

Math.

NO.90
www.sugakukobo.com

会報2007年7月



数学工房



20世紀数学との出会い私記(2)



■■■ 高校の数学の先生に薦められた微積分の入門書 ■■■

前回はニッカーソン・スペンサー・スティーンロッドの現代ベクトル解析との出会いについて書きました。今回は、数学を専攻する前から読み始めて臨書するほどに読んでしまった微積分の教科書を取り上げましょう。

その1でお話しましたように、私の数学は解析幾何的世界観から出発しました。私にとって空間の微小部分の一様性は不明確であり(実際物質は原子からできているという知識と如何に整合させるのでしょうか)、今考えると妙な事ですが、既に現代ベクトル解析なども読み始めていたにも拘らずこの部分は不明確なままに止まっていました。私の時代は高校などでもそれなりに論証を重視していて、一定の水準の証明はしているはずなのですが、教科書に書いてある極限の論法や、無限小の扱いは、およそ納得できるものではなかったという記憶があります。

ところで、私は余り学業をちゃんとやる生徒ではなかったので、影響を受けることが余りなかったのですが、思い返すと当時の高校の数学の先生は、かなり信頼できる先生であったように思います。方程式解法の達人 S 先生の雑談のなかには時折 Poincare の3部作や F.Klein の引用がありました。この部分と宿題を期限までにしないうちに大目玉を食らったことだけ鮮やかに覚えています。その恐ろしかったこと! N 先生は、浪人してもよいならと言って、生意気な私達に、解析学の参考書を3冊推薦してくれました。(1)高木貞治: 解析概論、(2)スミルノフ: 高等数学教程、(3)ヤ・ゼリドヴィッチ: 科学者・技術者の為の微積分入門。何故かこのときに限り早速影響されて、物質界と両立しないように見える無限小に関するもやもやが解消するかもしれないと、わくわくして(3)を読むことにしました。(3)を選んだのは、(1)、(2)は大型で厚く持ち運びに不便なので通学途中の車中で読めないというだけの理由でした。まもなく同じ電車に乗り合わせている隣のクラスの中に賢いやつがいて、全書版の確か三村先生の微積分の入門を熱心に読んでいたのを覚えています。とにもかくにも、微積分の面白い応用を含む一通りと初等的な微分方程式の取り扱いはこの本で学びました。働きながら数学を学ぶ現場の科学者、技術者に対する教育の熱意と配慮にあふれる良書です。ただし、いかなる鮮やかな応用を見ても根底にある無限小の哲学は理解不能なものでした。

■■■ 型を学んだドイツ流の教科書 ■■■

私は数学を学ぶ以前に、一時期熱心にドイツ語を勉強していました。初級コースの頃2人の対照的なドイツ婦人に学んでいました。お二人ともご主人は日本人の研究者でした。一方は小柄で愛くるしい Frau Dr. Margried H. 女史、もう一方は大柄で个性的美女でべらんめーの東京弁を話す Frau Dr. Inge T. 女史です。偶々、私の持っていた数学の雑誌(恐らく数学セミナー)に大柄の方の先生のご主人である T 先生が記事を書かれていたのです。大柄な先生がつかつかと突然私のほうへやって来られたので(この先生とにかく迫力があるのですよ!) ひょっとすると何かやらされるのかなと身構えたら、実に嬉しそうに私の雑誌を取り上げてページをめくって Das ist mein Mann! (この人、私の主人なの!)。

前置きが長くなりましたが、そんな切掛けで T 先生が何か良い微積分の基礎付けのしっかりした参考書はないでしょうかという間に答えて推薦してくれたのが次の3冊本です。

