Math.
NO.93
www.sugakukobo.com
会報２００８年１月
数学工房

御　慶

― 新年のごあいさつ・20世紀数学との出会い私記（４） ―

◆◆◆　新年のごあいさつ

会員の皆さん、明けましておめでとうございます。

公的なサポートやアカデミズムと無関係に高度な数学への手解きをすることをはじめて何回目のお正月が来たでしょう。どうしてこのような前例の無いことを始めたのか、自分でも段々定かではなくなりつつあります。この場を借りて少し原点を思い出してみたいと思います。

年末、数日信州の山荘で休みを取らせてもらいました。雪に覆われて、墨絵のように滲んで見える山々を眺めながら思い出したのは、何ゆえ抽象数学かという問いに具体的に答えようとしたのが数学工房の出発点だったということでした。

抽象の方法は、19 世紀数学が準備し、20 世紀の数学が達成した最も強力な方法です。とりわけ、Cantor の集合論の理念は、抽象の方法の記述言語を与えたのです。この方法を使いこなすには、抽象表現と典型モデルの間における抽象への冷凍と具体への解凍という作業を自由に行える技術を身につける必要があります。数学工房の主たる目的は、実際に、抽象の方法を技術化し、習得可能なものにすることでした。稽古という言葉を使う理由は、既知の数学を材料に抽象の方法をこそ物にするという観点を強調したいがためです。

私たちに限りない喜びを与えてくれる本来の数学は、常に未生のうちにとどまり、閉じた知識として完結することはありません。抽象の方法を使いこなし、自分で歩けるようにならない限り、どこまで行っても、巨大な山陵のようにそそり立つ数学を遠くに見るだけで終わることになるでしょう。実際にそういう人はたくさんいますね。

稽古の補いとして、去年の秋から試験的に、入門コースから数学書の読み方クラスを始めてみました。今年は、このコースを育てることと、位相と解析のアドバンストコースとして、作用素論、微分方程式の教程を整備したいと思っています。本年もよろしく、数学工房の稽古を上手にご利用ください。

◆◆◆　20 世紀数学との出会い私記（４）　抽象の方法を求めて

大学院への進学が決まり、初めて指導教授のＳ先生の研究室の定例セミナーに顔を出したときのことです。研究室の先輩やセミナーに出席されている諸先生に挨拶をした後、すぐ上の学年のＴさんにあちらこちら案内してもらいました。そのとき、「ところでこの研究室では、今何を研究しているのですか？」と純朴に聞きました。その時の答えは、「何もやってないよ！」。これはショックでしたね。前々回にも書きましたが、この研究室のメンバーの基盤である位相線形空間の一般論は、当時すでに完成し、行き所を失いつつあったのです。この最初の一言は、なぜか私の中に食い込んでしまい、後々、後遺症となって現れました。

多変数関数論などを少しかじり始めた影響で、修士での専攻を関数解析にしたのですが、しばらくはすごく後悔をしました。やはり複素関数論にすべきだったかと。この領分のことは比較的ちゃんと勉強をしていたので、多少の自負があったのです。しかも、私の入った研究室の評判の悪いこと！今ならそんなことは屁とも思わないのですが、高度な抽象というのは、数学を生業としている人達の間でも評判が悪い！まったく趣味的で非実用的だ、気取ってばかりで論文書けんのかいという雑音をまわり中から聞かされました。

私は元々の素養のせいで、よく関数論や微分幾何の人達とも親しくしていたのですが、ちょっとアルコールでも入ろうものなら集中砲火！後年分かってきたのは、なまじ専門であるがために、自分が理解できず高級そうに見えることは、必要以上に非難したがるものなのです。しかも抽象的な数学に携わる側でも、抽象的な対象を扱う分野にいるからというだけで、無自覚にやっている人が多い。それは必ずしも平凡な人とは限らぬところが困ったところです。確かにこれでは理解されない。しかも私の属する研究室は方向を見出しかねて、漂流しているように見えました。先生はめったに教えてくれませんし、しかも格調の高い人ですから（時々、その一段上の凄さが分かるのです。不肖の弟子の師へのオマージュはいずれ。）、セミナーに集まってくるお弟子さんたちは、この高度

