数学工房会報

2022年
No.137

巻　頭　言

何故、数学工房をやっているのか？余り利益になりそうにもないし、社会貢献でもなさそうだし？などと自問自答しながらとうとう終わりを考えなければならない所まで来ました。嘗ては何とか自分の仕事を説明しようと悪戦苦闘しましたが、この頃はその手の正当化は不要と感じるようになりました。数学工房の空間の提供していることは、数学工房に来られるような人は、実用目的や単なる知識を超えて、普遍と出会い、魂の栄養にしたい人たちだと思います。詩や音楽を通じて普遍に出合い、自分の枠から自分を解放して心を豊かにするように、無意識かもしれませんが！実際、数学工房は私が言うのも変なのですが、市民講座や一般の数学講習会と違い、会員の皆さんへの要求が、強いのです。例えば円周上の関数といったってそんなに簡単じゃない、その上の Radon 測度まで含めて Fourier 級数論を理解すると円周の深い世界が見えてくる、それを、ご自分の手と足で、一歩一歩確かめながら、ちゃんと理解すること。そのような作業の積み重ねを通して数学の世界への感受性を育てていっていただけたらと願っています。

　批評家の若松英輔さんが中学生を対象にした出前授業をまとめた冊子の「これから詩を書こうとする君たちへ」と題した序文で、詩の学びの意味について、次のように書いています。「詩を読み、その応答として、自分の手で詩を書いてみる。その繰り返しによって自分の中に潜む宝物に気づく。大切なことは、その様な作業を通じて自分自身の尊厳を見出すことです。」

　私は数学でも同じことだと思います。数学に親和力のある人は、数学に向き合い、問題を理解する作業、困難を克服する作業を通すことで、世界内存在としての自己を見出します。私は「数学が役に立つ」という言葉は嫌いです。役に立たないと思っているわけではありませんが、それはしばしば、きわめて安直な意味に使われているからです。教育については、数学にかかわることしか知りませんが、約半世紀にわたる時間の中で日本の教育が失ってしまったのは、知識の習得を通じて己の尊厳を見出す手助けをすることではないかと思います。50 年を通じて、知識が安っぽくなってしまった気がします。昔、私は岡潔先生の物言いが極めて奇矯に感じていました。とりわけメディアが天才の言動と祭り上げる流儀や信捧者たちの言動はまじめな数学の探求に害になりこそすれ益にならぬと思い敬遠していましたが、この頃、今の時代のような時代の到来の詩人的直観による予言、危機感故の言葉であったかと、この頃は思っています。正当化は不要と言いながら、また正当化をしてしまいました。そんなつもりでやっておりますので、しばらく数学工房をよろしくお願いします。

　最後になりましたが会員の皆さんへお知らせです。今年度の夏学期から、数学を愛する会員達と数学を通じて親しく交わりたいというご希望により、諏訪先生の講座が開かれる予定です。詳細は追ってお知らせいたします。ご期待ください。そのようなわけで今回はいつもの会員紹介はお休みして諏訪先生より皆さんへの開講へのご挨拶代わりに寄稿していただきました。

数学工房　桑野耕一　　2022 年 2 月　春

春学期講座案内　2022年 1月～4月

入門・初級

- IB Fourier 級数の L_P 理論— 各クラスの Fourier 級数の特徴付け
  - 変則日曜全 6 回　10:30–12:30
  - 1/16、1/30、2/13、3/6、3/20、4/3
- EA 抽象位相 IV フィルター・直積位相
  - 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
  - 1/16、1/30、2/13
- G 抽象線形代数への招待 IV—内積線形代数への招待
  - 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
  - 1/23、2/6、2/20

初・中級

- EC 多様体概論—Hodge 作用素と調和解析入門
  - 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
  - 3/6、3/20、4/3
- ED　現代応用解析序論 V—Radon-Nikodym の定理　トポロジーと測度
  - 隔週日曜全 3 回　13:30–17:30
  - 3/13、3/27、4/10

中級

- IC 局所コンパクト群の表現—局所コンパクト群の表現と群環の表現
  - 変則日曜全 6 回　10:30–12:30
  - 1/23、2/6、2/20、1/23、3/13、3/27、4/10
- MA Von Neumann 代数入門IV
  - 隔週土曜全 3 回　13:30–17:30
  - 3/12、3/26、4/9
- MB C^* 代数のテンソル積
  - 隔週土曜全 3 回　13:30–17:30
  - 1/15、1/29、2/12

