Math.
NO.92
www.sugakukobo.com

会報２００７年１１月

数学工房

こ の ご ろ 思 う こ と

この稿を書こうとして、たまには、どこで終わるとも知れぬ数学のお話はお休みして…。

◆◆◆　数学工房が駒込に移転して半年

あわただしい日々でしたが、会員の皆さんのご協力により、さまざまな寄付や、手弁当で会の運営を手伝っていただき、徐々に備品も増えてかたちが整ってまいりました。この場を借りてお礼申し上げます。また、会員間の研究活動も徐々にですが活発になり、その反映がセミナーの中で私にも手応えとして感じられます。数学工房を主宰するものとしてこれほど嬉しいことはありません。

◆◆◆　古典に取り組む季節

つい先頃まで暑い暑いと言っていたのに、いつのまにやら空は高く透明になり、林の緑は陰影を帯びて、木々の孤独なたたずまいや風にそよぐ木の葉に何とも言えない愛おしさを覚える今日この頃です。静かな長い夜には、最近なかなか取り組む機会のない 19 世紀数学の古典にじっくりと取り組んでみたいですね。

◆◆◆　新手一生

つい先頃の朝日新聞の文化欄にはるかに時代の先を行っていた孤高の棋士、升田幸三の厳しい発見と創作の生涯が再び最近の若手棋士たちにより再評価されているとの記事がありました。求道と精進の厳しさが現れた武芸者のような風貌を持つ升田は、私が中学生や高校生の頃のヒーローの一人でした。己のすべてを一局の創作にかける苦しい道を生きた人です。

私のような仕事ですら、楽々悠々とは行かないのですから、このような姿を見ると始終躓いたり構想がまとまらないで四苦八苦する苦しみもたいしたことではないと思えて元気になります。

◆◆◆　セミナーは講師と参加者が共同で作り上げる作品

最近の嬉しいことはわからないこと疑問点などを率直に記した美しい Tex 文書によるレクチャーノートをボランテアで作成してくれる方々がいるので、自身の講座を見直すことができるようになりました。レクチャーノートを見ていて思うのは、時々自分でも、あれと思うほど、良い講義をしていることがあります。そういう講義は参加者の中に優れた聞き手がいらっしゃるときで、予期せぬ内容になっていることが多いのです。会員からの質問や、時には私のテキストの勘違いなどが発端になってディスカッションが起こり、思わぬ方向に話が進み対象に対する理解が深まることになります。音楽で言うところのインベンションに似ています。

概ねどの講座でも、率直な的を射たご質問がいただける様にはなったと思うのですが、こういうときは火花が散るのです。それから逆に、エーッ、この部分こんな風に理解されてしまったんだと驚く羽目になることもあり、その次からは説明に細心の注意をするようになります。

例えば、抽象論とその具体的な実現としてのモデルの関係はよほど区別しないと、多項式空間＝線形空間と思い込んだりする人が稀に出て来ます。抽象的な物が実在として捉えられるには周到な準備と訓練がいることがわかってきます。

特に、概念的な数学は、考える対象の階層が入り組んでいます。例えば 1 点の関数の芽に働く、微分作用素の線形空間の双対空間の上の多重線形形式の空間の作る線形空間に働く交代作用素という具合に、抽象的なものの扱いに慣れてないと、その時点で混乱して自分が扱っているものがいじれなくなります。標準空間に持ち込めばよいわけですが、多くの場合、それは線形代数の基本や位相の基本にすぎなかったりします。これも楽しみの一つですが、このごろは会員の質が高まって、また私も少しましになった様で、しばしば、予定外の思いもかけぬ名演になることがあります。

◆◆◆　数学工房のセミナーの考え方

最近、折角、数学を学びなおしたいという意気込みでこられたのに、程なくして、挫折する方が、目立つようになりました。これは、お互いにとても残念なことです。無論私どもの不断の工夫が必要なことはいうまでもありませんが、一番目立つのが数学工房の提供しているセミナーの活用法をご理解いただけていない場合ですので、この機会に数学工房のセミナーのポイントをお話します。

数学工房のセミナーは、あるテーマに沿った数学を材料にして数学の世界を歩くことの基礎訓練に重点があります。特に解析教程に著しいのですが、標準的な知識を獲得することを問題にしていません。そこで扱われる材料を基にして、それらを創りだした数学者に寄り添って、イマジネーションを働かせつつ、数学の世界を歩くことを学んでもらうための教程です。