シュプリンガー書店のハイデルベルグ叢書の Bd. 26、Bd. 36、Bd. 43

Hans Grauert Ingo Dieb Differential- und Integralrechnung I 1967

Hans Grauert Fischer Differential- und Integralrechnung II 1968

Hans Grauert Ingo Dieb Differential- und Integralrechnung III 1968

の3巻本で、数学及び物理の学生の基礎教育用の教科書です。因みに主たる著者の Hans Grauert は多変数関数論の専門家で、Remmert・Stein とならび Behnke 率いる多変数関数論の Muenster 学派の代表的な学者です。そしてこの教科書は Behnke 先生に捧げられています。一松先生の多変数関数論の巻末の多変数関数論小史に写真が載っています。この3冊本は、首尾一貫して厳格で、体系的に構造が明確であるように書かれ、その意味では Burbaki 的構造主義を意識した教科書で、また練習問題が1題もないのも特徴です。計算練習など自分でやれと言うことです! Lebesgue 積分を明快な方法で導入する為に連続関数以前に半連続関数が入ってきます。又幾何学的直観に頼らずに初等関数を導入する為に関数項の級数、ベキ級数が厳格に取り扱われています。また微分法は始めから Caratheodory-Frechet 式で、いつでも局所凸空間に、一般化が可能な形になっています。と言うと敬遠したくな



る代物に思われるかもしれませんが、同じ厳格でモダンでも当時熱病のように流行った **Bourbaki** とは色合いが違うように思いました。剰余つき **Taylor** 公式を補間法の立場から丁寧に扱い数値積分の誤差評価の記述も明快です。バランスの取れた、たとえて言えば **Neo-classics** の雰囲気がある教科書です。19世紀の数学の伝統が通奏低音として息づいているかもしないと思う気さえしました。なぜか、遠くにそそり立つ教会の尖塔が見えてくるのです。そんなわけでこの本の持つ空気に魅せられて、この本を原文のまま写しながら読み進みました。ところで、つい先日、我が家においてある図書の一部を駒込の教室に移すために整理していたら、40年近く前に書いた微積分の基礎ノートが出てきました。そのノートは翻案のような形で日本語でまとめたもので、元になったドイツ語を写したノートはどこかにいってしまっただけです。読み進むうちに改めて私達が解析をする空間の微小部分の一意性は、微積分の根底に横たわる仮説であること、この部分の仮定が異なる解析学がありうるということが分かりました。ただし数学工房を始めて10数年になりますが、この形の微積分の話は一度もしたことがありません。

今回はいよいよ解析学から幾つかの出会いを取り上げます。ご参考までに、最後に私の手習いの師匠であるこの教科書の目次を挙げます。

第Ⅰ巻

§1 実数, §2 集合と数列, §3 無限数列, §4 関数, §5 微分法,
§6 特殊関数と Taylor の定理, §7 積分

第Ⅱ巻

§1 n 次元ユークリッド空間の道, §2 n 次元ユークリッド空間のトポロジー,
§3 多変数関数の微分法, §4 接ベクトルと可逆変換, §5 基礎的なタイプの常微分方程式,
§6 存在定理, §7 微分方程式の解法, §8 微分方程式系・高階の微分方程式

第Ⅲ巻

§1 n 次元空間の積分, §2 交代微分形式, §3 曲線および面積分, §4 電気力学への応用

2007年7月1日 桑野耕一



夏季集中セミナー案内

2007年5月～8月



(1) Matrix Algebra II

レベル 入門・初級

[日時]

2007年8月4日(土) 14:00-19:00

2007年8月5日(日) 10:00-16:00

[内容]

春の Matrix Algebra I の続編で抽象線形代数の方法の Matrix Algebra への用い方のポイントを扱います。内容的には I と独立になっています。応用解析で重要な正射影作用素、グラム行列、アジョイント等を内在的な立場で扱い、線形写像の構造定理と双線形写像の表現定理の立場から特異値・特異ベクトルの意味を明らかにします。応用として正規分布と特異正規分布等を扱います。これらの概念は、実際の局面での重要性に関らず、しばしば混乱した不明確な扱いがなされています。抽象線形代数の方法の力を味わい、この強力な方法を身につけてください。このシリーズの続きとしては行列の解析学や Kronecker 積のトピックスを考えています。

[項目]

(0) 対称変換と正射影の理論概説

(1) 特異値・特異ベクトル

(2) ペンローズインパース

(3) 解析特論 (一般化逆の応用その他)



(2) 測度論的積分論

レベル 初級・中級

[日時]

2007年8月11日(土) 14:00-19:00

2007年8月12日(日) 10:00-16:00

[内容]

この講座は、現代解析序論としての E. A の補充として企画しました。測度論的積分論は様々な数え上げ・面積や体積の計量・様々な平均・確率等の数学的構造を統一して取り扱う理論です。現代的な確率論や積分幾何学はこのようなバックグラウンドなしには考えられません。また積分論そのものはその特殊性によって

