Math.
No. 136
www.sugakukobo.com

会報 2021 年 10 月
数学工房

2021 年 秋 巻 頭 言

イデアの国には入ってはならぬと言うが、岸辺に掟を下す事は許されよう。(H. Weyl)

測り得るものは全て測り、まだ測ることのできぬものは全て測れるようにせよ。(Galileo のテーゼ)

◆始めに
今年の 1 月から抽象線型代数への招待と言う講座を始めました。なぜ線型代数でなく抽象線型代数とわざわざ言うのかというと、数空間、行列と行列式というような線型計算のアルゴリズム処理に重点を置いたものでなく線型空間とその構造論から始まり、有限次元内積空間上の基本的な作用素のクラスや双線型形式の理論などを扱うからで、私は前者を初等線型代数と呼んでいます。この講座を始めてみると、果たして質問が少ない。いやほとんどない。質疑応答の会と称して学期終了毎に機会を設けているにもかかわらず。受講者に聞いてみると、復習するとなんとなくわかった気がして、何か質問といわれても、理解がぼんやりしていて、問が見つからないというのです。初めてこの領域を学ぶ人はともかく、ある程度、基本的な数学に習熟した人にとって、線型代数は線型計算の概念化ですから、理解は表面的には容易でしょう。私にはこれが曲者だと思えるのです。初学者が感じると思われる困難とそれを克服する問題についてはここでは取り上げません。それについては別の機会にお話ししたいと思います。数学工房のかなり数学に熟達した会員の皆さんを見ていても、抽象線型代数をご自身の道具として使いこなせると思われる人はめずらしい。ここでは、このようなレベルの皆さんへの抽象線型代数への案内です。
◆ところで線型代数とは何でしょうか？歴史的に見ると線型代数の問題は、古代以来様々な問題の技術的補題としてそれぞれの状況で現れてきました。線型代数が自立的な領域として徐々に研究対象になり始めるのは、19 世紀おそらく Cayley が行列算法を研究対象としてからでしょう。その後、様々な領域の線型性が認識され、様々な領域の対象が生息する場を統一的に記述する場としての数空間と変化を記述する線型作用素（要するに行列）の理論がつくられていきますが、解析学の基礎言語としての線型代数の決定的重要性が Hilbert を中心とするスクールに認識され 1930 年代に至ると Banach の線型作用素論、さらに von Neumann により抽象 Hilbert 空間が導入され Hilbert 空間の作用素論の新しい物理学理解への有用性が示され、さらに、重要な真に新しい研究対象として、無限次元線型代数としての作用素環の構造自体の研究の枠組みと方向性が示されました。ここに真に文字通り強力な抽象線型代数的なアプローチが現れたのです。その影響から、様々な領域の線型性にかかわる結果、概念に統一的記述を与えるべく、有限次元的な線型代数も行列と行列式、数空間から脱して抽象線型代数へ書き換えられていきました。19 世紀以前に根を持つ個別の深い理論、例えば、楕円関数論とか整数論とは違って、それ自体で深い知見が得られるわけではありません。歴史からわかるように基礎数学としての、集合と写像の理論（Zorn の補題や選択公理を含む）や一般位相も同様ですが、このタイプの数学の特徴は、数学の認識の発展の歴史の巨大な系統樹の先端に近いところに位置しているのです。したがって、見かけの単純さと裏腹に小学校以来形成してきた生得的な、空間や数、論理などの認識を、洗いなおすことなしに漫然と学んでしまうと、アルゴリズム的な初等線型代数のレベルではさほど問題はないのですが、抽象線型代数は、表面的にはわかっても、古代以来の認識の変遷、数学の普遍性への傾向を反映し実体化する機能を反映する線型代数本来の姿は簡単には見えません。そのためには、微積分でも幾何学でも数論でも統計でも組み合わせ論でも一通り知っている領域の中に線型代数的なトピックスを見出して統一的に書き直してみるようなことを機会があるたびにやってごらんになると良いでしょう。そのような作業を通して始めて線型代数の意味が見えてくるとおもいます。ところで、表現論はこのような努力を数学的に洗練した分野です。表現論は、多くの皆さんにとってわかりにくくなじみにくい分野だと思いますが、まさにこのような経験の延長線上にあります。表現論は抽象線型代数的な方法と言葉により数学の重要な種々の領域の関係を統一的に見る方法の基礎を与えますが、初めは理解しにくいでしょう、これこそ抽象線型代数の思想の究極の姿なのですが！逆に言うと抽象線型代数のような領域は、ある程度個別の領域に習熟し理解していないと本当の姿が理解できないといえ

