



◆◆◆ 解析学は Galilei のプログラムから始まる

考えてみると、解析学と言うものの起源はそう古くはない。解析学の始まりは、Galilei が身近な運動という自然現象について、十分な根拠のある研究がないことに気づき、自然を数学的モデルにより研究し、その結果を実験と比較するという方法を提唱したときではないだろうか。今では、乱用気味でごく当たり前になった方法である。(尤も多くの現場では Galilei が嘆くに違いないようなやり方で、数理科学大安売りだが！)

当時西欧世界で唯一運動理解の典拠とされたのは Aristotle の自然学であった。この偉大な哲学者が書き残したことを、権威によらず理性に基づく推論によって、一步一步検証を始め、ほとんど、正しいことが書かれていないことに気が付いたのが、Galilei の自然研究の始まりである。Galilei はそのような姿勢を Aristotle 自身から学んだのである。当時 Aristotle の著作は聖典として、(恐らく Aristotle 自身は思ってもいないことであろうが！) 絶大な権威を持っていたのである。

Galilei の新方法とは、現象の生起する世界を量化し、現象を表す量を状態の関数として捉えようということである。実際に、落下運動を単純な 1 次式によりモデル化し、斜面を使った巧妙な装置によって、位置の時間変化と測定したのである。と言うと簡単なことのようにだが、歴史の日付を見てみると、Galilei が、落体の実験をするのが、1589 年、Fermat の「平面および立体の軌跡入門」が 1635 年、Descartes の「方法序説」、「屈折光学」、「幾何学」が 1636 年である。Newton が生まれたのは奇しくも Galilei の没年である 1642 年、Leibniz の生誕が 1646 年である。関孝和の「発微算法」は 1674 年、Leibniz の微積分が 1684 年、Newton の「Principia」が 1687 年である。

Galilei は私たちがごく当たり前のように使っている関数や、その解析のもっとも有力な道具である微積分、それどころか、自然現象の状態を記述する座標空間ですら持っていなかったのである。もっと言えば、振り子時計の発明は、1583 年の Galilei の振り子の等時性の発見の実用化で、振り子時計の特許は 1658 年だから、客観的な時間(天体の運動のような巨視的な現象はまだしも)の把握、計量は簡単ではない！

若いころ、教養として、Galilei の幾つかの著作は読んだはずだが、数学のみに目が行って、歴史的な目がかけていた私には、Newton や Euler に触れたときのような、感動や驚きを感じなかったようである。「みても見えず、聴いても聞こえず。」とはこの事である。あまり色々な書物で Galilei は天才だ、天才だと持ち上げられるので反発したのかもしれない。その昔、Aristotle がそうであったように、Galilei もまた権威に祭り上げられているのではないかと！

同時代の科学界におけるもう一人の重要人物 Kepler が、Galilei にむかって「貴方こそ本物の数学者です。」と呼びかけた理由がこの頃漸く分かるようになってきた。ともあれ Galilei の暗示した方向の実現へ向かって解析学の 400 年の歩みが始まった。

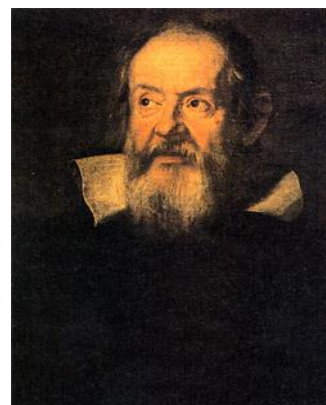


Photo1 Galileo Galilei

◆◆◆ Galileo Galilei 年譜

- 1564 ピサに生まれる。
- 1583 振り子の等時性の発見。
- 1590 落体の実験。「運動について」をラテン語で書き回覧。
- 1592 パドバ大学正教授に就任。
- 1597 ケプラーの著書の序文を読み、コペルニクス支持の手紙を



