数学工房会報

2021年
No.135

巻　頭　言

相変わらずコロナ禍は収まりそうにありません。疫病の歴史を見れば都合よく 1 年や 2 年で収まるわけはないのですが！ IOC もこの国の政府も自分たちの利害ばかりに目が行って正常な判断ができぬようです。何でオリンピックはリスクを冒してもやらなければいけないほど不要不急で、芸術や学問の活動、旅行、知人と会うことが不要不急なのでしょう。私が生まれるちょっと前の時代の愚かさを髣髴とさせます。あとになれば恥ずかしくなって顔が赤らむようなことを大真面目に言うわけです。去年はそれでも休業要請にまじめに応じましたが、オリンピックをやる以上、もうそんなことには応ずる必要は毛頭ないと思っています。ただし会員の安全は、当然守らなければ、なりません。丁寧な消毒、オンライン、開講時間の 30 分繰り上げ等は継続いたします。また、長いこと定例だった学期の間の集中セミナーは、今まではコロナ下による臨時の休止でしたが、今後は廃止します。例外として学期の間に通常講義の補遺を集中セミナーとしてやることがあります。集中セミナーの代わりとしては、基礎コースを中心にその講座の受講者を対象にしたオンラインミーティングを開きます。該当する講座で生じた疑問を正しく数学の言葉にすること、他のメンバーの問いを注意深く聞くこと、そこから生じる対話により様々なことに気づくこと。この様な事が可能になって初めて本来の知としての数学につながっていくと思います。実際ある水準を超えると、何がわからぬかを認識することなしにこぼれることが多いと実感しています。学びの質を上げるためには基本の型稽古と共にわからぬことを明確にする質疑応答の稽古も必要なことだと信じています。夏学期もよろしくお願いいたします。

作用素環研究会 100 回記念に当たって思うこと

作用素環研究会は 2012 年 1 月から始まり 6 月で 100 回目を迎えます。というわけで、今回の会員紹介のページは研究会メンバーによる研究会の紹介を兼ねたそれぞれの立場からの自己紹介をお願いしました。私もこの機会に思うことを巻頭言として以下に書きます。この会の前身「応用解析を考える会」は会員の白鳥さんによると 2005 年から始まっているそうです。数学工房が淡路町から今の駒込に引っ越す前々年のことでした。それまではサイエンティスト社という医薬系を中心とした出版社の一部門としてデータ解析学の基礎数学としての、数学の基本語彙、微積分、線形代数、確率論の企業向け講習や応用系の学部や大学院生向け講義などをメインにして、それに並行して一般社会人向けの数学講座もやっているという感じでしたが、会社と私の数学の学びの内容に対する考え方の路線の違いが顕著になって、数学工房が独立した時期で、当時の会員達の間にも、ここを自分たちの学びと稽古交流の場として作り上げるのだという活発な雰囲気があって、様々な会員達の自主活動が生まれました。応用解析を考える会もそのような自主活動から生まれた輪読会です。このあたりのことは、2006 年あたりの会報のバックナンバーを見ていただければ、良くお分かりになるかと思います。私自身も、学問を学ぶ或いは学問で一旗揚げようという志の人たちが都会に集まり、私塾が学寮になり、喫茶店や酒場での議論が発展して学問の結社になりそれらの自発的連合体がユニバーシティになったという Paris 大学の起源を思い起こして、駒込界隈をカルチェラタンのようにしたいものだ、などという夢をみていたようです。

たまたま 100 回記念ということで、会報のバックナンバーを見て私自身すっかり忘れてしまっていた、数学工房の清新な雰囲気を思い出しました。そういえば、数学工房の活動を助けてくれている会員にはこの時期を共有された方が多い。私自身も当時は体力があって会員とともにいろいろなことをやっています。だんだん私も 16 年の間に体力がなくなって現実に埋没してしまっているということにも気づきました。そうこうするうちに数学工房を閉じる時期と閉じ方を考えなければならない時期に来てしまいました。私たちが、嘗て共有した数学工房の夢は、数学工房に縁のあったより若い世代に託すことにしましょう。最後に、改めてどれほど数学工房が会員達のボランティアに支えられていたかを再認識しました。また、諏訪先生がどれほど尽力してくださったかも思い出しました。巻頭言の場を借りて改めて感謝いたします。