な抽象をもてあまして、何となく暗いのです。私のすぐ上は、当時三人（この時代としては異例の多さです。)、一人はきっちりと位相線形空間の勉強をしていましたが、一人は学部以来の発展方程式を、もう一人はさまざまな分野を揺れ動き、二人とも位相線形空間論はまじめに勉強しているようには思えませんでした。恐らく、それぞれ、数学の世間の冷たい風を浴びて肩身の狭い思いをしていたはずです。このような環境のせいで、しばらくなかなか研究室に馴染めず、共通語である位相線形空間の勉強も手がつかず、得体の知れない神経性の麻痺が起きたりして大変でした。

迷いを吹っ切るために参禅したりもしましたが、迷いは増すばかり。そうこうする内に、Yさんの誘いで、微分幾何学の研究室に顔を出す様になりました。ここの主は陽気で酒飲みで、セミナーの最中に酒盛りになったりするのは閉口でしたが、学生思いで、なかなか論文が書けない私たちの研究室のメンバーのことも何くれとなく心配してくれていました。無論、彼は幾何屋ですから、感覚的で、関数解析に見られる抽象性はまったく理解しないどころか、表現論的なものもまったく理解できていないように見えました。そして酒の勢いでする抽象的な数学への攻撃は、誤解に基づく部分も多く、同意はできませんでしたが、この先生には何よりも学生への愛情がありましたので、多少のことを我慢するだけのことはありました。

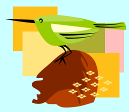
まもなく関数論と幾何の研究室と共同で、非ユークリッド円板や複素上半平面の一般化である双曲（負曲率）多様体の本読みセミナーを、この分野の創始者小林昭七先生のレクチャーノートを用いて始めました。このセミナーが、どれくらい、どこまで続いたかはもうまったく記憶にありませんが、原著のきわめて明晰な抽象性に感銘を受けると同時に、それをあくまでも感覚的に理解したい幾何の連中の巧妙な絵にとても感銘を受けました。もっとも、この研究室の若手によると、この陽気な研究室の主のテンソル計算は名人技だが、現代的な幾何への理解が全くないということで、この頃から、助手を中心に Lie 群や表現論の勉強会が熱心に行われておりました。まだ古典的なベクトル解析や、それどころか古典射影幾何のような古めかしいスタイルの数学しか知らない先生方が現役でいらっしゃった時代のことです。前にも書きましたが、この頃すでに、Bourbaki 的思想による数学の再編成も一段落して、もう次の時代を画する仕事が、解析で言えば、コホモロジカルアナリシスの時代が始まっていました。

私自身は元々抽象性への志向が極めて強い人間なのですが、抽象の本当の意味は全く分からぬまま、抽象的な方法の、諸分野への応用などを考えるようになりました。そろそろ、紙幅が尽きてきたので、抽象の方法の意味を求める旅、今回はこの辺で。次回の 20 世紀数学との出会いは関数環と Banach 環、作用素環の周辺を予定しています。

2008 年 1 月 1 日　桑野耕一

春　学　期　講　座　案　内

2008年1月～4月



2008 年春学期講座は、入門 6 講座、初級 2 講座、中級 2 講座を開講します。

<< 春学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程Ⅳ	1 月 27 日	入門
I.B	Fourier 変換と関数空間	1 月 19 日	入門
I.C	確率測度概論	1 月 25 日	入門
I.D	初等線型代数と微積分	1 月 20 日	入門
I.E	数学書を読もう	1 月 17 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	1 月 26 日	入門
E.A	位相と解析序説Ⅲ	1 月 27 日	初級
G.	抽象線型代数入門Ⅲ	1 月 20 日	初級
M.A	ヘルマンダーを読むⅡ	1 月 26 日	中級
M.B	テンソル場の基礎理論	1 月 19 日	中級