書く。

1606 幾何学のおよび軍事的コンパスの効用出版。

1609 望遠鏡の原理の研究、製作。月面観測、木星の衛星発見。

1610 「星界の報告」出版。

パドバ大学を退きピサ大学数学教授兼トスカナ大公付き哲学者・首席数学者。

1613 太陽黒点とその諸現象の沿革および証明。

1615 異端審問所に告発される。

1618 海の干満について。

1623 「賈金鑑識官」出版。

1632 「世界体系」出版。

1633 Galilei 裁判。

1638 「新科学対話」出版。

1642 フイレンツェ近郊で死去。



2008 年 5 月 1 日 桑野耕一



夏 学 期 講 座 案 内

2008年5月～8月



夏学期開講予定の講座は、入門 I.A、I.B、I.C、I.D、I.F、初級 E.A、G、中級 M.A、M.B です。なお初級の G は速習コースです。またその他に、会員の要望を受けて、「H.Cartan の複素関数論を読む」というオプション講座が設けられています。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程	5 月 18 日	入門
I.B	複素函数概論	5 月 10 日	入門
I.C	確率統計の数学的基礎 I	5 月 16 日	入門
I.D	微積分と初等線形代数	5 月 11 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	5 月 17 日	入門
E.A	抽象位相	5 月 18 日	初級
G	線型代数速習	5 月 11 日	初級
M.A	多変数複素関数論入門	5 月 17 日	中級
M.B	関数解析学	5 月 10 日	中級
O	H.Cartan 複素関数論	5 月 14 日	フリー

<< 夏学期講座カレンダー >>

月	日	曜日	略号	時 間
5	10	土	OP M. B1 I. B1	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	11	日	I. D1 G1 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	14	水	O1	19:30-21:00
	15	木	OP	18:50-20:00
	16	金	OP I. C1	16:40-17:50 18:30-20:30
	17	土	OP M. A1 I. F1	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	18	日	I. A1 E. A1 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	22	木	OP	18:50-20:00
	23	金	OP	16:40-17:50
	24	土	OP M. B2 I. B2	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	25	日	I. D2 G2 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10

月	日	曜日	略号	時 間
5	28	水	O2	19:30-21:00
	29	木	OP	18:50-20:00
	30	金	OP I. C2	16:40-17:50 18:30-20:30
	31	土	OP M. A2 I. F2	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
6	1	日	I. A2 E. A2 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	5	木	OP	18:50-20:00
	7	土	OP M. B3 I. B3	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	8	日	I. D3 G3 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	11	水	O3	19:30-21:00
	12	木	OP	18:50-20:00
	13	金	OP I. C3	16:40-17:50 18:30-20:30
	14	土	OP M. A3 I. F3	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	15	日	I. A3 E. A3 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	19	木	OP	18:50-20:00
	20	金	OP	16:40-17:50
	21	土	OP M. B4 I. B4	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	22	日	I. D4 G4 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	25	水	O4	19:30-21:00
	26	木	OP	18:50-20:00
	27	金	OP I. C4	16:40-17:50 18:30-20:30
	28	土	OP M. A4 I. F4	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	29	日	I. A4 E. A4 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
7	3	木	OP	18:50-20:00

月	日	曜日	略号	時 間
	4	金	OP	16:40-17:50
			OP	11:30-12:40
	5	土	M. B5 I. B5	14:00-16:00 17:00-19:00
			I. D5	11:00-13:00
	6	日	G5 OP	14:00-16:30 17:00-18:10
	9	水	O5	19:30-21:00
	10	木	OP	18:50-20:00
	11	金	OP I. C5	16:40-17:50 18:30-20:30
	12	土	OP M. A5 I. F5	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	13	日	I. A5 E. A5 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	17	木	OP	18:50-20:00
	18	金	OP	16:40-17:50
	19	土	OP M. B6 I. B6	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	20	日	I. D6 G6 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	23	水	O6	19:30-21:00
	24	木	OP	18:50-20:00
	25	金	OP I. C6	16:40-17:50 18:30-20:30
	26	土	OP M. A6 I. F6	11:30-12:40 14:00-16:00 17:00-19:00
	27	日	I. A6 E. A6 OP	11:00-13:00 14:00-16:30 17:00-18:10
	31	木	OP	18:50-20:00
8	1	金	OP I. E6	16:40-17:50 18:30-20:30