講座料について

各講座、税込￥32,000(学割￥25,000）です。オンラインの場合　￥25,000（ただしオンライン受講可能な場合）途中参加の場合、
・3 回講座は、1、2 回目¥ 12,000(学割￥ 9,000)、3 回目¥ 10,000(学割 ¥ 9,000) です。
・6 回講座は、1 回目¥ 6,500(学割￥ 6,000)、2 回目以降¥ 5,500/回 (学割 ¥ 4,000/回）です。
・オンラインの場合は、各回¥ 9,000 です。

講座、研究会等に御参加いただくには今年度の数学工房の年会費が払込み済みであることが必要です。

・銀行口座: 三井住友銀行 清瀬支店 普通預金 口座番号 4585253 数学工房 桑野耕一
・郵便振替: 00150-9-686515 数学工房

特別寄稿

数学工房会員に寄せる

一数学者　諏訪紀幸

桑野先生とのご縁

桑野先生とは二十年以上にわたるお付き合いになります．短からぬ交流が続いていますが，その交流は 2001 年度に中央大学理工学部の数学科 2 年次配当科目として新設された「数学特別講義」の講師としてお招きしたことに始まります．この科目は教職情報のために設置されました．社会で数学を仕事で活用しておられる 6〜7 人の講師をお招きし，それぞれに実地での数学の応用について 2 回づつお話しいただくという形態で今まで続いています．

桑野先生には2017年度まで，社会人を対象とした数学の私塾である数学工房を運営しておられる実績を基に，数学工房での実践についてお話しいただきました．毎年，何かしら仕掛けをして来られる講義が楽しみで，在外研修で不在であった2009年を除いて，私は皆勤でした．

最初の2001年はLagrange補間とNewton補間を題材に線型代数における基本的な概念である基底についての講義でした．また，最後の2017年は函数列の一様収束の概念が19世紀に如何に形成されたかを講義されました．また，数学工房会員の方々にお出でいただき，それぞれの体験をお話しいただいたこともあります．

桑野先生から学んだこと

桑野先生からは色々と学ぶことがありました．その中の一つが，初学者には総和記号の読み方の訓練が必要だというお考えでした．これは盲点で，それまで自分の講義で総和記号の読み方まで配慮して講義したことはありませんでした．

一つ例を挙げますと，多項式の乗法に対する結合法則の証明があります．それには，(1) 多項式の積の定義を正確に記述する，(2) その定義に基いて多項式の乗法に対する結合法則を確認する，が必要です．

(1) についてですが，実係数多項式

$$f(t)=\sum_{k\geq 0}a_kt^k,\ g(t)=\sum_{k\geq 0}b_kt^k$$

に対して，$f(t)$ と $g(t)$ の積 $f(t)g(t)$ は

$$f(t)g(t)=\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{i+j=k}a_ib_j\Big)t^k$$

によって定義されます．次数ごとに同類項をまとめるという中高数学の常識を数式で記述しただけです．

その定義を基に (2) に掛かると，実係数多項式

$$f(t)=\sum_{k\geq 0}a_kt^k\ \ g(t)=\sum_{k\geq 0}b_kt^k,\ h(t)=\sum_{k\geq 0}c_kt^k$$

に対して

$$\begin{aligned}\{f(t)g(t)\}h(t)\text{ における }t^k\text{ の係数}&=\sum_{i+i'''=k}\Big(\sum_{i'+i''=i}a_{i'}b_{i''}\Big)c_{i'''},\\ f(t)\{g(t)h(t)\}\text{ における }t^k\text{ の係数}&=\sum_{i'+j=k}a_{i'}\Big(\sum_{i''+i'''=j}b_{i''}c_{i'''}\Big)\end{aligned}$$

が成立する．ここで二重総和記号を読み換えると，

$$\begin{aligned}\sum_{i+i'''=k}\Big(\sum_{i'+i''=i}a_{i'}b_{i''}\Big)c_{i'''}&=\sum_{i'+i''+i'''=k}a_{i'}b_{i''}c_{i'''},\\ \sum_{i'+j=k}a_{i'}\Big(\sum_{i''+i'''=j}b_{i''}c_{i'''}\Big)&=\sum_{i'+i''+i'''=k}a_{i'}b_{i''}c_{i'''}\end{aligned}$$