<< 春学期講座カレンダー >>

月	日	曜日	略号	時　間
1	17	木	I.E	19:00-21:00
	19	土	I.B	14:00-16:00
			M.B	17:00-19:00
	20	日	I.D	11:00-13:00
			G	14:30-17:30
	25	金	I.C	18:30-20:30
	26	土	I.F	14:00-16:00
			M.A	17:00-19:00
	27	日	I.A	11:00-13:00
			E.A	14:30-17:30
	31	木	I.E	19:00-21:00
2	2	土	I.B	14:00-16:00
			M.B	17:00-19:00
	3	日	I.D	11:00-13:00
			G	14:30-17:30
	8	金	I.C	18:30-20:30
	9	土	I.F	14:00-16:00
	10	日	I.A	11:00-13:00
			E.A	14:30-17:30
	11	月祝	M.A	14:00-19:00
	14	木	I.E	19:00-21:00
	16	土	I.B	14:00-16:00
			M.B	17:00-19:00
	17	日	I.D	11:00-13:00
			G	14:30-17:30
	22	金	I.C	18:30-20:30
	23	土	I.F	14:00-16:00
	24	日	I.A	11:00-13:00
			E.A	14:30-17:30
	28	木	I.E	19:00-21:00
3	1	土	I.B	14:00-16:00
			M.B	17:00-19:00
	2	日	I.D	11:00-13:00
			G	14:30-17:30
	7	金	I.C	18:30-20:30
	8	土	I.F	14:00-16:00
			M.A	17:00-19:00
	9	日	I.A	11:00-13:00
			E.A	14:30-17:30
	13	木	I.E	19:00-21:00
	15	土	I.B	14:00-16:00

月	日	曜日	略号	時　間
3	15	土	M.B	17:00-19:00
	16	日	I.D	11:00-13:00
			G	14:30-17:30
	20	木祝	M.A	14:00-19:00
	21	金	I.C	18:30-20:30
	22	日	I.F	14:00-16:00
	23	日	I.A	11:00-13:00
			E.A	14:30-17:30
	27	木	I.E	19:00-21:00
	29	土	I.B	14:00-16:00
			M.B	17:00-19:00
	30	日	I.D	11:00-13:00
			G	14:30-17:30
4	4	金	I.C	18:30-20:30
	5	土	I.F	14:00-16:00
			M.A	17:00-19:00
	6	日	I.A	11:00-13:00
			E.A	14:30-17:30

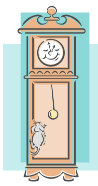
（１）I.A 解析教程Ｖ
Cour d'analyse の時代　レベル 入門

[内容]
[0]いくつかの問題
[1]Limes 再論
[2]Cauchy の定式化（Cauchy 列は、収束する）
[3]Cauchy の方法による基本定理の証明
[4]一様連続性と連続関数の積分可能性
[5]演習

（２）I.B Fourier 変換と関数空間　　レベル 入門

[内容]
[1]Fourier 変換の概念
1)急減少関数のクラスの構造
2)等長変換としての Fourier 変換
3)Fourier 変換の固有関数としての Hermite 多項式
4)2 乗可積分関数の空間の Fourier 変換
5)特論
6)可積分関数の空間の Fourier 変換
7)Fourier－Stieltjes 積分と Bochner の定理
[2]関数解析の言葉より
1)ノルム空間・Banach 空間
2)ノルム空間上の線形作用素

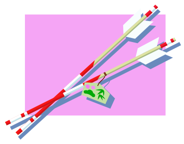
（３）I.C 確率測度概論　　　　レベル フリー

[内容]

[1]確率変数の特性量
1)期待値と Stieltjes 積分
2)様々な特性量
3)共分散・相関、分散共分散行列
[2]分布の特性関数
1)モーメント母関数
2)複素期待値
3)特性関数
[3]分布の収束

（４）I.D 初等線形代数と微積分　レベル 入門

[内容]

[1]領域上の積分
1)領域と領域の体積
2)領域上の積分
3)積分の基本的な性質
4)逐次積分

[2]変数変換
1) Jacobi 行列
2)体積の変換公式
3)変数変換公式

[3]曲面の面積
1)Gram 行列
2)ｋ次元微小面積の変換公式
3)曲面上の積分領域上の積分
[4]領域上の積分
1)Jacobi 行列式
2)体積変換
3)積分の変数変換
4)例　Gram 行列と行列式

