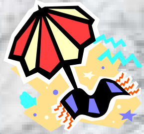
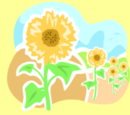
Math.
NO.96
www.sugakukobo.com

会報２００８年７月



# 数学工房

## 数　学　工　房　の　日　々　か　ら



### ◆◆◆　数学書を読む

再び夏が巡ってきて、朝早くから野鳥がにぎやかです。まもなく夏学期が終わり、集中セミナーの時期が始まります。今年度の特徴は、数学書を読む講座で，（私の専門のせいもあるが）研究会も含めると、本読み講座が、解析ばかり３つもあります。H.Cartan「一変数および多変数複素関数論」、L.Hoermander「多変数複素関数論入門」、秋からは、積分論これは比較的コンパクトなサイズに纏まっているので岩波現代数学の基礎「確率論と積分Ｉ」をテキストにして要点をお話します。

それにしても，この手の本を制限時間内に取り上げるのは、大変！

研究会は新井朝雄著「Hilbert 空間論」を読んでいます。既に２年間近く続いています。皆さんレポーターとして輪読形式なのですが発表の数学的な内容が最近は前のように不安を感じなくなりました。特に具体例の取り扱いに皆さん習熟していらしたような気がします。

### ◆◆◆　数学ライブ

数学セミナー8 月号の数学ライブ２００８に４月 13 日に行われた諏訪紀幸先生の数学工房特別講義の内容が載っていますのでご覧ください。ライブ感が、出るように工夫した書き方になっています。理系への数学８月号に「多項式補間をめぐって」と言うタイトルで講義予定の内容を載せましたので宜しければこちらもご覧ください。

### ◆◆◆　数学的対象と虚心に向き合うことは意外に難しい

先日久しぶりで特殊関数についての総合的な論説を読みました。大まかに言って、ある興味深い現象から自然に派生する面白い関数で、何か面白い線型作用素の固有関数だったりするわけで、その関数の中に内在する法則性を追及して、不変的な法則を表現するような概念を虚心に突き詰めていく、そういう有様が実に生き生きと感じられます。

いろいろなことを知って、道具も自由に使えるようになると虚心に数学的対象そのものに向き合うことが案外難しくなります。私は普段は仕事柄、どうしても対象そのものでなく、どちらかと言うと対象を記述する道具や対象が定位する場の記述をいかに皆さんにちゃんと身につけていただくか、ということが中心ですから、そういう面白い対象をとことんいじって見るということがなかなか出来ないのが現状です。

自分のおかれた立場で、数学にかかわるより無いので，セミナーを作っていく途中での様々な気付きを、実際の講座の中でもなるべく反映する事にしています。

### ◆◆◆　最近の数学工房のホームページごらんになりましたか

最近は，セミナーに参加者の有志がテフによりレクチャーノートを作って，講義録としてホームページにも報告として載っていますのでご覧ください。私の仕事が遅いのですぐに報告が載らないこともあります。

ホーム頁が見やすくなっていますので是非とも一度覗いてみてください。

ホームページを担当してくださっている杉田さん，および講義報告作成にご協力くださっている会員にこの場を借りて感謝します。

### ◆◆◆　最近やっていること

補間法の重要さと面白みをこの頃いよいよ感じています。解析学の 17 世紀･18 世紀の基本的部分が出来たので、今度は補間法と 19 世紀解析学・20 世紀解析学をめぐってと言う小品を計画しています。狙いは多項式補間という比較的単純な材料を鍵に対象の捉え方や方法の時代的変遷を理解してもらうことです。

H.Cartan　の複素関数論第１章は、よりによって、可換体上の形式冪級数の代数から始まります。多くの参加者にとって意外なのは形式冪級数の頭についているΣが少なくとも始の定義では、和の意味を持たないこと（無論隠れた和を暗示しているのだが）すなわち見かけ上は、1

個 1 個の冪級数の冒頭のΣと冪級数の和は無関係なのです。形式冪級数が、無限この場合でも代数的に和が定義できる形式冪級数の族(認容族)成る概念を定義すると、冪級数の加法の自然な拡張が得られこの和においては冪級数冒頭のΣが冪級数の拡張された和とみなすことが出来る。その結果として、基礎的な事柄の証明に限ってもシグマの使い勝手は極めてよい。このシグマの性格から始まり、非常に関心が高まったようです。
　早速次のようなテーマで、で纏まったものを書く気になりました。

形式冪級数

1) 和の認容族についての詳細から初めて合成の微分法や逆関数定理などの証明を簡易化
2) 数列空間の様々な乗法構造と冪級数空間の解析的性質
3) 多項式空間の双対としての冪級数空間
4) 位相線型空間論における形式冪級数空間
5) 形式冪級数の応用(形式冪級数を様々に解釈しなおすことにより面白い応用が生じます。)