色々なアプローチが考えられますが、様々なアプローチの相互関係を調べる際にも測度論の基礎概念は基準になります。細部にこだわらなければ測度論の議論は単純です。始めに、なるべく広い範囲で測度が測定できる図形の範囲を定め、そのような図形の符号付測度として基礎積分を導入し、それを、標準的な良い近似により一般関数の積分を定義します。(1)、(2)では与えられた測度空間上の積分の一般論を扱います。(3)では、与えられた初等積分から、測度を生成する方法を扱います。更にそれ以上拡大できない測度 (完備測度) を理解します。(4)は、直積測度についての応用です。ここでは Fubini の定理や、積分記号上からの微分などの基礎定理が扱われます。(5)は、余裕があれば Stieltjes 測度と表現定理を考えています。

この講座に続くシリーズとして、 n 次元 Euclid 空間上の Lebesgue 積分、位相群上の積分等を予定しています。

[項目]

(1) 測度空間・可測関数

(2) 可測関数の積分・初等理論

(3) 測度空間の生成と拡張

(4) 基礎定理

(5) トピックス



(3) 現代ベクトル解析

(スカラー場・ベクトル場の積分法)

レベル 初級・中級

[日時]

2007年8月25日(土) 14:00-19:00

2007年8月26日(日) 10:00-16:00

[内容]

春の集中セミナーでは、主に線積分を扱いました。今回は、曲面のパラメータ表示の概念。曲面の接ベクトル・接空間・基本図形の体積・実数値関数の体積積分そして曲面上のベクトル場の積分へと進みます。本

質的には I.D でやった部分ですが、座標フリーの考え
方になれるために、今回は、余り進まず、練習問題も
含めてじっくり腰を落としてやりましょう。測度論的
積分論と比較してみるのも面白いですね！続編として
テンソル場の理論、微分形式の積分と Stokes の定理を
予定しています。

[項目]

- (1) 曲面のパラメータ表示
- (2) 実数値関数の体積分
- (3) ベクトル場の積分
- (4) トピックス



(4) 解析教程Ⅱ

(古典解析の発見と展開)

レベル入門

[日時]

2007 年 9 月 1 日(土) 14:00-19:00

2007 年 9 月 2 日(日) 10:00-16:00

[内容]

数学工場の定番の基礎教程です。狙いは、解析学の
基底になっている 17-18 世紀に発見された初等関
数を通して教育の都合で与えられた、19 世紀半ば以
降に作られた解析学の像ではなく、数学が生成されて
くる有様をその数学を作った人、その関数を発見した
人の立場になって理解することです。このことが、逆
にのちの単に便宜だけとは言えない教程の体系化の理
解を助けることになります。初等関数の発見を楽しみ
つつ、ベキ級数の方法、 Σ の自在な用法などを身につ
けていきます。解析教程Ⅰ、Ⅲとは独立ですが、相互
に補い合うようにできています。解析教程Ⅲ微積分の
基本定理の発見と展開に続きます。

[項目]

- (0) イントロダクション
(解析関数の発見、Newton の 2 項定理を廻って)
- (1) オイラーの指数関数と e

- (2) 三角関数の複素化とオイラーの公式
- (3) 微分の諸公式の発見
- (4) 対数関数・逆三角関数
- (5) トピックス



レベル初級

(5) 抽象位相の基礎

[日時]

2007 年 9 月 8 日(土) 14:00-19:00

2007 年 9 月 9 日(日) 10:00-16:00

[内容]

通常教程の E.A が現代解析の基礎に軸足を移したこ
とに伴い、いままで E.A で扱った一般位相の基礎は集
中の形で取り扱うことになりました。体系性を持つ多
くの分野での必須の素養です。一般位相は様々な世界
の中に、その世界のつながり具合として現れます。私
達の身近な日常サイズの物理世界ですら、そのつなが
り具合が自明でないことは、盲点の存在によって気づ
かれます。一般位相という言葉は、例えばある空間
の計量構造全体の作る空間・あるタイプの空間を点と
する空間などに秩序を与えたり、今までと異なる論理
に立脚した新しい対象たちの存在が発見されたりしま
す(例えば作用素環)。