なので，めでたく等式

$$\{f(t)g(t)\}h(t)=f(t)\{g(t)h(t)\}$$

に辿り着きます．

これは中央大学数学科ですと，3年次配当「代数学2」の環論に関する講義の中で，実数体 $\mathbb{R}$ を可換環 R で置き換えて説明するのですが，殆どの受講者にはすぐにぴんと来ないようです．と言うより，中には中退や除籍という結末を迎える学生もいますが，大概は分からないままに卒業する．

まづ (1) が自分で出来ない．$(2t^2+t+3)(t-2)=t^3-3t^2+t-6$ のように具体的な計算はできるけれど，その計算の根拠である多項式の積の定義が正確に述べられない．定義があやふ

やであれば論証が正確に出来るはずもありません．そして (2) に進んでも，定義に基いて考える訓練が不足しているので，(2) のような簡単な論証でも追えない．それに二重総和記号を読み下すことが出来ない．

これと類似の議論は 1 年次前期配当の「線型代数学 1」で，行列の積に関する結合法則で経験しているはずですが，それが少数の受講者を除いてまるっきり抜けている．さらに深刻な問題は，中高数学で習った多項式の積に関する結合法則を何故今さら証明しなければならないかという，かなりの受講者が抱いている論証の軽視であるように見受けられますす．

数学工房の講座 IF は総和記号の読み方を含めた，数学の学びの基本的な作法を伝える優れた教程だと評価しています．しかし，これに相当する科目を大学の教程のどこかに配置したとしても，受け売りを暗記で済ます中高数学の意識から脱け出せない学生にとっては空しい結果しかもたらさないのではないかと想像します．

数学教育の空洞化

大学での教育現場からその状況を述べましたが，総和記号が読めない理工系の大学生の氾濫に示される，深刻な問題は二十年以上にわたる大学入学者の学力低下です．

私は 1987 年 4 月から 1998 年 3 月まで東京電機大学工学部に，1998 年 4 月から今に至るまで中央大学理工学部に在籍していました．東京電機大学時代は一部，二部，短期大学すべてを受け持ちましたが，数学でははっきりとした学力格差がありました．中央大学に移籍した時は，東京電機大学工学部一部に比べて総じて学力があり，さすが中央大学だと思いました．ところが，徐々に入学者の学力が低下して行く．特に数年前に断層に譬えられるくらいの学力低下が見られました．現在の中央大学理工学部の入学者ですと，数学の平均学力は二十年前の東京電機大学工学部一部と二部の間くらいだと見ています．ちなみに，東京電機大学の短期大学は私が移籍してから程なくして閉校しました．

大学入学者の学力低下の主因は，少子化で就学人口が減ったにも関わらず大学の定員がそれに対応して削減されていないことだというのが大方の見解です．さらに，数学に関して言えば，大学入学者の学力低下は小中高における数学教育の空洞化の結果であると見ています．私は半世紀前に高校を卒業しましたが，その時の高校数学の教科者に比べて今の教科書は半分位の内容です．全体に教科書が絵本と化しています．これでは数学教員が余程しっかりしませんと，桑野先生はブロイラー飼育によく譬えておられますが，生徒はパブロフの犬となるばかりです．

その中で高校では公式丸暗記あるいは解法丸暗記の教育が蔓延しているようです．論証の軽視は甚だしいものがあります．多項式の積に関する結合法則で言えば，中高の数学教員で (1)(2) がそらで出来るのはどれくらいの割合いるかと考えると心許ないものがあります．中央大学数学科を学部で卒業して教職に就く学生たちを見る限り，一割もいないと見ています．(1) すら覚束ないでしょう．論証に裏付けらた数学を体得していない教員が生徒に，理不尽な校則を押し付けるように数式の規則を生徒にやみくもに叩き込む，悪夢です．

桑野先生はしばしば，数学は愚にもつかぬ暗記科目と成り果てたと慨嘆しておられますが，まさにその通りです．何故，愚民政策につながる数学教育の空洞化を三十年以上も文部省あるいは文部科学省が推し進めて来たのか，私にはさっぱり理解できません．