しばしば１変数の微積分を知っている積もりで I.A を飛ばされる方がいるのですが、この講座は１変数の微積分から解析学へと向かう流れを材料にした多くの練習問題により数学とは何をすることかを問うのが目的なのです。出来れば、この講座はとられた方が、後々の展開を考えると賢明でしょう。

数学（本当は、この訳語も間違いの元なのですが！）を本格的に学ぶ際の困難は、個別の命題の導出や計算のそのもの中にあるのではなく、取り扱われる問題の見方、取り扱いに対する不慣れにあります。よくイメージは大切といいますが、単なる惰性に寄りかかった思考では、数学的想像ではなく、数学的妄想になってしまいます。イメージを生むためにも基礎訓練は大切なのです。

基礎訓練は、一見、初心者が見ると簡単そうに見えたりするために却って難しく、一人でやりにくいのです。しかも退屈になってきます。そのやりにくい部分を、流れの中で、取り付きやすいように、途中でわき道に迷わないようにご案内するのが、数学工房のセミナーです。歩きやすくなっていますが、険しい場所、高度の高い場所も通過するので、一歩一歩丁寧に歩きましょう。また、転んでもくじけずに歩ききることも大切です。本当の勉強や研究は、あなたが一人で、世界と向き合うことなのです。その日のための訓練だということを忘れないでください。

2007 年 11 月 1 日　桑野耕一

冬 季 集 中 セ ミ ナ ー 案 内

2007年12月~2008年1月

（１）解析教程Ⅳ　　レベル　入門

[日時]
2007 年 12 月 15 日(土) 14 :00-19 :00
2007 年 12 月 16 日(日) 10 :00-16 :00

[内容]
今解析教程Ⅳはリフレッシュされ生まれ変わりました。解析学の最も根源的な課題である級数の評価の理解とより普遍的な評価の方法を確立する過程で現在の微積分の基礎定理や諸概念が生まれてきたことを具体的な課題に取り組みながら理解することを目標にします。通常のテキストにあまり現れない新しい多くの内容を含んでいます。

[項目]
[0]Intoroduction 級数の評価の考え方
[1]Rolle の定理と微分の平均値定理の着想
[2]剰余付き Taylor 公式
[3]Newton-Hermite の近似公式の誤差評価と Rolle の定理の一般化
[4]トピックス 級数の収束についての古典的理論

（２）抽象位相Ⅲ　　レベル　初級

[日時]
2007 年 12 月 22 日(土) 14 :00-19 :00
2007 年 12 月 23 日(日) 10 :00-16 :00

[内容]
コンパクト性は解析学の最も重要で基本的な概念で、その対象が本質的に有限な情報で一様に近似できることを意味しています。ユークリッド空間の有界閉集合から、より普遍的なコンパクトという概念が取り出される経緯を考えると理解が深まるでしょう。純化された概念は大きな普遍妥当性を持ちさまざまな類似の現象に適用できるようになります。最も成功した例の一つが、関数空間の正規族といわれる概念です。

[項目]
[0]3 つの一様位相的性質
[1]コンパクト
[2]連続写像の空間とコンパクト性の特徴づけ
[3]正規族

（３）解析特論　線形漸化式・線形微分方程式・有理級数展開の３位一体　　レベル　フリー

[日時]
2008 年 1 月 5 日(土) 14 :00-19 :00
2008 年 1 月 6 日(日) 10 :00-16 :00

[内容]
あるタイプの線形空間の自然な同型という視点から、３つの興味ある解析的対象を統一的に扱います。解析教程Ⅰ、Ⅱでさわりを扱ったところ、多くの会員の皆さんからご質問やお問い合わせを受けました。上記のテーマを扱った参考書は、断片的な知識としてまとめたものはあっても、統合的に扱ったものは寡聞にして知りません。

そこで、少し詳しくまとまった形で取り上げることにしました。楽しみながら、代数語の用法のエッセンスをつかみとってください。

[項目]
[1]多項式概論
[2]Taylor 公式
　Lagrange 補間、
　Newton-Hermite 補間
[3]線形漸化式　数列空間と差分作用素
[4]線形微分方程式と特性方程式