(1) I.A 入門解析教程 無限小解析以前

レベル 入門

数学工房の最も基本的な講座のひとつです。数学の歴史の流れから幾つかの材料を題材に、想像力を働かせて、その数学が生まれてくる現場に立会い、解析学とは何かを考えていきます。

今回は、数学的帰納法の様々な用法と非順序和からはじめて、2項係数の発見、そして12世紀のFibonacciの発見をひとつの仮説に基づいて再発見する。続くのは、ルネッサンスの代数だが、ここは飛ばして、補間と差分、無限小解析の発見前夜まで。Taylorの公式もこの流れの中で発見された。Newtonを頂点にした多項式補間に焦点を絞る。

多項式補間は、計算手段の発達により、現代でも、新しい意味で発展を遂げている。基礎理論は線型代数・関数解析の意味で読み直されている。次のタームは、無限小解析の発見と解析関数の概念と新しい関数たち解析の18世紀を中心に。

[内容]

- [1] イントロダクション 総和と数学的帰納法
- [2] 2項係数の発見
- [3] Fibonacci
- [4] 多項式補間・差分（解析学事始）



(2) I.B 複素関数概論（解析性と位相）

レベル 入門

複素関数論の特徴の理解を題材にトポロジーと解析

の相互作用を丁寧に見ていく。(1)は付録である。(2)、(3)では主に完備 norm 空間としての、複素平面の解析の基礎を取り扱う。(4)以降は一般位相との関係に重点がおかれる。続編の骨格は[理系への数学]へ執筆記事による。

[内容]

- [1] イントロダクション 複素数系・複素平面
- [2] 列・級数
- [3] 連続関数・関数項の級数・冪級数
- [4] Cauchy-Riemann 方程式
- [5] 正則関数

(3) I.C 確率統計の数学的基礎 I 確率論の枠組み レベル 入門

理論の枠組みは明確に意味を説明するがその仕組みが理論の理解に不可欠な場合を除き証明はしない。確率空間を作ったり、様々な分布の関係を求めたり、特性関数を求めたり、素材を自由に扱うための手習いのつもりである。応用分野ではこけおどしの道具が扱われることが多い。そのような目くらましに騙されぬ感性を磨きたい。基本的な背景を理解してもらおうつもりである。

[内容]

- [1] 標本空間・事象の代数
- [2] 確率計算の基礎公式、条件付確率
- [3] 典型的な確率空間
- [4] 確率変数と確率分布
- [5] 離散分布
- [6] 絶対連続分布



(4) I.D 微積分と初等線型代数 レベル入門

微積分とは局所的には Euclid 空間の初等図形の計量に他ならない。微分法は、写像を定義域の与えられた点の近くで、線型写像で近似することである。

初等線型代数を学びつつ、その概念を利用して、任意次元の Euclid 空間の初等幾何を展開し任意次元の空間に属する基本図形たちそれ自体の空間がまた計量構造を持つ、数学特有の入れ子の構造を理解する。その結果を用いて、曲面上の積分、高階の微分、多変数の Taylor 公式あたりまでを論ずる。

[内容]

- [1] 数ベクトル空間
- [2] 内積・直交性
- [3] Euclid 空間の初等幾何
- [4] 線形部分空間、Span、商空間
- [5] 行列と線型写像
- [6] 随伴と写像の微分法



Québec

(5) I.F 数学の基本語彙と文法 レベル入門

初めに意識的に学ぶことの少ないΣの用法を多重添え字の場合を中心に実習する。応用練習として同じ対象に異なった和の束をすることにより様々な表現が得られることを実践的に学ぶ。数学的帰納法も状況に応じて、様々なバリエーションを使いこなすことを学ぶ。

[内容]

