{n-r}(x)) \in K^{n-r}$ とすると Ψ は全射線型写像.

実際, Ψ の線型性は明らか.

- $\text{Ker } \Psi = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \omega_j = F$ であること.

$$x \in \text{Ker } \Psi \Leftrightarrow \Psi(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \omega_1(x) = \dots = \omega_{n-r}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } \omega_j (1 \leq j \leq n-r) \\ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \omega_j = F. \quad \square$$

- Ψ の全射性

次元定理より $n = \dim E = \dim \text{Ker } \Psi + \dim \text{Im } \Psi = \dim F + \dim \text{Im } \Psi$

$= r + \dim \text{Im } \Psi$. よって $\dim \text{Im } \Psi = n - r = \dim K^{n-r}$. したがって $\text{Im } \Psi = K^{n-r}$.

すなわち Ψ は全射. $\square$

K^{n-r} の基本ベクトルを $e_1, \dots, e_{n-r}$ とする.

$1 \leq k \leq n-r$ に対して $\Psi(b_k) = e_k$ となる $b_k \in E$ が存在する. すなわち $\omega_j(b_k) = \delta_{jk} (1 \leq j, k \leq n-r)$. したがって $\omega_k = b_k^* (1 \leq k \leq n-r)$. 以上により $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-r}\}$ は線型独立. よって $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-r}\}$ は F° の基底. $\square$

逆に F° の基底 $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}\}$ があつたとする. $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-r}, \eta_{n-r+1}, \eta_n\}$ を E^* の基底, $\{b_{n-r+1}, \dots, b_n\}$ を F の基底, $\{b_1, \dots, b_{n-r}, b_{n-r+1}, \dots, b_n\}$ を E の基底とする. ただし $\eta_j(b_k) = \delta_{jk} (1 \leq j, k \leq n)$ となるように選んだ (選ぶことができる).

$F \subset \text{Ker } \eta_j (1 \leq j \leq n-r)$ より $F \subset \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \eta_j$.

$x \in \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \eta_j \Rightarrow x \in \text{Ker } \eta_j (1 \leq j \leq n-r) \Rightarrow \eta_j(x) = 0 (1 \leq j \leq n-r)$.

よって $x = \sum_{j=1}^n \eta_j(x) b_j = \sum_{j=n-r+1}^n \eta_j(x) b_j \in \text{Span}(b_{n-r+1}, \dots, b_n) = F$.

よって $\bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \eta_j \subset F$. 以上により $F = \bigcap_{j=1}^{n-r} \text{Ker } \eta_j$.

今回の問題

$(V, \langle, \rangle) : \mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間, $\dim V = n$ とする.

$L(V) := \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ は } \mathbb{R} \text{ - 線型変換} \}$ とおく.

1. $T_n, T \in L(V) (n \in \mathbb{N})$ が与えられたとき以下を示せ.

(a) 次の命題は同値であることを示せ.

イ. 任意の $x \in V$ に対して $\|T_n(x) - T(x)\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

ロ. $\|T_n - T\|_{OP} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

ただし $\|T\|_{OP} := \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$ とする.

- (b) $T \in L(V)$ に対して次の条件を満たす $T^* \in L(V)$ が一意に存在する :

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \text{ for } \forall x, y \in V$$

T^* を T の随伴 (adjoint) と言う. このとき次を示せ.

イ. 任意の $x \in V$ に対して $\|T_n(x) - T(x)\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ならば

任意の $y \in V$ に対して $\|T_n^*(y) - T^*(y)\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

ロ. $\|T_n - T\|_{OP} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ならば $\|T_n^* - T^*\|_{OP} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

2. $M_1, \dots, M_r$ を V の線型部分空間とすると

$$\left(\bigcup_{j=1}^r M_j \right)^\perp = \bigcap_{j=1}^r M_j^\perp$$

であることを示せ. ただし $S (\emptyset \neq S \subset V)$ が与えられたとき

$S^\perp := \{x \in V \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ for } \forall y \in S\}$ のことである.

問題について一言

MB で扱われた問題です.

1. (a) は線型変換の点列 T_n が与えられたとき有限次元の空間では強収束とノルム収束が同値であることを意味しています.

1. (b) について

$*$: $L(V) \ni T \mapsto T^* \in L(V)$ を考えたとき, イ. は $*$ が強連続であること, ロ. は $*$ がノルム連続であることを意味します.

解答をお待ちしております.

宛先と締切

宛先 kuwanodojo@googlegroups.com

締切 2021 年 4 月 30 日 (金)

(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房 2021 年 2 月 28 日発行

発行人 桑野耕一

編集人 増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先

オフィス電話: 042-495-6632

数学工房連絡用携帯: 080-6576-2691

連絡は極力 e メールでお願いします。

e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail: monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ

<http://www.sugakukobo.com/>

数学工房教室

〒170-0003

東京都豊島区駒込 1-40-4

全国蕎麦製粉会館 2F 202・203

数学工房オフィス

〒204-0023

東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401