（４）現代ベクトル解析　　レベル　初、中級

[日時]
2008 年 1 月 12 日(土) 14 :00-19 :00
2008 年 1 月 13 日(日) 10 :00-16 :00

[内容]
ベクトル空間上の微分形式の積分の理論を扱います。１変数の微積分の「微積分の基本定理」にあたるのが、「Stokes の定理」です。

あくまでも、ベクトル空間上に限定した話ですが、なるべく多様体に移行しやすいような形式を考えています。

[項目]
[1]共変テンソル代数
[2]ベクトル場と微分形式
[3]位相幾何的な言葉の準備
[4]微積分の基本定理（Stokes の定理）

[備考]　集中セミナー参加費
会員　　16000 円(学生 12000 円)
非会員　20000 円(学生 15000 円)

春　学　期　講　座　案　内

2008 年春学期講座は、入門 6 講座、初級 2 講座、中級 2 講座を開講します。

<< 春学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程Ⅳ	1 月 27 日	入門
I.B	Fourier 変換と関数空間	1 月 19 日	入門
I.C	確率測度概論	1 月 25 日	入門
I.D	初等線型代数と微積分	1 月 20 日	入門
I.E	数学書を読もう	1 月 17 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	1 月 26 日	入門
E.A	位相と解析序説Ⅲ	1 月 27 日	初級
G.	抽象線型代数入門Ⅲ	1 月 20 日	初級
M.A	ヘルマンダーを読むⅡ	1 月 26 日	中級
M.B	検討中	1 月 19 日	中級

<< 春学期講座カレンダー >>

月	日	曜日	略号	時　間
1	17	木	I.E	19:00-21:00
	19	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	20	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	25	金	I.C	18:30-20:30
	26	土	I.F M.A	14:00-16:00 17:00-19:00
	27	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
	31	木	I.E	19:00-21:00
2	2	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	3	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	8	金	I.C	18:30-20:30
	9	土	I.F	14:00-16:00
	10	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
	11	月祝	M.A	14:00-19:00
	14	木	I.E	19:00-21:00
	16	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
2	17	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	22	金	I.C	18:30-20:30
	23	土	I.F	14:00-16:00
	24	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
	28	木	I.E	19:00-21:00
3	1	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	2	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	7	金	I.C	18:30-20:30
	8	土	I.F M.A	14:00-16:00 17:00-19:00
	9	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
	13	木	I.E	19:00-21:00
	15	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	16	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
	20	木祝	M.A	14:00-19:00
	21	金	I.C	18:30-20:30
	22	日	I.F	14:00-16:00
	23	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30
	27	木	I.E	19:00-21:00
	29	土	I.B M.B	14:00-16:00 17:00-19:00
	30	日	I.D G	11:00-13:00 14:30-17:30
4	4	金	I.C	18:30-20:30
	5	土	I.F M.A	14:00-16:00 17:00-19:00
	6	日	I.A E.A	11:00-13:00 14:30-17:30

［備考］　講座参加費
一括の場合　一講座あたり 30000 円(学生 21000 円)
各回の場合および途中参加の場合　手数料+ﾃｷｽﾄ代
回数×5000 円+2000 円(学生回数×3500 円+2000 円)

数学工房ガイダンス，会員の集い

数学工房ガイダンス
［場所］　数学工房駒込教室
［日時］　1 月 14 日(月祝)13:00-15:00
［内容］　数学工房の考え方、講座の概要のガイダンスです。講座の取り方等の個別の相談も承ります。筆記用具をご持参下さい。新入会の方もご自由にご参加下さい。
参加費　無料

数学工房会員の集い(質疑応答の会)
［場所］　数学工房駒込教室
［日時］　12 月 16 日(日)16:30-18:30
I.A, I.E, I.F, その他
12 月 23 日(日)16:30-18:30 E.A
12 月 24 日(月祝)16:30-18:30　M.A
1 月 6 日(日)16:30-18:30　入門、G
1 月 13 日(日)16:30-18:30　MB
1 月 14 日(月祝)15:30-17:30　全般
［内容］　07 年度春学期・秋学期の講座の数学的内容についてご質問を承ります。桑野道場解答宛先アドレス(kuwanodojo@googlegroups.com)にメールでご質問を送ってください。郵便の場合は数学工房オフィス宛てに送ってください。ご質問の中から、その講座の理解のうえで、基本的な重要さを持つと思われるご質問を取り上げて上記日程で桑野先生がお答えいたします。ご質問の採否については、桑野先生に御一任ください。また 1 月 14 日(月祝)は新年会をかねて行います。ただいま計画中です。詳細は後ほどお知らせします。出席