(1) は抽象位相の基本事項です。今回の講座では(2)
が一つ集合の上のトポロジーの集合を扱うと言う点で一
番馴染みにくいかもしれません。この考え方の有用さ
は、例えば関数解析の世界に分け入ると明らかになっ
てきます。(4) では単純ですが、分かりにくいので相対
位相を丁寧に例と共に論じます。

[項目]

- (1) 位相の 3 つの表現
- (2) 位相の比較
- (3) 連続写像
- (4) 相対位相
- (5) トピックス



秋 学 期 講 座 案 内

2007 年 9 月 ~ 12 月



現在開講が確定している講座は入門 4 講座、初級 2
講座、中級 1 講座です。原則として隔週 6 回の開講で
す。I.A、I.F は新規の方でも参加可能です。なおセミ
ナーに参加していただくためには会員登録が必要です
のでご確認ください。

また新規対象の I.C、I.E、中級講座 M.A の開催は現
在未定です。今後の講座情報およびスケジュールの変
更等は随時ホームページに掲載されますので、そちら
をご参照ください。

<< 秋学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程Ⅲ	9 月 30 日	入門
I.B	応用解析特論 Fourier 変換と関数空間	9 月 22 日	入門
I.D	初等線型代数と微積分Ⅱ(多変数解析学入門)	9 月 23 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	9 月 29 日	入門
G	抽象線型空間Ⅱ 線形写像と線形写像の空間	9 月 23 日	初級
E.A	解析学位相序説Ⅱ	9 月 30 日	初級
M.B	現代ベクトル解析 テンソル空間の計量構造	9 月 22 日	中級

<< 秋学期講座カレンダー >>

月	日	曜日	略号	時 間
9	22	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	23	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	29	土	I.F	14:00-16:00
	30	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
10	6	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	7	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	13	土	I.F	14:00-16:00
	14	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
	20	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	21	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	27	土	I.F	14:00-16:00
	28	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
11	3	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	4	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30

月	日	曜日	略号	時 間
11	10	土	I. F	14:00-16:00
	11	日	I. A E. A	11:00-13:00 14:30-17:30
	17	土	I. B M. B	14:00-16:00 17:00-19:00
	18	日	I. D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	24	土	I. F	14:00-16:00
	25	日	I. A E. A	11:00-13:00 14:30-17:30
	25	日	I. A E. A	11:00-13:00 14:30-17:30
12	1	土	I. B M. B	14:00-16:00 17:00-19:00

月	日	曜日	略号	時 間
12	2	日	I. D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	8	土	I. F	14:00-16:00
	9	日	I. A E. A	11:00-13:00 14:30-17:30
	9	日	I. A E. A	11:00-13:00 14:30-17:30

[備考]

各講座とも1講座¥30000(税込)、学生¥21000(税込)。途中参加の場合、参加回数×¥5000+¥2000(テキスト代・手数料)です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めをお願いします。



数 学 工 房 ガ イ ダ ンス



数学工房ガイダンス

【場所】 駒込新教室（会場は変更になる場合がありますので、お問い合わせ下さい。）

【日時】 9月17日(月)13:30-15:30

【内容】

数学工房の考え方、講座の概要のガイダンスです。講座の取り方等の個別の相談も承ります。筆記用具を

ご持参下さい。新入会の方もご自由にご参加下さい。
参加費 無料



自 習 室 (2 0 3 号 室) 使 用 ルール

/// 数学工房事務局 ///



数学工房駒込教室の自習室(203号室)使用ルールを運営 Gr. と相談の上、当面以下のように定めました。会員の皆さんは気楽にご利用下さい。なお自習室の使用料(以下、施設協力費と記す)は各室の設備・環境の維持更新に充てられますので、宜しく御協力のほどお願いします。

注) 駒込教室は2部屋で構成されていますので、ここでは混乱しないように本教室と自習室と呼びます。

■ ■ ■ 個人使用に関するルール :