いずれセミナーにも反映しますのでお楽しみに。

2008 年夏　桑野耕一

## 夏季集中セミナー学案内

2008年5月～8月

（1）解析学とは何か　レベル　入門・初級

[日時]
2008 年 8 月 2 日（土）14:00～18:00

[料金]
¥8000(学生　¥7000)

[内容]
解析学の歴史は 17 世紀のはじめに、自然現象を特徴付ける基本的な量を見出し、その量の間に成立する関係を数学的モデルにより理論的に研究し、得られた結果を実験することにより検証するという方法論を Galileo Galilei が提唱したときから始まりました。Galilei がそう述べたとき、関数はもとより、私たちが、当たり前のように用いている座標空間の概念ですらなかったのです。本講座では、解析学と言う学問が、どのように生まれ、どのように育ってきたかを、多項式補間というトピックスを通して、お話してみようと思います。多項式補間は自然現象の解析の手段として解析学の歴史の、尤も初期に現れ、計算手段の発達によって現在でも発達中で重要さを失っていません。

[項目]
1) 冪級数展開の発見と Taylor 型補間
2) Newton-Hermite 型補間法

（2）現代数学演習形式冪級数講義　レベル　フリー

[日時]
2008 年 8 月 3 日（土）10:00～16:00

[料金]
¥10000(学生　¥8000)

[内容]
複素関数論の独特の魅力は、局所的な代数計算と大域的な積分の評価と計算の結びつき、そして幾何学の反映である。その鍵のひとつが正則関数は各点の近傍で冪級数展開でき、その関数の全ての情報がある意味で、冪級数の中に封じ込められていると言うことです。関数の冪級数展開と言う古典的な主題だけに限っても、形式冪級数は有用なのですが、このような現象は、古典的な問題の枠を超えて様々なところに表れてきます。

[項目]
1) 定義
2) 位数
3) 冪級数の和の一般化
4) 多項式環の埋め込み
5) 単元
6) 形式冪級数の導関数
7) 形式冪級数の高階微分
8) 合成の高階微分と形式的逆関数定理
9) 数列空間からの 3 つの同型

（3）線型作用素の基礎理論　レベル　中級

[日時]
2008 年 8 月 9 日　（土）14:00～18:00
2008 年 8 月 10 日（日）10:00～16:00

[料金]
¥16000(学生　¥12000)

[内容]
通常の有限次元の線型代数でも経験したと思いますが、線型写像 T の性質を知るには、そのアジョイントの性質を知ることが重要です
線型空間の特性は双対とペアーで理解すべきなのです。無限次元になるとさらに位相が絡んで興味深いことが起きてきます。超関数の概念も双対性の応用のひとつです。

[項目]
1) 有界線型形式と双対空間
2) Riesz の表現定理と Hilbert 空間の双対
3) Hahn-Banach の定理
4) 共役作用素
5) 第 2 共役空間
6) 弱収束・汎弱収束

（4）Mikusinski 演算子法入門　レベル　入門・初級

[日時]
2008 年 8 月 23 日（土）14:00～18:00
2008 年 8 月 24 日（日）10:00～16:00

[料金]
¥16000(学生　¥12000)

[内容]
整域や商体といった概念が、整数と有理数、多項式環と有理関数体というものたちを抽象化したもの以上

なのか。単に概念の整理に便利なだけではないかと言う疑念をお持ちの皆さんには、目から鱗が落ちるような創造的な例である。代数的方法の強力さをじっくり味わって欲しい。

[項目]

1) 連続関数のコンボリューション代数
2) Titchmarsch の定理
3) 整域・商体
4) コンボリューション代数の商体としての演算子代数
5) 演算子法の展開

（５）速習線型代数集中１　レベル　初級

[日時]

2008 年 8 月 16 日（土）14:00～19:00

[料金]

¥10000(学生　¥8000)

[内容]

線型代数通年コースの第二期線型写像と線型変換に対応する短縮コースです。秋学期の標準形の準備を兼ねています。２つの集中セミナーの形に纏めました。もともと速修コース参加者のために設けられていますが、それ以外の方でも、復習、標準形へのウォームアップになどのご利用ください。

[項目]

1) 重ねあわせ原理・線型写像
2) 線型写像の基本定理
3) 線型写像の線型空間・線型変換の代数

（６）速習線型代数集中２　レベル　初級

[日時]

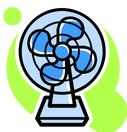
2008 年 9 月 14 日（日）11:00～16:00

[料金]

¥10000(学生　¥8000)

[項目]

1) 双対空間
2) 代数的アジョイント
3) 行列表現 I



（７）H.Cartan の複素関数論　レベル　初級・中級

[日時]