- [1] Σの用法と数学的帰納法の様々な用法
- [2] 集合
- [3] 写像
- [4] トピックス（代数語入門）

(6) E.A 抽象位相

レベル初級

抽象位相の基礎理論の概略を、道具として使うこと

を念頭に理解する。したがって、専門分野としての、位相空間論には深入りしない。今回は、若干抽象位相の材料の取り上げ方を変える。したがって、途中で、テキストの内容を変更する部分が出てくる可能性がある。例年のコースでは、意識的に避けている内容も含めて取り上げる。実際の局面で位相がどのように用いられるかは、I.B 複素関数論概論、M.A 多変数関数論、M.B 作用素論などを通して学んでいただきたい。

【内容】

[1]開集合導入の契機、距離的ではない、位相空間、疑距離

[2]近傍系と点の位相的分類

[3]有向集合とネット

[4]連続写像・位相同型 開写像・閉写像

[5]コンパクト性・連結性 I

[6]位相の比較、位相の階層、位相の生成

[7]位相の基底、準基底



(8) G 抽象線型代数速習コース レベル初級

レクチャーノートをあらかじめ読んでおいていただくという条件で、夏学期と夏休み期間の集中講座を利用して、内積空間を除く抽象線型代数の主要部を学びます。秋からは標準形に入る予定です。今のところは、旧テキストを使っています。

【内容】

[1]線型空間・線型部分空間

[2]典型モデル

[3]Span、線型独立・従属・次元

[4]総合演習 形式冪級数環・多項式環の線型空間としての構造

[5]重ね合わせ原理・線型写像

[6]線型写像の基本定理、存在定理と構成定理、

Image - Kernel 定理

[7]線型写像の線型空間・線型変換の代数

[8]代数的 Adjoint

[9]行列表現 I

(9) M.A 多変数複素関数論入門

(Hoermander を読む)

レベル中級

Hoermander の多変数複素解析学の第 2 章を読みます。今回は一変数複素関数論にパラレルな部分です。しかし既にこの部分でさえも Hartogs の定理のような多変数複素関数論特有の性格が現れてきます。今回はあまり細部に立ち入らないで定理の意味を考えます。概念をきっちり組み立てていく、本来の多変数関数論に比べると、多少、構造的理解が粗っぽく見えるのは私(桑野)の偏見でしょうか？

(10) M.B 関数解析学 線型作用素入門

レベル中級

作用素の理論の概略を材料に、解析・代数・位相の総合演習をすることが狙いである。Banach 空間上の作用素から、始める。今期は共役空間の概念や弱位相、汎弱位相等の取り扱いはいらない。

【内容】

[0]イントロダクション

[1]有界線型作用素

[2]一般の線型作用素の概念と例

[3]一様有界性の原理

[4]開写像定理・閉グラフ定理

[5] Neumann 級数とレゾルベント・スペクトル



(11) O.H.Cartan の複素関数論を読む

レベル中級

5 月 14 日 (水) 19:30-21:00 より隔週開講。モダンではあるが、多変数関数論のドイツ学派のにおいもするバランスの良い教科書です。1 回当たり平均 6 ページの進度。予習・復習を前提にします。読みにくい場所、問題にしていることは何か、背景等に焦点を絞り解説します。

【備考】

各講座とも 1 講座 ¥30000 (税込)、学生 ¥21000 (税込)。途中参加の場合、参加回数 × ¥5000 + ¥2000 (テキスト代・手数料)です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めをお願いします。



駒込移転 1 周年記念特別講義報告

会報編集 Gr. 自主活動企画 記：平田



数学工房の駒込教室移転 1 周年を記念して、去る 4 月 13 日(日)に、中央大学の諏訪紀幸先生の特別講義が行われました。この企画は、前回の会員の集いで出された数学工房会員の要望に、諏訪先生が応えてくださり、実現したものです。

「代数学の基本定理を巡って」という魅力的な題目で講義は行われました。内容は、この有名な定理の代表的な証明方法のいくつかをたどるというものです。ご教示いただいた証明は 4 つです。Liouville の定理を用いるもの、Cauchy の積分定理によるもの、じっくり考えれば高校生でも理解可能なもの(真偽は定かではありませんが、諏訪先生はそうおっしゃったと思います。)、相当の専門知識がなければ返討ちに会う、ガロア理論によるものの 4 つでした。この中、Liouville の定理のものと、高校生でも分かるというのは解説があり、残り 2 つは証明の周辺の紹介でした。