ます。
◆数学の見方の革命的転換は、数学に関心を持ち、まじめに学び続ける限り、個人の中にも何度か現れるはずです。何か、抽象線型代数を難し気なことを言ってしまいましたが、私たちは幼児の時に運動と知覚により近傍の延長としての空間を認識して以来、何度も驚きの視点の転換を経験しているはずです。ものを数えることから自然数が、測ることから実数の原型が現れ、それに計算規則が与えられ、さらに文字が与えられて方程式が現れる。次に論証幾何により原理的な知識から自明ではない知識を得ることを知る。さらに座標を与えることにより図形が式で表され、論証幾何の時と違ってより一般性をもって方程式の解を考察することにより図形の性質が得られる。（あるいは式が図形で表現され、代数的、或いは解析的な問題が図形的な直感と整合した形で解かれる。）このことを理解したときの、驚きは今でも覚えています！式で書くと幾何学的量の不変性や双対性が実に美しい形で現れますから！このような図形と式の関係を認識すれば、多次元や無限次元の幾何学は自然の道筋です。ところが高校生になって物理などをやると、運動はまだ良いのですが、力学は私の経験的な物理世界の直感からすると何か不自然な感じがして、本当にこれでよいのか？優秀なクラスメートが問題をスイスイ解いているのを横目に見ながら座礁してしまいました。後年、現象の生起する空間と運動を記述する方程式による近似モデルであることが分かって、目から鱗が落ちる経験をしました。こういう視点の転換の連鎖は、ある意味で Galileo のテーゼを個人のなかで再生しているのですね。本格的に数学を学ぶとさらに大きな視点の転換が要求されます。通常の数学、例えば、古典幾何学、数論微積分、複素関数論などは上で述べたような視点の転換の続きで進んでいけるのですが、上でも論じた通り抽象線型代数は、数学の伝統的領域とはかなり色合いが違います。様々な個別理論の背後にある法則性を扱う道具と方法を与える普遍数学の一種といえましょう。この手の数学の身に着け方は個別の数学の様々な経験が充実してきたところで、少し高い立場から総合的に学びなおすことです。そのとき、今まで見えなかった世界が見えてくるのでしょう。
◆おわりに
　集合と写像、抽象線型代数、一般位相など数学科の基礎科目に入ってきたのは約半世紀前で、私が学生だった頃丁度転換期で、先生たちにとっても、大半の人にはこの種の数学はポピュラーではなかったと思います。かなり性急な現代化で、教える側もいろいろ努力し模索していましたが、結果としては理工系の数学でたくさんの落ちこぼれが出ました。このころはまだ数学＝受験数学だと信じ込んでいる困った学生はいませんでしたから、若手研究者や大学院生の勉強会にリベンジしたい社会人が多数来ていて、その交流から会費制の基礎数学の研究会が始まりました。これが数学工房の前身です。私がこの問題にこだわるのも、そもそも数学工房の存在理由の一つだからです。あれだけ初期に模索され問題点が議論されたのに、現実にはこの種の基礎数学の教育環境は良くなるどころか悪化してしまいました。認識の転換のための基礎訓練を伴わぬ知識の教育は無意味だと思います。結局学ぶのは自分自身なのだと思います。皆さんは社会人ですから、アマチュアの精神で焦らず、慌てず、高い立場から認識の地平を広げるのを楽しみながら学んでいこうではありませんか。

2021 年　秋　数学工房　桑野耕一

秋　学　期　講　座　案　内

2021 年 9 月～ 12 月

　2021 年秋学期講座は、入門初級 3 講座、初級 1 講座、初中級 2 講座、中級 3 講座を開講します。

<< 秋学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.B	Fourier 級数の L^p 理論	9 月 12 日	入門初級
I.C	局所コンパクト群の表現	9 月 19 日	中級
I.H	可換代数	9 月 18 日	初級
E.A	抽象位相	9 月 12 日	入門初級
E.C	多様体概論	10 月 31 日	初中級
E.D	現代応用解析序論	11 月 7 日	初中級
G	抽象線型代数への招待	9 月 19 日	入門初級
M.A	von Neumann 代数	11 月 6 日	中級
M.B	C^*-代数のテンソル積	9 月 11 日	中級