希望の方は数学工房オフィスまでご連絡ください。なお先の2007年秋学期講座紹介メールで12月29日(土)会員の活動発表会と予告いたしましたが、都合により中止させていただきます。

中央大学講演会報告（その２）

／／／　講演者企画(藤田、江草、増田、穴見)　／／／

■■■　数学工房会員講演内容２：
私が数学を学ぶ理由と学んでの雑感

～　江草文子

私は普段はいくつか仕事をしています。ひとつは遺伝子発現解析業務で、他にいくつかの大学で物理関係の授業や演習を持っています。

◎数学工房に入る動機

自分がもっと現役で物理の研究をしているときから、数学の理解の必要性を感じていて、今になって数学工房へ（今年で3年目）。

◎仕事に生かせるように感じている現在

遺伝子発現解析研究を具体的に数学で処理するときの方向性を与え、手段を示唆してもらえているように感じます。大学の授業・演習においては、学生がわからなかったときへの対処が前より具体的になれたように思います。

◎数学を学ぶこと：トータルとして

仕事にご利益もあったけれど、なんといっても無心に集中して数学のことを考える時間が心地よい。私の幸せの一部。自分のもやもやした認識が数学の言葉で表現されたときの快感もたまりません！数学は美しい！定義を満たせば、あとは論理が保証してくれる安心感！それと同時に、代数系が変わったときの、スリリング感！誰にでもいつでも開かれている数学の優しさ(?)を感じます。

◎今後

今はやっていることだけでも楽しい。もう少し欲張って実際に数学を道具として使いたいし磨いていきたい。また初心に帰って物理学を再度眺めてみたい。

◎メッセージ

今は数学をやっていることが楽しいです。今もそうですが、わからなくて、気持ち悪くて居心地の悪い想いも沢山しました。更に数学・物理から完全に離れる選択肢がなかったわけではありません。でも、わかりたい、気になるという自分の中の芽は摘み取らず再度学ぶことに挑戦して本当によかったと思います。「辞めたら終わり」と言われた先輩方の言葉をお伝えしたいです。数学がおもしろい、おもしろいかも、と思った自分の感性を摘み取るのはもったいないと思いますヨ。学生さんは「わからない」を連発しても許される特権があります。自分を飾らず素直にどおーんと先輩や先生方にさらけ出して、自分も試行錯誤していけば、その努力は血となり肉となり必ず報われますヨ。

■■■　数学工房会員講演内容３：
中央大学での講演を終えて

～　増田　卓

本講演で私は数学という学問の捉え方をテーマに学生のみなさんの前でお話ししました。昨今、この知識は役に立つとか、これはやっても役に立たない、などということをよく耳にします。特に数学のような抽象性を扱う学問の場合、このような批判の対象に挙げられるのではないかと思います。また、多くの学生も「数学を勉強して何の意味があるのか」と疑問に感じているのではないかと思い、このようなテーマを選択しました。講演においては、私の仕事と数学の関連性についてと数学という学問の捉え方についての私なりの考えを述べました。

私は、エレクトロニクス関連分野で製品開発に従事していますが、製品開発の過程で高度な数学を応用したことはありません。おそらく一部の研究者以外は数学を使うことなどめったにないと思います。製品開発で数学の知識を応用することはあまりないのですが、数学的な思考法はエンジニアの私にとって大きな影響を与えていると思います。

われわれエンジニアが製品を開発するとき、要求仕様に基づいて具体的な仕組みを設計するわけですが、このときの仕組みは厳密に定義されていなければなりません。曖昧な部分は後で必ず製品の不具合として返ってきます。私はこのように製品の仕組みを定義していく過程は数学の証明に通じるような気がします。私は、数学というのは人間の考え方のベーシックな部分に影響を与えるものと考えています。したがって、数学を「役に立つか、立たないか」という短期的な視点で捉えるのは間違いで、「科学的思考の根本を形成する」という、もっと長期の視点で捉える必要があると思います。

私は以上のような内容をなるべく具体例を交えながら学生のみなさんにお話ししました。私のつたない話し方で意図が伝わったかどうか不安が残る所ではありますが、学生のみなさんは私の話を熱心に聞いてくれていたように思います。今回のような講演は初めてでしたので、非常に緊張しましたが、私にとって貴重な経験になりました。今後もこのような機会があれば積極的に関わっていきたいと思います。最後にこのような機会を与えてくださった諏訪先生と桑野先生にはお礼を申し上げます。ありがとうございました。