（５）I.E 数学書を読もう　　　　　レベル 入門

[内容]
前期は多項式の算法を材料にした、今期は複素数を材料に、本の読み方の演習をする予定である。但し、参加者との相談で取り上げる材料を変更する可能性があります。

（６）I.F 数学の基本語彙と文法　　　レベル入門

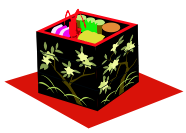
[内容]

[1]Σ記号の用法
[2]数学的帰納法の様々なかたち
[3]集合族の代数
[4]写像の概念
[5]写像の像と原像
[6]演習

（７）G 抽象線形代数
内積空間と作用素のクラス　レベル 初級

[内容]
[1]内積空間の幾何学
1)内積空間の概念と典型モデル
2)直交性
3)正射影補題、Cauchy－Schwartz の不等式
4)正射影定理・正規直交基底の存在
5)近似定理
[2]線形写像のクラス
1) 線形形式の表現定理と双対空間の内積
2)アジョイントと代数的アジョイント
3)対称変換・交代変換・等長変換
4)正射影の代数
5)対称変換の最大原理

（８）E.A 位相と解析序説Ⅲ　　　レベル 初級

[内容]
[1]連続写像の空間
1)Euclid 空間の開集合上の連続写像の空間の
自然な距離
2)正規族、連続写像の空間における相対コンパクト
3)Arzera の定理
[2]線形空間の位相
1)局所凸空間
2)有向系と無限和
3)直和

[3]線形作用素
1)線形写像・線形形式
2)Banach 環
3)スペクトル

（９）M.A ヘルマンダーの多変数解析入門（笠原健吉訳 東京図書）を読む　レベル 中級

[内容]
０７年秋学期の続き、今回は、有理型関数の定義を、多変数でも用いられるやり方で与え、極と零点の分布

についての基礎定理 Mittagleffler･Weierstrass の定理を扱う。また、補助的な関数のクラスとして劣調和関数のクラスを扱います。
[1]Mittagleffler の定理
[2]Weierstrass の定理
[3]劣調和関数のクラス

(10) M.B テンソル場の概念と外微分

レベル 中級

[内容]

Nickerson、Spencer、Steenrod の「現代ベクトル解析」11 章微分形式の微分法（岩波書店）にあたる部分をなるべく初等的に扱いたい。目標は計量線形空間の調和解析の基本的な道具を整えることである。

[1]接ベクトル場、テンソル場
[2]引き戻し、座標変換
[3]外微分作用素
[4]Poincare の補題
[5]計量空間上の、外微分作用素に関係する
　さまざまな作用素
[参考書]現代ベクトル解析の原理と応用, 新井朝雄,
　共立出版, 第 8 章

[備考]

各講座とも 1 講座￥30000（税込）、学生￥21000（税込）。途中参加の場合、参加回数×￥5000＋￥2000（テキスト代・手数料）です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。

数学工房ガイダンス，会員の集い

数学工房ガイダンス・会員の集い・懇親会

1 月 14 日（月曜・祝日）に、ガイダンス・会員の集い・懇親会が行われました。会員の集いでは、ゲストの諏訪紀幸先生（中央大学理工）、逸見昌之先生（統計数理研究所）と桑野先生が、会員の皆さんからのご質問から選んだ次の 3 つのテーマについて短いお話をされました。

(1)線形空間の複素化の意味と効用　　　諏訪紀幸
(2)数理統計における、数学の抽象的方法の意味
　（個人的な経験から）　　　逸見昌之
(3)抽象空間の方法
　（関数や作用素を点としてみる効用）　　桑野耕一

この 3 つの話を基に活発な議論が行われました。質疑応答の会の後、イタリアンレストラン、トラトリア・イタリアで、ゲストの御二人を交えて数学工房の懇親会・新年会が行われました。詳しい報告は次号に行う予定です。