数学工房　桑野耕一　　2021 年 5 月半ばに

夏学期講座案内　2021年 5月〜8月

入門・初級

◆ IB　Fourier 級数と Fourier 変換 I
-Fourier 級数の古典理論と応用-

<0> イントロダクション
<1> 平均収束、Fejér の定理
<2> Weyl の一様分布定理
<3> 各点収束の基本的な判定
<4> 歴史覚書

(変則日曜 6 回 10:30–12:30)
5/9、5/23、6/6、6/27、7/11、7/25

◆ IH　加群のテンソル積 II

<1> 加群の完全系列
<2> テンソル積と完全系列
<3> スカラーの添加

(隔週土曜 3 回 13:30–17:30)
5/15、5/29、6/12

◆ G　抽象線型代数への招待 II

<1> Linear Mapping
　1 重ね合わせ原理
　2 線型写像の演算
　3 線型写像の存在と一意性定理
　4 線型写像の核と像
　5 線型同型
　6 線型形式と双対空間
<2> 線型空間論からの補遺
　1 外部直和と内部直和
　2 商線型空間と 3 つの同型定理

(隔週日曜 3 回 13:30–17:30)
5/16、5/30、6/13

初級

◆ EA 抽象位相 II

<1> 連続写像
　1 連続写像（定義と基本的な性質）
　2 開写像・閉写像
　3 同相写像（位相同型）
<2> コンパクト性
　1 連続写像（定義と基本的な性質）
　2 開写像・閉写像
　3 同相写像（位相同型）

(隔週日曜 3 回 13:30–17:30) オンライン受講可能
5/9、5/23、6/6

◆ ED 現代的応用解析序論 III
-直積測度、Fubini の定理-

<1> 複素測度
<2> L_p

(隔週日曜 3 回 13:30–17:30)
7/4、7/18、8/1

初級・中級

◆ EC 多様体上の積分

<1> Stokes の定理
<2> 写像度
<3> ベクトル場の発散、Laplacian

(隔週日曜 3 回 13:30–17:30)
6/27、7/11、7/25

中級

◆ IC 局所コンパクト群の表現

<1> 続 Banach *-代数の表現
　1 復習
　2 サイクリック表現と正線型形式
　3 ピュアステート
　4 Banach *-代数の包絡 C^*-代数
　5 抽象的 Plancherel の定理

(変則日曜 6 回 10:30–12:30) オンライン受講可能
5/16、5/30、6/13、7/4、7/18、8/1

◆ MA 続 Von Neumann 代数

<0> 強稠密定理、Double Commutant Theorem
<1> Von Neumann 代数の定義と例
<2> Von Neumann 代数の基本的な性質

(隔週土曜 3 回 13:30–17:30)
6/26、7/10、7/24

◆ MB C^*-代数の帰納極限

<1> 包絡 C^* 代数
<2> C^* 代数の帰納極限
<3> UFP 代数
<4> AF 代数

(隔週土曜 3 回 13:30–17:30) オンライン受講可能
5/8、5/22、6/5

講座料について
各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。
オンラインの場合　￥25,000（ただしオンライン受講可能な場合）途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目￥12,000(学割 ￥9,000)、3 回目￥10,000(学割 ￥9,000) です。
・6 回講座は、1 回目￥6,500(学割 ￥6,000)、2 回目以降￥5,500/回 (学割 ￥4,000/回）です。
・オンラインの場合は、各回￥9,000 です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金 口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