Photo1　江草文子さん

Photo2　増田卓さん

入門桑野道場（第３回）

/// 会報編集Gr.自主活動企画（平田、増田）///

会員の皆様、元気ですか。入門桑野道場を担当しております会報編集 Gr.（平田、増田）です。徐々に応募が増えているようです。皆様の積極的なご参加をお願いします。それでは今号の問題です。今号の問題は、数学工房会員の半田さんに考えていただきました。問題番号は、前号からの通し番号になっています。

問題(5) A, B をK−係数のｎ×ｎ行列とする時、次の関係式を証明せよ。

a) $rank(A+B) \le rank(A)+rank(B)$

b) $rank(AB) \le \min(rank(A), rank(B))$

c) $AB=0 \Rightarrow rank(A)+rank(B) \le n$

解答の宛先：kuwanodojo@googlegroups.com

なお､解答は WORD ファイルか PDF ファイルで送信ください。応募締切日は 12 月 25 日(火)です。

■■■前々号(No. 90)および前号(No. 91)の解答

問題(2)

閉区間[α, β]で積分可能な関数 f, g に対して、次のシュワルツの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)d\xi\right)^2 \le \int_\alpha^\beta (f(\xi))^2 d\xi \int_\alpha^\beta (g(\xi))^2 d\xi$$

★解答(2)

前々号の問題(2)は、Σ記号が積分と対応することを確認するための問題です。シュワルツの不等式を取上げました。

左辺＝

$$\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)d\xi\right)^2 = \int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)d\xi \int_\alpha^\beta f(\eta)g(\eta)d\eta$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)\int_\alpha^\beta f(\eta)g(\eta)d\eta d\xi$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)f(\eta)g(\eta)d\eta d\xi \quad \cdots\cdots ①$$

右辺＝

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)^2 d\xi \int_\alpha^\beta g(\xi)^2 d\xi = \int_\alpha^\beta f(\xi)^2 d\xi \int_\alpha^\beta g(\eta)^2 d\eta$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\xi)^2 \int_\alpha^\beta g(\eta)^2 d\eta d\xi$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\xi)^2 g(\eta)^2 d\eta d\xi$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\eta)^2 g(\xi)^2 d\xi d\eta$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\eta)^2 g(\xi)^2 d\eta d\xi \quad \cdots\cdots ②$$

式①、②より不等式の右辺から左辺を引くと次式が成立つ。

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)^2 d\xi \int_\alpha^\beta g(\xi)^2 d\xi - \left(\int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)d\xi\right)^2$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\xi)^2 g(\eta)^2 d\eta d\xi$$
$$- \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)f(\eta)g(\eta)d\eta d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\xi)^2 g(\eta)^2 d\eta d\xi + \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\eta)^2 g(\xi)^2 d\eta d\xi\right)$$
$$- \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(\xi)g(\xi)f(\eta)g(\eta)d\eta d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \left(f(\xi)g(\eta) - f(\eta)g(\xi)\right)^2 d\eta d\xi \ge 0$$

以上より、シュワルツの不等式が証明されました。

問題(3)

次の値を求めよ。（i：虚数単位、$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$）

1) $\sqrt{i}$

2) $\sqrt[4]{i}$

3) $(1+i)^n + (1-i)^n$

★解答(3)

問題(3)は、複素数の計算問題です。応募解答の中から**永井康史さん**のものを紹介します。**小松将義さん**も正解されています。

1) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ であるから、

ある複素数 $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について、

$$a^2 = i \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
$$\Leftrightarrow r = 1, \frac{\pi}{2} + 2n\pi = 2\theta \quad for\ some\ n \in Z$$
$$\Leftrightarrow r = 1, \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad for\ some\ n \in Z$$

よって、

$$\sqrt{i} = \cos\theta + i\sin\theta, \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

2) 同様にして、

$$a^4 = i \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$
$$\Leftrightarrow r = 1, \frac{\pi}{2} + 2n\pi = 4\theta \quad for\ some\ n \in Z$$
$$\Leftrightarrow r = 1, \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{n}{2}\pi \quad for\ some\ n \in Z$$

よって、

$$\sqrt[4]{i} = \cos\theta + i\sin\theta, \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{n}{2}\pi$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