◆ I.B　Fourier 級数の L^p 理論

(1) L^p の概略
(2) L^p の双対
(3) Fourier 級数の L^p 理論

9/12 より変則日程 6 回 (9/12, 9/26, 10/10, 10/31, 11/14, 11/28)

◆ I.C　局所コンパクト群の表現

(1) Banach*-代数の表現から誘導される C^*-表現
(2) 抽象的 Planchel の定理
(3) 局所コンパクト群の表現　イントロダクション

9/19 より変則日程 6 回 (9/19, 10/3, 10/17, 11/7, 11/21, 12/5)

◆ I.H　可換代数

(1) 可換環の帰納極限

9/18 より隔週 3 回 (9/18, 10/2, 10/16)

◆ E.A　抽象位相

(1) 連結性
(2) ネットによる位相空間の記述
(3) フィルター

9/12 より隔週 3 回 (9/12, 9/26, 10/10)

◆ E.C　多様体概論

(1) ベクトル場の発散、Laplacian

10/31 より隔週 3 回 (10/31, 11/14, 11/28)

◆ E.D　現代応用解析序論

(1) L^p 空間
(2) L^p の双対　Riesz の定理
(3) Radon 測度と Compact　Hausdorff 空間上の連続関数の Banach 環

11/7 より隔週 3 回 (11/7, 11/21, 12/5)

◆ G　抽象線型代数への招待

(1) 線型変換と自己同型環
(2) 射影と直和
(3) 行列表現
(4) 最小多項式と固有値

9/19 より隔週 3 回 (9/19, 10/3, 10/17)

◆ M.A　von Neumann 代数

(1) Borel Functional Calculas
(2) von Neumann 代数の構造定理
(3) C^*-代数と von Neumann 代数

11/6 より隔週 3 回 (11/6, 11/20, 12/4)

◆ M.B　C^*-代数のテンソル積

(1) UHF 代数と von Neumann 代数への応用
(2) C^*-代数のテンソル積
(3) 最小 C^*-ノルム
(4) Nuclear C^*-代数

9/11 より隔週 3 回 (9/11, 9/25, 10/9)

[料金]
通常講座
一括前納 ￥32,000（学割￥25,000）
各回払い ３回のセミナー　１、２回目￥12,000（学割￥9,000）　３回目￥10,000（学割￥9,000）
６回のセミナー　１回目￥6,500（学割￥6,000）
２回目以降￥5,500（学割￥4,000）
オンライン受講
一括前納 ￥25,000
各回払い ￥9,000/回

入門桑野道場（第 47 回）

/// 記　桑野道場師範代　半田伊久太 ///

前回の問題

位相空間 X のコンパクト集合 K で閉集合とならない X と K の例を挙げよ.

注意・定義

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間 とするとき，開集合族 $\mathcal{U}\subset\mathcal{O}$ が X の開被覆であるとは，

$$X=\bigcup_{O\in\mathcal{U}}O$$

を満たすことである．

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がコンパクトであるとは，

X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して $\mathcal{U}$ の有限部分集合族 $\mathcal{U}_0$ が存在して

$$X=\bigcup_{O\in\mathcal{U}_0}O$$

を満たすことである．

$E\subset X(\neq\emptyset)$ が与えられたとき X の部分集合 E がコンパクトであるとは，

E を $(X,\mathcal{O})$ の部分空間と見たときコンパクトであることである．すなわち $(E,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(E))$ がコンパクトであることである．ただし $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(E):=\{O\cap E\,|\,O\in\mathcal{O}\}$．以下が成立する．

E がコンパクトである必要十分条件は，$\mathcal{O}$-開集合族 $\mathcal{U}$ が $E\subset\bigcup_{O\in\mathcal{U}}O$ を満たすとき

$\mathcal{U}$ の有限部分族 $\mathcal{U}_0$ が存在して $E\subset\bigcup_{O\in\mathcal{U}_0}O$ が成立することである．

解答

例 1

数直線 $\mathbb{R}$ としての（Euclid 位相での）開集合系を $\mathcal{E}^1$ とする．$\mathcal{O}:=\{U\times\mathbb{R}\,|\,U\in\mathcal{E}^1\}$ とおく．すると $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^2$ のひとつの開集合系であることはすぐわかる．すなわち $(\mathbb{R}^2,\mathcal{O})$ は位相空間.