数学工房の活動〜知的営みの証

コロナウィルス禍で政官の劣化がはっきりと表に現われましたが，2011 年の東北大震災+福島原発事故以来，日本は亡国の道を辿っているように感じます．福島原発事故の後始末に国力を傾注せねばならぬにも関わらず，さらには 2020 年から続くコロナウィルスパンデミックへの対応に国力を割かねならぬにも関わらず，昨年はオリンピックの馬鹿騒ぎ．その馬鹿騒ぎに巨額の国家予算をつぎ込み，おまけにその馬鹿騒ぎとともにコロナウィルス感染が拡大した．後は野となれ山となれ，つけは若い世代に回されます．

どうにも暗澹たる気分になりますが，小中高大における数学教育の空洞化は政官の劣化と関係していると見ています．総和記号はおろか小学校の比も覚束ない首相が続いている．桑野先生も数学工房会報の巻頭言で危機感をしばしば表明しておられます．国会では御飯論法などのごまかしの議論が常態化している．反知性主義が猖獗を極める中，数学に取り組むには逆風の時代です．

そんな風潮の中，数学工房の活動は貴重です．数学工房の講義を見渡しますと，中央大学数学科であれば大学院水準の講座が並んでいる．今さらキャリアアップでもないだろう方々が，論証を疎かにしない，がちんこの講義を受けておられる．これは，内実はどうであれ大卒の肩書が得られればそれでいい，いんちきをしても単位が稼げればいいという学生をいやと言うほど見て来た者にはただ驚きです．

私事になりますが，2017 年暮に膵癌の大手術をしました．幸運にも三途の川の手前から引き返すことができました．医術の進歩と日本の医療制度にただ感謝です．2018 年度後期から職務

に復帰しましたが，一昨年３月の精密検査で膵癌の肝転移の疑いとの診断．それから化学療法を続けています．今学期が最後のご奉公でした．定年までまだ３年ありますが，教育には体力と忍耐力が必要で，この辺りが退け時でした．引退したらゆっくりと数学を楽しみたいと思っています．

この４月からは数学工房会員との交流の場を設けていただくよう，桑野先生にお願いしています．反知性主義の声がかまびすしい中で，一私塾である数学工房が数学に対する真摯な取り組みを続けている．これは劣化する社会における知的営みの貴重な実践例です．私がゆったりと数学に取り組むことが数学工房の活動の一助となることを願っています．

入門　桑野道場　（第48回）

//記　桑野道場師範代　半田伊久太//

前回の問題

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$の部分空間 X は以下のものとする．
$J := \{(s,0)\,|\,0 < s \leq 1\}$，$I_0 := \{(0,t)\,|\,0 < t \leq 1\}$，
$I_n := \{(1/n,t)\,|\,0 \leq t \leq 1\}\,(n \in \mathbb{N})$，$X := I_0 \cup J \cup \bigcup_{n\geq 1} I_n$.
このとき次を示せ．

1. X は連結である．
2. X は弧状連結でない．

解答

1. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X の証明には，次の３つの連結性に関する基本的な知識を用いれば十分である．

   1° 任意の１次元区間の連結性（これは実数の連続性といわれるものの言い直し）．
   2° 位相空間 Ω の連結部分集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について，$Y_\lambda \cap Y_\mu \neq \emptyset(\lambda \neq \mu)$ なる性質をもてば，$Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は Ω の連結部分集合．
   3° Y が Ω の連結部分集合なら，$Y \subset S \subset \overline{Y}$ を満たす部分集合 S は Ω の連結部分集合．

   この３つの知識を $X = I_0 \cup J \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ に用いる．

   まず，$Y = J \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ の連結性を示す．

   1° より $I_n\,(n \in \mathbb{N})$, J は連結．さらに $(J \cup I_n) \cap (J \cup I_m) = J\,(n \neq m)$ だから，2° をもう一度用いて $Y = J \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ の連結性がわかる．あとは $X \subset \overline{Y}$ を示せばよい．

   $I_0 = X \setminus Y$ の任意の点を $(0,t_0)\,(0 < t_0 \leq 1)$ としよう．

   $V_n = (-1/n, 1/n) \times (t_0 - 1/n, t_0 + 1/n)\,(n \in \mathbb{N})$ は $(0,t_0)$ の $\mathbb{R}^2$ における基本近傍系である．今，任意の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $I_n \cap V_{n_0} \neq \emptyset\,(n > n_0)$ だから $V_n \cap Y \neq \emptyset\,(\forall n \in \mathbb{N})$．これから $X \subset \overline{Y}$.