会員からのメッセージ

今回は、会員有志による自主セミナー「作用素環論研究会」が 100 回を迎えた記念記事です。

研究会からのご挨拶

「作用素環論研究会」が今度の 6 月で 100 回目を迎えます。この会は前身の関数解析のセミナーを引き継ぐ形で 2012 年 1 月にスタートし、月 1 回のペースで開催してきました。参加者による輪読形式で進めており、テキストとして当初は生西明夫・中神祥臣著「作用素環入門 I」（岩波書店）を、2018 年の 4 月からは Gerard J. Murphy 著の C^*-*Algebras and Operator Theory* (Academic Press) を用いています。

作用素環を理解するにはかなりの時間と労力を要します。基礎素養として、解析学（1 変数・多変数の微積分）一般代数、抽象線形代数、抽象位相にある程度習熟した上で、関数解析、積分論の概略等を押さえておくことが必要となります。その反面、作用素環論では数学の様々な分野及び量子力学の成果が利用されていますので、みなさまが今まで習得された事柄への理解を深めるよい素材ではないかと思います。

使用テキスト

また、数学では分からないことが理解できたときの喜びは筆舌に尽くしがたく、そういったことに楽しみを見いだせる仲間の存在はとても心強いものです。仲間とともに数多くの議論を交わしながら作用素環への理解を深めてきたことこそが、この研究会を長く継続できた大きな要因だとも思います。会にご興味を持たれた方はいつでも歓迎いたしますので、そのような数学の仲間づくりの場としても活用いただければ幸いです。（松本隆則）

参加者の声

● 十年程前、二十五年ぶりに数学工房の教室で桑野先生と再会しました。四半世紀もの長いブランクの後なぜ数学に戻ってきたのか、自分でも不思議です。他の方に納得のいくような説明はできないように思います。きっかけは、映画「剣岳」を観た事でした。原作者の新田次郎氏、そのご子息で数学者の藤原正彦さんの本を続けて読むうちに数学啓蒙書へ、そして数学書へと読書の傾向が流れていきました。書店の数学書コーナーに出入りするようになり、ゼミの担当教官の著作本の復刻版を新刊コーナーに見つけて即刻購入。自力で読み進められないかと大学時代の教科書を開き忘却の彼方にある数学を引き出していたのでした。そして学生時代のように数学の事を議論できる仲間が欲しくなり数学セミナーの案内を頼って駒込にたどりついたのです。（浅川恵美子）

研究会の風景

● 昨年 9 月から参加しています。私自身は長い大学での研究生活で解析学というよりも、位相幾何学の方に魅せられてきた人間です。作用素環論もグロタンディークの位相ベクトル空間くらいまでしか勉強してない者で、怠け者の性分からこれまで勉強してきませんでした。帰国後、ひょんなことから高校で数学を教える立場となってから、どういうわけか無性に解析学を学びたくなって参加させてもらうようになりました。研究会での精読は数学の細部まで導いてくれる。神は細部に宿るとはまさしくこのこと。そのような体験をしていければよいなと思いながら参加しています。末長くこのセミナーが続いていくことを心から願っています。
（新井良明）

● 今のような形式の研究会で、最初に読んだのは山本義隆の「解析力学 I 」でした。開始は 2005 年 6 月なので、もう 16 年も経ちます。この本は 20 回程で終わり、次は新井朝雄の「ヒルベルト空間と量子力学」を読みました。関数解析は初めての分野で、最初はずいぶん戸惑いました。これは 62 回続き、2012 年には生西・中神の「作用素環入門 I」を始めました。ここから現在の Murphy の C^*-代数まで 100 回続いたのですね。いずれも難解で、自分の担当部分では毎回悪戦苦闘です。しかし分かった時は嬉しく、また参加者の皆さんとの交流も楽しくて、それが 16 年も続いた原動力だと思います。本当は他の部分も同じ熱心さで取り組めたら良いのですが、実行できていません (笑)。（白鳥茂男）