筆者にとって、印象に残ったのは、内容もさることながら、講義の進行方法でした。今回の講義は、証明の一方的な解説ではなく、ポイントとなる概念やキー

ワードを聴講者に語らせたいという意図で行われたと思います。そのため講義は、諏訪先生が質問をし、聴講者が答えるという対話形式で進められました。質問と応答による約 3 時間の講義は、緊張感に包まれ独特でした。いつ質問が飛んでくるか予測ができません。参加者はほぼ全員指名されたと思います。明解に答える人、沈黙してしまう人、なんだかわからない返事をしている人、様々です。そして誰かが答える度に、桑野先生がビックリと反応するというこれまでにない状況でした。筆者もうまく答えられず沈黙した一人です。ただうまく答えられない場合は諏訪先生が臨機応変に誘導され、後味の悪いままになることはありませんでした。個人的には、自らの不勉強を痛感しましたが…。

諏訪先生が数学工房会員のレベルをどのように思われたか気になるところです。ただ我が身を振り返れば、そのような質問はできるものではありません。いざにしてもよい経験になりました。このようなダイナミックで刺激的な講義をしてくださった諏訪先生に改めて感謝申し上げます。講義終了後、引続き教室内

で立食形式の懇親会が行われました。楽しい一時でした。ここからは質問は飛んできませんので安心できましたから…。報告の最後に、解説のあった2つの証明を諏訪先生のレジメから抜粋してご紹介します。なお Liouville の定理とは、Gauss 平面の全平面で正則で有界な関数は定数関数に限るというものです。

[代数学の基本定理]

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \in \mathbb{C}[z]$$

$$(n \geq 1, a_0 \neq 0)$$

とする。このとき、 $f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在する。

[証明 1]

$f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在しないと仮定すれば、 $w = 1/f(z)$ は全平面で正則。
ここで、 $\lim_{z \rightarrow \infty} 1/f(z) = 0$ なので、 $w = 1/f(z)$ は有界。
したがって、Liouville の定理から $w = 1/f(z)$ は定数。
これは $\deg f \geq 1$ に反する。

[証明 2]

$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ なので、全平面で定義された連続関数 $|f(z)|$ は最小値 μ を持つ。
 $\mu > 0$ と仮定する。 $|f(\alpha)| = \mu$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ を取り、多項式 $f(z)$ の $z = \alpha$ を中心とする Taylor 展開

$$f(z) = f(\alpha) + c_k(z-\alpha)^k + c_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots + c_n(z-\alpha)^n \quad (c_k \neq 0)$$

を考える。

このとき、 $\rho > 0$ が存在して $|z-\alpha| = \rho$ なら

$$|c_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots + c_n(z-\alpha)^n| < |c_k(z-\alpha)^k| = |c_k|\rho^k$$

となる。必要なら ρ をより小さく取って $|c_k|\rho^k < \mu$ とし
てよい。 z が α を中心とする半径 ρ の円周を一周すれば $f(\alpha) + c_k(z-\alpha)^k$ は $f(\alpha)$ を中心とする半径 $|c_k|\rho^k$ の円周を k 周する。したがって、 α を中心とする半径 ρ の円周の上の点 β が存在して、 $f(\alpha) + c_k(\beta-\alpha)^k$ が原点と $f(\alpha)$ を結ぶ線分の上にある。このとき、

$$|f(\alpha) + c_k(\beta-\alpha)^k| = \mu - |c_k|\rho^k$$

なので、

$$|f(\beta)| \leq |f(\alpha) + c_k(\beta-\alpha)^k| + |c_{k+1}(\beta-\alpha)^{k+1} + \cdots + c_n(\beta-\alpha)^n|$$

$$< (\mu - |c_k|\rho^k) + |c_k|\rho^k = \mu$$

を得る。しかし、これは μ の最小性に反する。



Photo2~5 懇親会スナップ



入門桑野道場(第6回)