Photo1　懇親会での桑野先生

中央大学講演会報告（その３）

/// 講演者企画(藤田、江草、増田、穴見) ///

中央大学講演会報告の最終回です。講演内容に加えて参加された学生の感想を紹介します。

■■■　数学工房会員講演内容４：

数学の魅力　　　～　穴見公隆

わたしは日頃、精神科医として勤務しています。精神医学と数学というのは、明らかに直接の結びつきはありません。しかし機能 MRI を用いた脳の機能画像の研究もやっており、信号処理ではおおいに数学を必要とします。そのため数学を学びたいとずっと思っていたところに、偶然に数学工房を知り、通いだしてもう 1 年ほどになりました。今は数学を身近な仕事に応用することのみならず、数学のもつ抽象性そのものに魅せられています。数学は、現代科学のあらゆる分野に応用されており、数学なしには科学は成り立たないほどです。それは単に計算の役に立つばかりでなく、もっと本質的な部分に関わっています。たとえば、極微、極大、極遠の世界は、わたしたちが直接経験できる世界ではありません。しかし数学を縦横無尽に駆使した現代理論物理学は、このような世界にも一定の理解を与えてくれます。しかし数学が描くその世界像はもはやわたしたちがよく知る世界の延長ではなく、極めて奇妙で常識を大きく覆す世界です。一方で、通常言語による哲学ではこのような、精確でかつ奇妙な世界像を導き出すことはできません。つまり数学は、哲学の限界を超えた世界を理解する道具を与えているのです。それは哲学の翼であり、わたしたちの悟性や感覚の世界を超えて、その向こう側にある不可視な世界の理解を可能にする唯一の手段なのかもしれません。そのような数学を学ぶことは、わたしたちにとって大きな意義があると信じます。私が生業としている（精神）医学の世界では、その基本的方法論は哲学よりさらにシンプルです。極端に言えば、見て触って理解する、という原始的というか即物的なのですね。現代においてもこの原理は変わりません。今、心理学や脳科学が一種の世の中の流行りになっていますが、実は脳と心の本質は何も分かっていません。ひょっとしたらこのような分野にも「抽象」数学が寄与することができるかもしれません。自分自身がもっともよく知る私的な主観世界を、数学がきわめて奇妙で抽象的な脳と心の連関理論として描くことができるとすれば、これほど痛快なことはありません。

Photo2　穴見公隆さん

■■■　参加学生の感想とまとめ：

～　増田　卓

今回は学生の感想を紹介し、３回にわたって連載した中央大学講演会報告の締めくくりにしたいと思います。藤田、江草、増田、穴見の４人の会員による講演が終了した後、学生のみなさんにはアンケートをお願いしました。アンケートでは特に印象に残った人の講演について、講演におけるキーワードやポイント、および感想を自由に書いてもらいました。中央大学の学生のみなさんは真剣にアンケートに取り組んでくれたようで、講演を聴いていた学生全員が何かしらの感想やメッセージを残してくれました。

学生の感想を読んでいると、江草さんの講演に対する感想が多かったようです。特に女子学生からは圧倒的な支持を得ています。江草さんは母親として子育てをしながら、職業をもち、そしてなおかつ数学を学んでいます。その姿は同じ女性の目からはとても輝いて見えたようです。また、江草さんの数学に対する純粋な思いが共感を呼んでいるようです。以下に学生の感想の一部を紹介します。

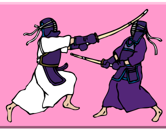
「江草先生の、数学がある出来事にぴったりとはまるとおっしゃっていたことにとても共感しました。昔はそういうことが多々あったけれど、今は少なくなったように思います。」

学生の多くは数学が実際の社会でどう役に立っているかを知りたかったようです。その点では、穴見さんが医学の世界で数学がどのように使われているか、具体例を挙げながらわかりやすく説明していました。穴見さんの話を聞いて数学は世の中の役に立つと確信した学生が多かったようです。印象に残った感想を紹介します。

「自分はよく学んでいる数学が何の役に立つのだろうと考えることがありました。突き詰めていけば、数学を他の分野につなげ、役に立たせられるということが分かった。長期的な目で、いつか役に立つときがくると思いながら勉強しようと思いました。」

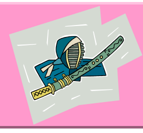
最後になりますが、学生のみなさんにとって本講演会は、自分は何のために数学を勉強するのかを考えるいい機会にもなったようです。そして、講演者一人一人の姿と自分の姿を照らし合わせながら自分と数学との関係を探っているようでした。学生に数学について深く考えてもらうという意味においては、本講演会は大成功と言えると思います。