$K:=\{(0,0)\}$: 原点だけからなる集合は明らかに $\mathcal{O}-$ コンパクトである．

ところが K の補集合 K^C は境界点を含むので開集合ではない．実際，$(0,1)$ の任意の開近傍は $U\times\mathbb{R}$ なる形をしているから $(0,0)$ を含み K と交わる．よって $(0,1)$ は K^C の境界点.

したがって K は $\mathcal{O}-$ 閉集合でない.

例 2

$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}:=\{\mathbb{R}^2\setminus A\,|\,A=\emptyset$ または $A=\mathbb{R}^2$または A は $\mathbb{R}^2$の有限部分集合 $\}$ とする．

すると $(\mathbb{R}^2,\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ が位相空間になることはすぐわかる．以下の命題が成立する．

命題

$\mathbb{R}^2\supset K$ は無限部分集合で $K\neq\mathbb{R}^2$ とする．

このとき K は $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ 閉集合でないが，$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ コンパクトである．□

実際，$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ 閉集合は $\emptyset,\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2$ の有限部分集合のみであるから，K が $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ 閉集合ではない.

また K の任意の $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ 開被覆を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする．すなわち，$U_\lambda\in\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}\,(\lambda\in\Lambda)$ かつ $K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$．仮定より $U_{\lambda_0}\cap K\neq\emptyset$ となる $\lambda_0\in\Lambda$ が存在する．$U_{\lambda_0}\neq\emptyset$ より $\mathbb{R}^2\setminus U_{\lambda_0}$ は高々有限部分集合．$K\setminus U_{\lambda_0}\subset\mathbb{R}^2\setminus U_{\lambda_0}$ だから $K\setminus U_{\lambda_0}$ も高々有限部分集合.

$K\setminus U_{\lambda_0}:=\{x_1,\ldots,x_m\}$ とする．$x_j\in U_{\lambda_j}$ となる $\lambda_j\in\Lambda$ が存在する $(1\leq j\leq m)$.

したがって $K\subset\bigcup_{j=0}^{m}U_{\lambda_j}$．すなわち，$\{U_{\lambda_j}\}_{1\leq j\leq m}$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の K に関する有限部分被覆.

すなわち K は $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ コンパクトである．□

例えば，$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ 閉でないが $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}-$ コンパクトである．

さらに，以上のことを考慮すると次がわかる．

$\mathbb{R}^2$ の有限部分集合がコンパクトであることに注意すれば，$(\mathbb{R}^2,\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ においては全ての部分集合がコンパクトである．その中で $\mathbb{R}^2$ 以外の無限部分集合は閉でないコンパクト集合である．

解説

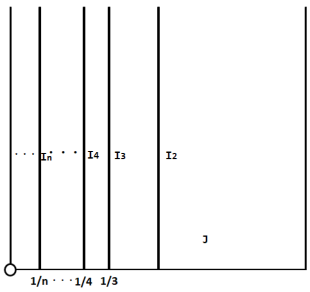
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が T_1 空間であるとは，任意の $x\in X$ について任意の $y\in X\,(y\neq x)$ に対して x の近傍 U_y が存在して $y\notin U_y$ を満たすことである．

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が T_2 空間（あるいは Hausdorff 空間）であるとは，任意の $x,y\in X\,(x\neq y)$ に対して x の近傍 U，y の近傍 V で $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在することである．
T_2 空間ならば T_1 空間であることはすぐわかる．T_2 空間について，次の結果が知られている．
$(X,\mathcal{O})$ が Hausdorff 空間，$K(\subset X)$ がコンパクトであるとする．このとき K は閉集合である．
例 1 の $(\mathbb{R}^2,\mathcal{O})$，例 2 の $(\mathbb{R}^2,\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ はともに Hausdorff 空間ではない．$(\mathbb{R}^2,\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$ は T_1 空間であるが，$(\mathbb{R}^2,\mathcal{O})$ は T_1 空間でない例である．