/// 会報編集Gr.自主活動企画(平田、増田、坂口) ///



会員の皆様、お元気ですか。会報編集 Gr. の平田、増田、坂口です。夏学期もいよいよ始まりましたね。夏学期は数学工房のスタートの学期です。また気分を新たに数学を楽しみましょう。皆様の積極的な解答の応募とともに編集 Gr. への要望のメールもお持ちしております。

それでは今号の問題です。問題番号は、前号からの通し番号になっています。

問題(9) n 個の複素数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関して以下の不等式が成り立つことを示せ。また、等号成立条件は何か。

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

問題(10) 複素平面上の任意の4点 a, b, c, d について以下の不等式が成り立つことを示せ。また、等号成立条

件は何か。

$$|a-c||b-d| \leq |a-b||c-d| + |a-d||b-c|$$

解答の宛先: kuwanodojo@googlegroups.com

なお解答は可能ならば、WORD か PDF ファイルで送信してください。応募締切日は6月30日(水)です。

■■■前号(No. 94)の解答

問題(8) 次の関係を示せ。

z_1, z_2, z_3 を相異なる同一線上にない3点の複素数とする。この3点からなる三角形 z_1, z_2, z_3 が正三角形であることの必要十分条件は下式を満足することである。

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$$

★解答(8)

この問題には、鈴木史郎さんが正解されています。以下に、鈴木さんの解答例を紹介します。

平行移動を考えると、 $Z_3=0$ としてよい。…(++)
このとき Z_1, Z_2 は0でない。

このとき、与式は、

$$Z_1^2 + Z_2^2 - Z_1 Z_2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$Z_2 = Z_1 \lambda$ (λ は0でない複素数) と書けるから、これを①へ代入すると、 $Z_1(1 + \lambda^2 - \lambda) = 0$ 、 Z_1 は0でないので、 $\lambda = \text{EXP}(\pm \pi i / 3)$ 、このことは3点0, Z_1, Z_2 が正三角形をなす事を意味するので、①式が成り立つならば、3点が正三角形をなすことが示された。

他方、3点0, Z_1, Z_2 が正三角形ならば、

$$Z_2 = Z_1 \text{EXP}(\pm \pi i / 3)$$

と書けるので、①式が得られる。

以上から、①式が成り立つことと、3点0, Z_1, Z_2 が正三角形をなすことは必要十分条件である。

なお、(++)を確認する。

相異なる3点 Z_1, Z_2, Z_3 について、いずれかが0であるときには前半からよいので、いずれも0でないとする。

$X_1 = Z_1 - Z_3, X_2 = Z_2 - Z_3, X_3 = 0$ とおくと、3点 $X_1, X_2, X_3 = 0$ は相異なるから、前半から

$X_1^2 + X_2^2 - X_1 X_2 = 0 \cdots \textcircled{2}$ が成り立つことと、3点0, X_1, X_2 が正三角形をなすことは必要十分条件である。

②を変形すると、

$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3 - Z_1 Z_2 - Z_2 Z_3 - Z_3 Z_1 = 0$ である。よって(++)であることも示された。

この問題の出題者である半田さんに別解をお願いしたところ4通りの解答を作ってくださいました。紙面の都合でその中から、2つご紹介いたします。

(別解1)

($\Rightarrow$) 三角形 $z_1 z_2 z_3$ が正三角形なので

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) \eta$$

ただし $\eta^3 = -1, \eta \neq -1$

両辺を3乗すると $(z_3 - z_1)^3 + (z_2 - z_1)^3 = 0$

因数分解して整理すると

$$(z_3 + z_2 - 2z_1)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1) = 0$$

$z_3 + z_2 - 2z_1 = 0$ とすると

$$z_1 = (1/2)(z_2 + z_3)$$

これは z_1 が z_2 と z_3 の中点となり、仮定に反する。

よって $z_3 + z_2 - 2z_1 \neq 0$

すなわち

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$$

($\Leftarrow$)