2. X は弧状連結であると仮定すれば，X の点 $(1,0)$ と $(0,1)$ を結ぶ曲線 $\psi : [0,1] \to X$ が存在する．$\psi(s) = (\phi(s), \theta(s))\,(s \in [0,1])$ とすると，ϕとθ はともに連続で $\phi(0) = 1, \phi(1) = 0, \theta(0) = 0, \theta(1) = 1$ を満たす．

   任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\xi_n \in [0,1]$ を $1/(n+1) < \xi_n < 1/n$ を満たすように選ぶ．

   この ξ_n に対して，$s_n \in [0,1]$ が存在して $\phi(s_n) = \xi_n$．したがって $\psi(s_n) = (\xi_n, 0)$.

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$は $[0,1]$ 上の数列だから，Bolzano-Weierstraßの定理より部分列 $\{s_{\tau(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$と $s_0 \in [0,1]$ が存在して $s_{\tau(n)} \to s_0 (n \to \infty)$．$0 \leq \phi(s_{\tau(n)}) = \xi_{\tau(n)} < \frac{1}{\tau(n)} \leq \frac{1}{n} \to 0\,(n \to \infty)$.

ϕ の連続性より $\phi(s_0) = 0$.

一方，$\psi(s_n) = (\xi_n, 0)$ だから$\theta(s_n) = 0$．$\psi(s_0) = (\phi(s_0), \theta(s_0)) = (0, \theta(s_0)) \in I_0$．よって $\theta(s_0) > 0$ となり，$\theta(s_{\tau(n)}) \to \theta(s_0)\,(n \to \infty)$ に反する.

今回の問題

$(V, \langle , \rangle_V)$, $(W, \langle , \rangle_W)$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元内積空間,
$\mathcal{L}\ (V, W) := \{T : V \to W \,|\, T$ は $\mathbb{R}$ − 線型写像 $\}$ とするとき，以下を示せ.

1. 双線型形式 $\Phi : V \times W \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，$T_\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ が一意的に定まり，

$$\Phi(v, w) = \langle T_\Phi(v), w \rangle_W \quad (v, w) \in V \times W$$

   が成立する.

2. 双線型形式 $\Phi : V \times W \to \mathbb{R}$ と Φ に一意的に対応する $T_\Phi \in \mathcal{L}(V, W)$ について,
   Φ が非退化である必要十分条件は T_Φ は同型であることである.
   ここで双線型形式 $\Phi : V \times W \to \mathbb{R}$ が非退化であるとは

$$\begin{cases} 1^\circ\ \Phi(v, w) = 0\,(\forall v \in V) \text{ ならば } w = \mathbf{0} \\ 2^\circ\ \Phi(v, w) = 0\,(\forall w \in W) \text{ ならば } w = \mathbf{0} \end{cases}$$

   が成立することを言う.
   例えば，内積は非退化双線型形式である.

3. $\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ を $V \times W$ 上の双線型形式全体の集合とするとき 次が成立する.
   (a) $\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の線型空間.
   (b) $\mathcal{L}(V, W) \ni T \mapsto \Phi_T \in \mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ を $V \times W$ なる対応は線型同型.
   ここで $\Phi_T(v, w) = \langle T(v), w \rangle_W$.

問題について一言

2022 年の春学期 G で扱われた問題です．解答をお待ちしております.

宛先と締切

kuwanodojo@googlegroups.com（郵送の場合は工房オフィス）に 2022 年 4 月 30 日（土) まで

数学工房　2022 年 3 月 2 日発行
発行人　桑野耕一
編集人　増田卓、坂口尚文、半田伊久太

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡用携帯：080-6576-2691
連絡は極力 e-メールでお願いします。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@ezweb.ne.jp

公式ホームページ
http://www.sugakukobo.com/
数学工房教室
〒 170-0003
東京都豊島区駒込 1-40-4
全国蕎麦製粉会館 2F　202・203
数学工房オフィス
〒 204-0023
東京都清瀬市竹丘 1-17-26-401