● パリで量子力学、及び場の量子論における概念生成を紐解きながら、哲学の論文を執筆していた時のことでした。A. コンヌの *Noncommutative Geometry* (Academic Press, 1991) という本をたまたま見つけ、非可換幾何学による場の量子論、そして素粒子論の標準模型の再構成の試みがあるということを知りました。そして、彼のコレージュ・ド・フランスでの授業に顔を出したことも何回かあるものの、当然のことながら何も理解できず、コンヌの非可換幾何学の基礎に作用素環論というものがあることが少しずつ分かってきたという程度の理解でした。作用素環（フォン・ノイマン環）による場の量子論の再構成である代数的場の量子論が自由粒子についてしか扱えないことも知りました。哲学的には、実験物理学、理論物理学、数理物理学、数学の間にどのような関係がありかを考えてきました。今では、作用素環論のセミナーに参加させていただきながら、非可換幾何学において、解析学、代数学、幾何学の間にどのような干渉が起きているのか。また、人間の直観

的思考（デカルト的）と記号操作的思考（ライプニッツ的）とがどのように関わっているのかや、カントの数学の哲学を再構成できないかなどということを考えさせていただいています。（原田雅樹）

• 私が惹かれた定理は以下である．

定理． A を Banach 代数，$x \in A$ とするとき，x のスペクトル集合 $\mathrm{Sp}_A(x)$ は $\mathbb{C}$ の空でない部分集合である．

この定理の証明に複素関数論の Liouville の定理が本質的に用いられる．この定理から次の驚くべき定理が示される．

定理． 単位元を持つ Banach 代数 A が体ならば A は $\mathbb{C}$ と同型である．

また次の定理にも惹かれた．

定理． $(H, \langle,\rangle)$: ヒルベルト空間，$B(H)$: H 上の有界線形作用素全体の作る C^* 代数とする．$B(H) \supset C$: 凸集合が与えられているとき C が強閉 $\Leftrightarrow$ C が弱閉.

この定理は以下の定理と Hahn-Banach の分離定理の帰結である．

定理． 上の定理と同じ設定で，線型形式 $\tau : B(H) \to \mathbb{C}$ が与えられているとき，τ は弱連続 $\Leftrightarrow$ τ は強連続.

（半田伊久太）

• 私はもともと関数解析に興味があり、ゆくゆくは作用素環を勉強したいと考えたところ、ちょうど幸運にも作用素環研究会に参加できました。作用素環を勉強してあらためて感じたことは微積分、線形代数、位相の基礎の重要性です。特に位相については十分に使いこなせる必要があると感じました。また C^* 環における代数的定義が位相的性質を含めて成立する定理にはとても興味深く感じました。体調を崩ししばらくお休みをいただいた時期もありましたが、研究会のみなさまのおかげで復帰できました。体調に気をつけながら引き続き参加できればと思います。（前敷健治）

• 2014 年 4 月から 2016 年 3 月にかけて沖縄にいました。過去に通っておりました数学工房のホームページをたまたま拝見し、作用素環の読書会が開催されていることを知りました。作用素環は自分が勉強したいと思っていました量子統計力学で利用されており、興味もありました。沖縄から関東に戻り、作用素環のセミナーおよび作用素環の読書会に参加しております。作用素環は奥が深くて、知らないことも多いです。現在はコロナ禍のため、Zoom での参加とさせていただいております。Zoom での利用を可能としていただいております白鳥さんには、この場をお借りしてお礼を申し上げます。コロナ以前は、読書会終了後、数学工房の隣にある「瀧乃家」という蕎麦屋に行き、いろいろ話をしつつ食事をしていました。読書会同様、この食事も楽しみでした。コロナ禍が収まれば、また行きたいですね。（松本隆則）