今回の問題

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$の部分空間 X は以下のものとする．
$J:=\{(s,0)\,|\,0<s\leq 1\}$，$I_0:=\{(0,t)\,|\,0<t\leq 1\}$，
$I_n:=\{(1/n,t)\,|\,0\leq t\leq 1\}\,(n\in\mathbb{N})$，$X:=I_0\cup J\cup\bigcup_{n\geq 1}I_n$．
このとき次を示せ．

1. X は連結である．
2. X は弧状連結でない．



X の図

定義と注意

以下，連結及び弧状連結の定義と基本的な性質を述べる．必要ならばこれらの性質を使ってもよい．（また適当な一般位相の参考書を参照してください．）

- 定義
  $(X,\mathcal{O}(X))$ を位相空間とする．ただし $\mathcal{O}(X)$ は X の開集合系とする．
  $f:X\to\mathbb{R}$ が局所定数関数であるとは，任意の点 $x_0\in X$ に対して，
  x_0 の近傍 V が存在して $f(x)=f(x_0)\,(x\in V)$ が成立するときを言う．
- 命題
  $A\subset X\,(a\neq\emptyset)$ と X 上の局所定数関数が与えられたとき，$f|_A:A\to\mathbb{R}$ は A 上の局所定数関数．
- 定義 - 定理
  位相空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ が与えられたとき，以下の命題は同値である．ただし $\mathfrak{A}(X)$ は X の閉集合系を表す．
  位相空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ が 1.～4. のどれか（すなわち全て）を満たすとき，位相空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ は連結であると言う．
  1. X 上の任意の局所定数関数は定数関数である．
  2. $\mathcal{O}(X)\cap\mathfrak{A}(X)=\{\emptyset,X\}$．
  3. $O_1,O_2\in\mathcal{O}(X)$ が $X=O_1\cup O_2$かつ $O_1\cap O_2=\emptyset$ を満たすなら，
     $O_1=X$ または $O_1=\emptyset$ のいずれか成立する．
  4. $A_1,A_2\in\mathfrak{A}(X)$ が $X=A_1\cup A_2$かつ $A_1\cap A_2=\emptyset$ を満たすなら，
     $A_1=X$ または $A_1=\emptyset$ のいずれか成立する．
- 定義
  位相空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ が与えられているとき，X の部分集合 $Y(\neq\emptyset)$ が連結であるとは，Y を $(X,\mathcal{O}(X))$ の部分空間と見て連結であることである．
- 命題

$(X, \mathcal{O}(X))$, $(Y, \mathcal{O}(Y))$: 位相空間，$f : X \to Y$: 連続写像が与えられている．
このとき X が連結ならば $f(X)$ も連結である．

- **定理**
位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が与えられているとき，$(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の連結部分集合族で
$Y_\lambda \cap Y_\nu \neq \emptyset (\lambda, \nu \in \Lambda)$ が成立しているとする．このとき

$$Y := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \text{は } X \text{ の連結部分集合である．}$$

- **定義**
位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が与えられているとき，
位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が弧状連結であるとは任意の $x_1, x_1 \in X$ に対して閉区間 $[\alpha, \beta]$ と
連続写像 $\varphi : [\alpha, \beta] \to X$ が存在して $\varphi(\alpha) = x_1$, $\varphi(\beta) = x_2$ を満たすことである．
ここで $[\alpha, \beta]$ の代わりに $[0, 1]$ を選ぶことができる．（すぐわかる）
- **定理**
数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 E が連結 $\Leftrightarrow$ E が区間．
- **命題**
位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ が弧状連結ならば位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ は連結．

問題について一言

2021 年秋学期の講座 EA で扱われた題材です．解答をお待ちしております．

宛先と締切

宛先　kuwanodojo@googlegroups.com
締切　2021 年 12 月 31 日（金)
(郵送される場合は数学工房オフィスまでお願いいたします)

数学工房　2021 年 10 月 31 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp
公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401