Photo3　増田卓さん



入門桑野道場（第４回）

/// 会報編集Gr.自主活動企画（平田、増田、坂口）///



会員の皆様、新年明けましておめでとうございます。入門桑野道場を担当しております会報編集 Gr.（平田、増田、坂口）です。今号から坂口尚文さんが会報編集 Gr. に参加してくださることになりました。よろしくお願い申し上げます。

なお、会報編集 Gr. では引き続き新メンバーの募集を行っております。会報編集に興味のある方はぜひご連絡ください。また会報の各記事に関する感想等もお待ち申し上げます。会報編集 Gr. では、会員の皆様のご要望に即した形で、読んで楽しく、役に立つ情報提供を目指しております。忌憚のないご意見をお願いします。本年もよろしくお願いします。

それでは今号の問題です。問題番号は、前号からの通し番号になっています。今号は再び複素数の問題を取り上げました。

問題 (6)　次の関係式を示せ。

$x^5=1$ のとき、

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x}+\frac{x^4}{1+x^3}=2$$

問題 (7) P を複素平面における単位円周上の点、A_1, A_2, ⋯, A_n を単位円に内接する正多角形の頂点とする。このとき、

$$PA_1^4+PA_2^4+PA_3^4+\cdots+PA_n^4$$

は、点 P の位置に無関係に一定の値を取ることを示せ。

解答の宛先：kuwanodojo@googlegroups.com

なお解答は可能であれば、WORD ファイルか PDF ファイルで送信してください。応募締切日は 2 月 25 日（月）です。

■■■前号 (No. 92) の解答

問題 (5)　A, B を K−係数の n × n 行列とする時、次の関係式を証明せよ。

a)　$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$

b)　$rank(AB)\le \min(rank(A), rank(B))$

c)　$AB=0\Rightarrow rank(A)+rank(B)\le n$

★解答(5)

この問題には、**小松将義**さんと**永井康史**さんが正解されております。小松さんの解答例とこの問題の出題者である半田さんの解説および桑野先生の寸評を紹介します。

以下に小松さんの解答例を示します。

a)の証明

$rank(\mathbf{A}) = r$, $rank(\mathbf{B}) = s$ とする。

$\mathbf{A}$ の列で一次独立なものを $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \cdots, \mathbf{a_r}$ 、

$\mathbf{B}$ の列で一次独立なものを $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \cdots, \mathbf{b_s}$ とすれば、

$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ のすべての列は、

$r+s$ 個の列ベクトルの一次結合で表される。

$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ の位は、

その列のつくる列ベクトルの一次独立なものの数の最大数であるから、

$rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le r+s$

$\therefore rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le rank(\mathbf{A}) + rank(\mathbf{B})$

b)の証明

$\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$ の独立な解の数は、

$n - rank(\mathbf{AB})$ である。

$\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ の独立な解の数は、

$n - rank(\mathbf{B})$ である。

ゆえに、 $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$ を満足する $\mathbf{x}$ について、

一次独立な $\mathbf{Bx}$ の位は、

$0 \le n - rank(\mathbf{AB}) - (n - rank(\mathbf{B}))$

$= rank(\mathbf{B}) - rank(\mathbf{AB})$

これより、 $rank(\mathbf{AB}) \le rank(\mathbf{B})$ (1)

また、

$$rank(\mathbf{AB}) = rank\left((\mathbf{AB})^t\right)$$
$$= rank\left(\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t\right) \le rank\left(\mathbf{A}^t\right) = rank(\mathbf{A}) \quad (2)$$

(1),(2)より $rank(\mathbf{AB}) \le \min(rank(\mathbf{A}), rank(\mathbf{B}))$

c)の証明

$\mathbf{B}$ の列ベクトル $\mathbf{b}_j (1 \le j \le n)$ とすれば、

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ であるから、

$\mathbf{Ab}_j = \mathbf{0} (1 \le j \le n)$。

よって、 $\{\mathbf{b}_j\}$ が生成する部分空間(その次元は $rank(\mathbf{B})$)は、 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の解のベクトル空間(次元は $n - rank(\mathbf{A})$)に含まれる。