• 2016 年の秋より、作用素環研究会に途中から参加させていただいています。動機は、学生時代、物理学を専攻し、量子力学、場の量子論など、物理系の状態をヒルベルト空間のベクトルで表現し、物理量を同じヒルベルト空間に作用する線形作用素（物理では、『演算子』と言っていますが）で表現しますが、基礎的な作用素環の数学の勉強を、還暦近くになってやってみたくなりました。『（作用素）環暦』約 5 年ということになります。メンバーのレベルについていけているのかも不安ですが、物理学との関係性までは、当分、思いは至りません。C^*-環からフォン・ノイマン環（最近は、W^*-環と呼ばれることが多いらしい）へと、何とか物理を感じられる程度まで行けたらと思っております。（吉野正康）

入門　桑野道場　（第46回）

//記　桑野道場師範代　半田伊久太//

前回の問題

$(V, \langle,\rangle)$: $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間, $\dim V = n$ とする．
$L(V) := \{T : V \to V \,|\, T$ は $\mathbb{R}-$ 線型変換 $\}$ とおく．

1. $T_n, T \in L(V)\,(n \in \mathbb{N})$ が与えられたとき以下を示せ．
   (a) 次の命題は同値であることを示せ．
   イ．任意の $x \in V$ に対して $\|T_n(x) - T(x)\| \to 0\,(n \to \infty)$.
   ロ．$\|T_n - T\|_{OP} \to 0\,(n \to \infty)$.
   ただし $\|T\|_{OP} := \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$ とする．
   (b) $T \in L(V)$ に対して次の条件を満たす $T^* \in L(V)$ が一意に存在する：
   $$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \text{ for } \forall x, y \in V$$
   T^*を T の随伴 (adjoint) と言う．このとき次を示せ．
   イ．任意の $x \in V$ に対して $\|T_n(x) - T(x)\| \to 0\,(n \to \infty)$ ならば
   任意の $y \in V$ に対して $\|T_n^*(y) - T^*(y)\| \to 0\,(n \to \infty)$.
   ロ．$\|T_n - T\|_{OP} \to 0\,(n \to \infty)$ ならば $\|T_n^* - T^*\|_{OP} \to 0\,(n \to \infty)$.
2. $M_1, \ldots, M_r$ を V の線型部分空間とするとき
   $$\left(\bigcup_{j=1}^{r} M_j\right)^{\perp} = \bigcap_{j=1}^{r} M_j^{\perp}$$
   であることを示せ．ただし $S(\emptyset \neq S \subset V)$ が与えられたとき
   $S^{\perp} := \{x \in V \,|\, \langle x, y\rangle = 0 \text{ for } \forall y \in S\}$ のことである．

解答

1.(a)
- イ．$\Rightarrow$ ロ．
  V の正規直交基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とする．
  $x \in V(\|x\| = 1)$ を任意にとる．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，
  $$\begin{aligned}\|(T_m - T)(x)\| &= \left\|(T_m - T)\left(\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle (T_m - T)(e_j)\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle| \|T_m(e_j) - T(e_j)\| = \sum_{j=1}^{n} \|\|x\|\|e_j\|\|T_m(e_j) - T(e_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \|T_m(e_j) - T(e_j)\|.\end{aligned}$$
  $x \in V(\|x\| = 1)$ は任意だから，
  $$\|T_m - T\|_{OP} = \sup\{\|(T_m - T)(x)\| : \|x\| = 1\} \leq \sum_{j=1}^{n} \|T_m(e_j) - T(e_j)\|\,(m \in \mathbb{N}).$$
  よって $\|T_m - T\|_{OP} \to 0\,(m \to \infty)$.
- ロ．$\Rightarrow$ イ．
  $x = \mathbf{0}$ のときは自明．$x \neq \mathbf{0}$ のとき
  $\|(T_m - T)(x)\| = \|x\|\|(T_m - T)(x/\|x\|)\| \leq \|T_m - T\|_{OP} \to 0\,(m \to \infty)$.
  したがって任意の $x \in V$ に対して $\|T_n(x) - T(x)\| \to 0\,(n \to \infty)$.