1. 通常は、金・土・日で数学工房管理者が在室している時間帯を会員使用可能時間とします。
2. 講座前後のフリーの時間帯(使用可能時間帯の表参照)をのぞき、自習室の利用は原則有料で、お一人様100円/時間です。
3. フリーの時間帯は無料です。
4. 自習室使用に際し、備え付けのノートにお名前と入室時間、退室時間をお書きください。フリーの時間帯はのぞきます。施設協力費は備え付けの箱に入れてください。
5. 自習室側ドアが開いていない場合、講義時間中は本教室に入らず本教室ドアをあけ、すぐそばに掛かっている自習室の鍵を袋ごと取り自分で自習室の鍵を開けて下さい。自習室ドアの鍵はダブルになっています。
6. 禁煙です。また電話等他人への迷惑がないようにお願いします。
7. 各自のごみは持ち帰り、部屋、流し、トイレを使用した場合はマナーの範囲で元通りに掃除して下さい。

■ ■ ■ グループ使用に関するルール :

1. 通常講座の参加者の中に、その講座の演習・復習会開催の有志がいた場合、その講座開始1時間前から

開始時間まで自習室を優先使用できます。施設協力費はお一人当たり100円です。

2. 通常講座の参加者による演習・復習会以外の自習室の使用も原則有料です。料金等についてはお問い合わせください。

3. 1. の演習・復習会、2. のそれ以外のグループ使用いずれの場合も責任者を決めて通知してください。また施設協力費は責任者の方が徴収の上、お支払いください。

4. 使用のマナー等については、個人の場合に準じますが、特にホワイトボードを使用した場合、終了後忘れずに消して下さい。机配置は自由ですが退室時に復帰させて下さい。プリント・コピーはそのグループ内で処理して下さい。

5. 以下の事項はグループの責任者をお願いします。
1) 使用後の後始末の確認管理者がいるときには管理者に声をかけて退室すること。
2) 管理者がいない場合は、掲示してある点検事項を確認のうえ退室すること。

■ ■ ■ 使用可能時間帯について :

■ 通常講座のある金・土・日の使用可能時間など

1. 通常講座参加者による演習・復習会の使用可能時間帯は、その講座開始1時間前から開始時間までとします。

2. その他の復習会・演習・研究会等の時間帯は下記の表を参考にご検討ください。

(自習室使用可能時間帯)

金 17:30-20:30
土 12:30-13:00 (フリー)
13:00-16:00
16:00-16:30 (フリー)



16:30-19:30
日 10:00-13:00
13:00-13:30 (フリー)
13:30-17:30



ただしフリー表示のある時間帯を除き 1. の演習・復習会が優先されますので御了承ください。使用予定は本教室掲示板(ホワイトボード)をご覧ください。

■その他の曜日(火・水・木)の使用時間帯

月曜日は、本教室および自習室の清掃を行いますので使用できません。その他の火曜日から木曜日に関して、本会員間の演習、復習会、勉強会、研究会等グループとして御使用になる御希望がありましたら、個別に御相談ください。数学工房の業務に支障のない限りお貸しします。以下は、目安ですが、次の単位で御利用いただけます。

午前 10:00-13:00
午後 14:00-17:00



夜間 18:00-21:00



■■■ その他のルール :

1. 書籍の貸し出しは、現状ではできません。ルールが整いましたら改めてご連絡します。
2. ノート編集 Gr. の自主活動成果として、いくつかの講義録が作成されています。書籍と同様に現状では貸し出しはできませんが、TeX で仕上げられた美しい資料ですので有効にご活用ください。
3. 通常講座のある金・土・日およびその他の曜日(火・水・木)に拘らず、本教室使用のご希望がある場合は、使用目的を明確にした上で、個別にお問い合わせください。通常講座に支障のない範囲で、使用を検討致します。

なお、これら諸ルールは暫定的なものです。今後の使用状況を見ながら、適宜運用方法を修正していく予定です。



入門桑野道場(第1回)