よって、 $rank(\mathbf{B}) \le n - rank(\mathbf{A})$。

以下に半田さんの解説を示します。

[定義と前提]

$rank(\mathbf{A})$ を次のように定義する。

$L_A : K^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in K^n$ とするとき、

$rank(\mathbf{A}) := rank(L_A) = \dim(\mathrm{Im}(L_A))$

次の命題と定理を仮定する。

[命題]

V を線型空間、 U_1 、U_2 を V の有限次元線型部分空間とする。

このとき、

$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

したがって、$\dim(U_1 + U_2) \le \dim U_1 + \dim U_2$

[Image -Kernel Thorem(次元定理)]

V, W を線型空間、 V は有限次元とし、

$T : V \to W$ を線型写像とする。

このとき、$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$

はじめに、$L_A : K^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in K^n$ 、 $L_B : K^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Bx} \in K^n$ とする。

a)の証明

$(L_A + L_B)(K^n) = (L_A)(K^n) + (L_B)(K^n)$ であり、

命題から、

$rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \dim(\mathrm{Im}(L_A + L_B)) = \dim((L_A + L_B)(K^n))$

$= \dim(L_A(K^n) + L_B(K^n)) \le \dim(L_A(K^n)) + \dim(L_B(K^n))$

$= \dim(\mathrm{Im}(L_A)) + \dim(\mathrm{Im}(L_B)) = rank(\mathbf{A}) + rank(\mathbf{B})$

b)の証明

写像の性質から

$\mathrm{Im}(L_A \circ L_B) \subset \mathrm{Im}(L_A)$

したがって、

$rank(\mathbf{AB}) = \dim(\mathrm{Im}(L_A \circ L_B))$

$\le \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = rank(\mathbf{A})$ (*)

また、 ker の性質から、

$\ker(L_B) \subset \ker(L_A \circ L_B)$

したがって

$\dim(\ker(L_B)) \le \dim(\ker(L_A \circ L_B))$

$n = \dim(K^n)$ であり、

Image-Kernel Theoremから

$n - \dim(\mathrm{Im}(L_B)) \le n - \dim(\mathrm{Im}(L_A \circ L_B))$

よって、$\dim(\mathrm{Im}(L_A \circ L_B)) \le \dim(\mathrm{Im}(L_B))$

すなわち、$rank(\mathbf{AB}) \le rank(\mathbf{B})$ (**)

(*)、(**)より

$rank(\mathbf{AB}) \le \min\{rank(\mathbf{A}), rank(\mathbf{B})\}$

c)の証明

仮定から

$L_A(\mathrm{Im}(L_B)) = L_A(L_B(Kn))$

$= (L_A \circ L_B)(K^n) = \{0_n\}$

ここで、 $\{0_n\}$ は、K^n の零ベクトル

したがって、$\mathrm{Im}(L_B) \subset \ker(L_A)$

よって、Image-Kernel Theorem と合わせて、

$\dim(\mathrm{Im}(L_B)) \le \dim(\ker(L_A)) = n - \dim(\mathrm{Im}(L_A))$

したがって、$\dim(\mathrm{Im}(L_A)) + \dim(\mathrm{Im}(L_B)) \le n$

すなわち $rank(\mathbf{A}) + rank(\mathbf{B}) \le n$

[桑野先生寸評]この問題は線形写像という概念が、行列という、いわば便宜的な表現形態によらず存在するということを理解するためのよい問題です。解答された小松さん永井さんともに、ランクという概念が行列表現によらないことを理解されていると思います。問いを付け加えましょう。この問題を線形代数の一般論の形で表示するとどうなりますか?

数学工房　2008年1月1日発行

発行人　　桑野耕一

編集人　　編集Gr.

(平田裕一・増田卓・坂口尚文)

連絡先

オフィス電話:042-495-6632

数学工房連絡専用(携帯):08065762691

連絡は極力e-メールをご利用下さい。

e-mail:sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail:monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)

ホームページ:

http://www.sugakukobo.com

数学工房　教室

〒170-0003

豊島区駒込1-40-4

全国蕎麦製粉会館2F 202-203

数学工房　オフィス

〒204-0023

清瀬市竹丘1-17-26-401