1.(b) ロ．を先に示す．
$T \in L(V)$ のとき $T^* \in L(V)$ かつ $(T^*)^* = T$ であることはすぐわかる．
また，$\|T\|_{OP} = \|T^*\|_{OP}$ が成立する（※後述）．したがって

$$\|T_m - T\|_{OP} \to 0\,(m \to \infty) \Leftrightarrow \|T_m^* - T^*\|_{OP} \to 0\,(m \to \infty)$$

である．
イ．を示す．1.(a) と 1.(b) ロ．より

$$\text{任意の } x \in V \text{ に対して } \|T_m(x) - T(x)\| \to 0\,(m \to \infty) \Leftrightarrow \|T_m - T\|_{OP} \to 0\,(m \to \infty)$$
$$\Leftrightarrow \|T_m^* - T^*\|_{OP} \to 0\,(m \to \infty) \Leftrightarrow \text{任意の } y \in V \text{ に対して } \|T_m^*(y) - T^*(y)\| \to 0\,(m \to \infty)$$

イ．の別証
$S_m := T_m - T\,(m \in \mathbb{N})$ とおくと
「任意の $x \in V$ に対して $\|S_m(x)\| \to 0\,(m \to \infty)$ ならば任意の $y \in V$ に対して $\|S_m^*(y)\| \to 0\,(m \to \infty)$」であることを示せばよい．
任意の $y \in V$ に対して

$$\|S_m^*(y)\|^2 = \langle S_m^*(y), S_m^*(y)\rangle = \langle y, S_m(S_m^*(y))\rangle \leq \|y\|\|S_m(S_m^*(y))\|\,(m \in \mathbb{N}).$$

仮定から $\|S_m(S_m^*(y))\| \to 0\,(m \to \infty)$．よって $\|S_m^*(y)\| \to 0\,(m \to \infty)$.

2.

$$\begin{aligned}
u \in \left(\bigcup_{j=1}^{r} M_j\right)^{\perp} &\iff \text{任意の } v \in \bigcup_{j=1}^{r} M_j \text{に対して } \langle u, v\rangle = 0 \\
&\iff \text{任意の } k(1 \leq k \leq r)\text{，任意の } v \in M_k \text{に対して } \langle u, v\rangle = 0 \\
&\iff \text{任意の } k(1 \leq k \leq r) \text{ に対して } u \in M_k^{\perp} \\
&\iff u \in \bigcap_{j=1}^{r} M_j^{\perp}
\end{aligned}$$

※ $\|T\|_{OP} = \|T^*\|_{OP}$ であることを示す．
$\|T\|_{OP} = \sup\{|\langle T(x), y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$ であることを示せばよい．
実際，このことがわかれば
$\|T\|_{OP} = \sup\{|\langle T(x), y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} = \sup\{|\langle x, T^*(y)\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} = \|T^*\|_{OP}$
だからである．
$x, y \in V$ を $\|x\| = \|y\| = 1$ であるようにとる．
$|\langle T(x), y\rangle| \leq \|T(x)\|\|y\| = \|T(x)\| \leq \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \|T\|_{OP}$.
よって $\sup\{|\langle T(x), y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \|T\|_{OP}$．逆向きの不等式を示す．
$x \in V$ を $\|x\| = 1$ となるようにとる．$\|T(x)\| \neq 0$ のとき，
$\|T(x)\| = \langle T(x), T(x)/\|T(x)\|\rangle \leq \sup\{|\langle T(z), y\rangle| : \|z\| = \|y\| = 1\}$.
$\|T(x)\| = 0$ のときも同じ不等式が成り立つ．したがって
$\|T\|_{OP} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{|\langle T(z), y\rangle| : \|z\| = \|y\| = 1\}$.
以上により，$\|T\|_{OP} = \sup\{|\langle T(x), y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$.

今回の問題

位相空間 X のコンパクト集合 K で閉集合とならない X と K の例を挙げよ．
（解答は 2021 年 8 月 31 日（火）締切，kuwanodojo@googlegroups.com または工房オフィスまで）

数学工房　2021 年 5 月 22 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003　東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F 202・203 数学工房オフィス
〒204-0023　東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401