/// 会報編集Gr.自主活動企画(平田、増田) ///



今号から、会報編集 Gr. (平田、増田) 企画による紙上数学道場、名づけて入門桑野道場を始めたいと思います。皆様よろしく願います。この企画は、毎号、数学の型稽古を実践する上で基本になるような問題を厳選して掲載し、美しい解答を募集するというものです。ぜひ積極的にご参加ください。問題は基本的ですが、解き方は色々あると思います。我こそは、最も美しい模範解答が書けるというあなた。…後ろを見ても誰もいませんよ。そう、あなたです、あなた。ぜひ解答の応募をお願いします。また数学工房に参加したいけれど中々都内まで行けないという遠方のあなた。この道場に参加して欲求不満を解消しましょう。そしてチャンスを見て本講座を受講してください。応募資格は、会員であることだけです。解答を下記のメールアドレスに送信して下さった方はすべてこの桑野道場の門人となります。応募いただいた解答の中から特に優れたもの、間違っていないでも考え方が参考になるものは次号会報に掲載し、桑野先生から寸評をいただく予定です。また応募者のうち正解者全員の氏名 or ペンネームを掲載しますのでふるってご応募ください。なんだ、賞品がないのかですって。なにげなく心臓をえぐりますねえ。もうしょうがない。出血大サービス。特別に顔写真を掲載しましょう。えっ、そんなのうれし

くない。そうですか、すみません。…とにかく楽しく始めましょう。それでは早速今号の問題です。

問題(1)

次の Lagrange 恒等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j\right)^2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\alpha_j \beta_k - \alpha_k \beta_j)^2$$

問題(2)

閉区間 $[\alpha, \beta]$ で積分可能な関数 f, g に対して、次のシュワルツの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) g(\xi) d\xi\right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} (f(\xi))^2 d\xi \int_{\alpha}^{\beta} (g(\xi))^2 d\xi$$

解答の宛先: kuwanodojo@googlegroups.com

なお、解答は WORD ファイルか PDF ファイルで送信ください。応募締切日は 8 月 20 日(月)です。



数学工房講座を受講して(その2)

記: 初級コース(穴見)



はじめまして。数学工房に入会してまだ半年あまり。まだまだ初心者で講義を理解できないことも多いのですが、なんとかついていければと思っています。この春学期は位相空間の講義を取りました。位相空間論は定義が再帰的?だったり、しばしばその抽象性に戸惑いました。そこでわたしは具体的な事例を挙げてみようと思いたち、簡単な集合から開集合系(以下位相)を作りその強弱構造を調べました。まず、 $S=\{1, 2, 3\}$ から成る位相族を手作業で構成し、その強弱構造をリンクで表しグラフにすると Fig. 1 のようになります。たった 29 個からなる位相族ですが、その強弱構造は複

雑です。一番弱い密着位相から最強の離散位相まで 6 層にわたっており、全体で紡錘形を描くことが分かります。またどうしてもリンクにねじれが出てしまいます。3 次元で眺めると、ねじれは存在しないのかもしれませんが。さてそこで、元の数を一つ増やして $S=\{1, 2, 3, 4\}$ ではどうなるのでしょうか。こうなると手作業では難しくなります。そこで Mathematica とならば代表的なシンボル数学ソフトである Maple を用いて、集合 S を入力するとすべての位相を出力するプログラムを組んでみました。 $S=\{1, 2, 3, 4\}$ を入力すると、出力された位相の数は 355 個となります。それではさらに

$S=\{1,2,3,4,5\}$ では？ やってみると、わたしのノートPCは延々と計算をしたあげく、メモリ不足で結局ハングアップしてしまいました。そこで我が家最強のパソコン、BlueBrain（勝手にそう呼んでいる）で処理すると、3GBのメモリを積んでいてもやはりだめです。結局これは、わたしが用いたアルゴリズムが原因です。わたしのプログラムでは $S=\{1,2,3\}$ の場合、約 16,000 個の候補から位相を選び出す作業になります。しかし $S=\{1,2,3,4,5\}$ では、なんと約 43 億個もの選択肢があるのです。これでは普通のパソコンでは計算不能です。もっと効率のよいアルゴリズムを作る必要があります。

ところで、 $S=\{1,2,3,4\}$ の場合の 355 個の位相の間の強弱関係はどうなっているのでしょうか。ここに示した図と同様の関係を探ってみるのは興味深いことです。そこでさらに Maple を用いて、位相族を層別に分類し

て強弱関係を呈示するプログラムを作ってみました。ある位相を包含する位相族の中では最弱な上位位相とのリンクのみを取り出して層別に分類するアルゴリズムをつくるのに苦労しましたが、何とか仕上げました。その結果、 $S=\{1,2,3,4\}$ における位相族の強弱関係を分類すると密着位相から離散位相まで 10 層にわたることがわかりました。図には示しませんが、それぞれの層に属する位相の数を列挙していくと、密着位相（1 層）<14（2 層）<43（3 層）<60（4 層）<72（5 層）<60（6 層）<56（7 層）<36（8 層）<12（9 層）<離散位相（10 層）となります。やはり全体として視覚的には紡錘形をつくるようですが微妙に非対称です。わたしたちは通常無限集合で位相を考えますが、このように簡単な有限集合でも十分に複雑です。パソコンを用いて簡単な実例を作るだけでも、数学の深淵さの一端を垣間見るような気がします。