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0 \quad (1)$$

より $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0 \quad (2)$

$w_1 := z_2 - z_3, w_2 := z_3 - z_1, w_3 := z_1 - z_2$ とおくと

$$(2) \text{は } w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0 \quad (3)$$

また $w_1 + w_2 + w_3 = 0 \quad (4)$

$$(4)^2 - (3) \text{より } z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0 \quad (5)$$

を得る。

w_1, w_2, w_3 は方程式 $(Z - w_1)(Z - w_2)(Z - w_3) = 0$ の相異なる3つの解。

解と係数の関係および(4), (5)から w_1, w_2, w_3 は方程式 $Z^3 - w_1 w_2 w_3 = 0$ の相異なる3つの解。

したがって、 $|w_j| = |w_1 w_2 w_3|^{1/3} (j = 1, 2, 3)$

即ち、

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| (= |w_1 w_2 w_3|^{1/3})$$

三辺が等しいので三角形 $z_1 z_2 z_3$ は正三角形。

(別解2)

($\Rightarrow$)

$c := (1/3)(z_1 + z_2 + z_3)$ と置くと、

三角形 $z_1 z_2 z_3$ が正三角形より

$z_2 - c = (z_1 - c)\omega, z_3 - c = (z_1 - c)\omega^2$ とかける。

ただし ω は $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす複素数とする。

よって、 $\omega^3 = 1$ に注意すると

$$(z_1 - c)^2 + (z_2 - c)^2 + (z_3 - c)^2 = (z_1 - c)^2(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

一方、 $(z_1 - c)^2 + (z_2 - c)^2 + (z_3 - c)^2$

$$= (2/3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1)$$

従って、結論の関係式を得る。

($\Leftarrow$)

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0 \text{より}$$

$c := (1/3)(z_1 + z_2 + z_3)$ とおくと

$$(z_1 - c)^2 + (z_2 - c)^2 + (z_3 - c)^2 = 0 \quad (1)$$

$w_j := z_j - c (j = 1, 2, 3)$ とおくと(1)は

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0 \text{ また } w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

あとは別解1とほぼ同じようにして、三角形 $z_1 z_2 z_3$ が正三角形であることが分かる。



名古屋自主セミナー参加報告



名古屋SEAでの公開講座「多項式補間と Taylor 級数をめぐって」に参加しました。高校生が対象の講座でしたが、私にとってもとても興味深いものでした。

補間問題とは何か？から始まり、Lagrange, Newton 型補間法について具体例から出発し、ベクトル空間と基底の概念など次第に抽象度が増す講座の中で、生徒達が一所懸命に聴いている姿が印象的でした。そして、表情が生き生きとして非常に楽しそうなのは驚きました。(後に、桑野先生にお伺いしたところ、生徒達はあまり理解できなかったそうですが、面白かった旨、感想を聞かせてくれたそうです)

日頃、私は教員として高校生と接していますが、生徒達の一番の関心事はテストに出題される内容なのかどうかであり、出題される可能性が低い内容については極めて興味が薄いということを実感していました。(私の授業に問題があるということも一理あると思いますが…。お恥ずかしい限りです。)

名古屋でこのような生徒達に出会えたことは、私にとって大変刺激的なことで授業次第ではこのような生徒達を増やすことができるのだと感じました。私も生徒達と数学の楽しさを共有できる機会が少しでも増えるように、頑張りたいと思いました。(曾雌隆洋)

数学工房 2008年5月1日発行

発行人 桑野耕一

編集人 編集Gr.

(平田裕一・増田卓・坂口尚文)

連絡先

オフィス電話：042-495-6632

数学工房連絡専用(携帯)：08065762691

連絡は極力eメールをご利用下さい。

e-mail: sugakukobo@w5.dion.ne.jp

e-mail: monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)

ホームページ:

<http://www.sugakukobo.com>

数学工房 教室

〒170-0003

豊島区駒込1-40-4

全国蕎麦製粉会館2F 202-203

数学工房 オフィス

〒204-0023

清瀬市竹丘1-17-26-401