3) $I_n = (1+i)^n + (1-i)^n$ とする。

$$I_{n+4} = (1+i)^4(1+i)^n + (1-i)^4(1-i)^n$$
$$= (1+4i-6-4i+1)(1+i)^n + (1-4i-6+4i+1)(1-i)^n$$
$$= -4I_n$$

$I_0 = 2, I_1 = 2, I_2 = 0, I_3 = -4$ であることを考慮すると、

$$I_n = \begin{cases} 2(-4)^k & if \quad n = 4k, 4k+1 \\ 0 & if \quad n = 4k+2 \\ (-4)^{k+1} & if \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

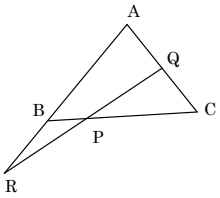
[桑野先生寸評] しっかりした解答です。3)は巧みに漸化式を導いていますが、却ってそのためにこの式の中に潜む美しい等式、さらに大きい一般性への入り口を

発見し損なっているのがやや残念です。

問題(4)

以下に示すMenelausの定理を証明せよ。複素平面上に3点A，B，Cを同一直線上にならないようにとる。△ABCにおいて、直線BC，CA，AB上に順に点P，Q，Rをとる。このとき、点P，Q，Rが同一直線上にある必要十分条件は以下の式を満たすことである。

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1$$



なお、複素平面上の点をＸＹとするとき、$\overrightarrow{XY}$はこのベクトルに対応する複素数と見る。

★解答(4)

問題(4)は、３点が一直線上にある場合の取り扱い方がポイントになります。**半田伊久太さん**の解答を紹介します。**永井康史さん**、**小松将義さん**も正解されています。

以下の命題１、系１、命題２を証明なしで用いる。

(命題１)複素平面上の３点Ｘ，Ｙ，Ｚに対して、対応する複素数をx, y, zとする。この時三角形ＸＹＺの符号付き面積は、

$$\frac{1}{4i}\begin{vmatrix} x & \bar{x} & 1 \\ y & \bar{y} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}$$

(系１) 複素平面上の３点Ｘ，Ｙ，Ｚに対して、対応する複素数をx, y, zとする。

３点Ｘ，Ｙ，Ｚが同一直線上にある。

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & \bar{x} & 1 \\ y & \bar{y} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}=0$$

(命題２) 複素平面上の３点Ｘ，Ｙ，Ｚに対して、対応する複素数をx, y, zとする。

３点Ｘ，Ｙ，Ｚが同一直線上にある。

⇔0でも1でもない実数ξが存在して z=(1−ξ)x+ξy と書ける。

(Menelausの定理の証明)

点A,B,C,P,Q,Rに対応する複素数をそれぞれ a,b,c,p,q,r とする。点P,Q,Rは、それぞれ各辺BC, CA, AB上にあるので0でも1でもない実数が存在して、下式で表わされる。

$$\begin{cases} p=(1-\lambda)b+\lambda c \\ q=(1-\mu)c+\mu a \\ r=(1-\xi)a+\xi b \end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

また、λ,μ,ξが実数であることに注意すれば、

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix}$$

さらに、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

上記の３つの式を一緒にして行列式をとると、

$$\begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}$$

一方、

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{(p-b)(q-c)(r-a)}{(c-p)(a-q)(b-r)}$$

において、式(＊)の一番上の式より

$$\frac{(p-b)}{(c-p)}=\frac{(1-\lambda)b+\lambda c-b}{c-((1-\lambda)b+\lambda c)}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

同様にして、

$$\frac{q-c}{a-q}=\frac{\mu}{1-\mu},\frac{r-a}{b-r}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

となる。以上から、

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\lambda\mu\xi}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\xi)}$$

点P,Q,Rが同一直線上にあり、点A,B,Cは同一直線上にないとする。このとき、

$$\begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

であるから、

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{vmatrix}=0$$

さらに、

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\xi & \xi & 0 \end{vmatrix}=\lambda\mu\xi+(1-\lambda)(1-\mu)(1-\xi)=0$$

したがって、

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\lambda\mu\xi}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\xi)}=-1$$

が言えた。十分性は逆にたどればよい。

[桑野先生寸評]代数的な一般性に固執するあまり、複素平面特有の幾何学的直感と計算の交差する優美さが、失われているような気がします。表現を切り詰める工夫があればもっとよかったと思います。

数学工房　2007年11月1日発行
発行人　桑野耕一
編集人　編集Gr.(平田裕一・増田卓)

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：08065762691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401