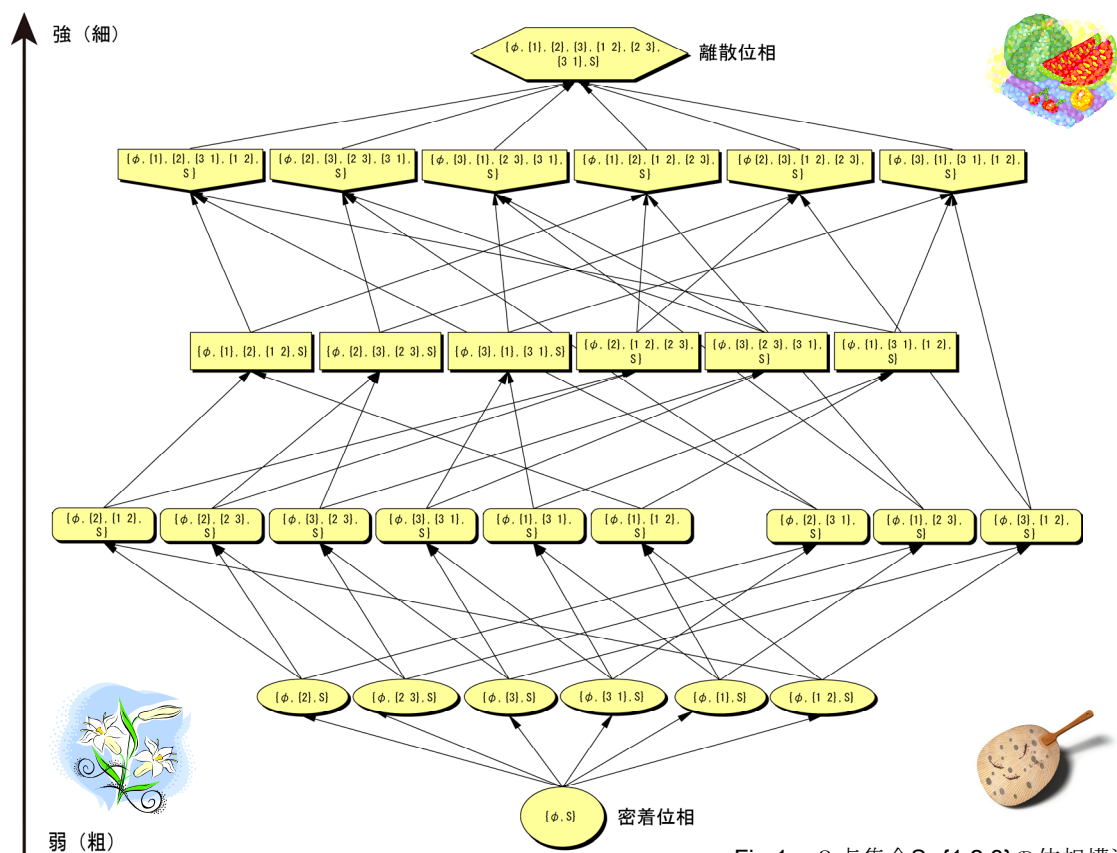


Fig.1 3点集合 $S=\{1,2,3\}$ の位相構造



Photo1 穴見公隆さん



数学工房 2007年7月1日発行
 発行人 桑野耕一
 編集人 編集Gr. (平田裕一・増田卓)

連絡先

オフィス電話：042-495-6632

数学工房連絡専用(携帯)：08065762691

連絡は極力eメールをご利用下さい。

e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail: monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)

ホームページ：

<http://www.sugakukobo.com>

数学工房 教室

〒170-0003

豊島区駒込1-40-4

全国蕎麦製粉会館2F 202-203

数学工房 オフィス

〒204-0023

清瀬市竹丘1-17-26-401