2008 年 8 月 6 日　（水）19:00～20:30
2008 年 8 月 27 日（水）19:00～20:30

[料金]

¥10000(学生　¥8000)

[内容]

オプション講座の H.Cartan 複素数関数論を夏休みにも特別講座として開催します。

[項目]

1) 指数関数・対数関数
2) 解析関数
3) 演習

（８）H.Cartan 複素関数論演習　レベル 初級・中級

[日時]

2008 年 8 月 17 日（日）11:00～17:00

[料金]

¥10000(学生　¥8000)

[内容]

H.Cartan 複素関数論の２１ｐ－４３ｐよりトピックスと読みにくいところを選んで講義します。練習問題からも題材を選んで解説します。

[項目]

1) 指数関数と対数関数
2) 一実変数または複素変数の関数
3) 練習問題

今年度は都合により 8 月 29(金)から 9 月 12 日(金)までの間が数学工房の夏期休業期間となりますので、ご注意ください。

## 秋　学　期　講　座　案　内

2008年9月～12月

秋学期開講予定の講座は、入門 I.A、I.B、I.C、I.D、I.E、I.F、初級 E.A、G、中級 M.A、M.B です。またその他に、会員の要望を受けて、「H.Cartan の複素関数論を読む」というオプション講座が設けられています。

<< 秋学期講座一覧 >>

| 略号 | 講座名 | 講座開始日 | レベル |
|---|---|---|---|
| I.A | 解析教程 II | 9 月 20 日 | 入門 |
| I.B | 複素函数概論 II | 9 月 20 日 | 入門 |
| I.C | 確率統計の数学的基礎 II | 9 月 26 日 | 入門 |
| I.D | 微積分と初等線形代数 II | 9 月 21 日 | 入門 |
| I.E | Lebesgue 積分と速度論を読む | 10 月 3 日 | 入門 |
| I.F | 数学の基本語彙と文法 | 9 月 27 日 | 入門 |
| E.A | 抽象位相 | 9 月 28 日 | 初級 |
| G | 抽象線型代数 | 9 月 21 日 | 初級 |
| M.A | 多変数複素関数論入門 | 9 月 27 日 | 中級 |
| M.B | 線型作用素の理論 II | 9 月 20 日 | 中級 |
| O | H.Cartan 複素関数論 | 9 月 24 日 | 初級・中級 |

<<秋学期講座カレンダー>>

| 月 | 日 | 曜日 | 略号 | 時　間 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 20 | 土 | M.B1 | 14:00-16:00 |
| | | | I.B1 | 17:00-19:00 |
| | 21 | 日 | I.D1 | 11:00-13:00 |
| | | | G1 | 14:00-16:30 |
| | 24 | 水 | O1 | 19:30-21:00 |
| | 26 | 金 | I.C1 | 18:30-20:30 |
| | 27 | 土 | M.A1 | 14:00-16:00 |
| | | | I.F1 | 17:00-19:00 |
| | 28 | 日 | I.A1 | 11:00-13:00 |
| | | | E.A1 | 14:00-16:30 |
| 10 | 3 | 金 | I.E1 | 18:30-20:30 |
| | 4 | 土 | M.B2 | 14:00-16:00 |
| | | | I.B2 | 17:00-19:00 |
| | 5 | 日 | I.D2 | 11:00-13:00 |
| | | | G2 | 14:00-16:30 |
| | 8 | 水 | O2 | 19:30-21:00 |
| | 10 | 金 | I.C2 | 18:30-20:30 |

| 月 | 日 | 曜日 | 略号 | 時　間 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 土 | M.A2 | 14:00-16:00 |
| | | | I.F2 | 17:00-19:00 |
| | 12 | 日 | I.A2 | 11:00-13:00 |
| | | | E.A2 | 14:00-16:30 |
| | 17 | 金 | I.E2 | 18:30-20:30 |
| | 18 | 土 | M.B3 | 14:00-16:00 |
| | | | I.B3 | 17:00-19:00 |
| | 19 | 日 | I.D3 | 11:00-13:00 |
| | | | G3 | 14:00-16:30 |
| | 22 | 水 | 03 | 19:30-21:00 |
| | 24 | 金 | I.C3 | 18:30-20:30 |
| | 25 | 土 | M.A3 | 14:00-16:00 |
| | | | I.F3 | 17:00-19:00 |
| | 26 | 日 | I.A3 | 11:00-13:00 |
| | | | E.A3 | 14:00-16:30 |
| | 31 | 金 | I.E3 | 18:30-20:30 |
| 11 | 1 | 土 | M.B4 | 14:00-16:00 |
| | | | I.B4 | 17:00-19:00 |
| | 2 | 日 | I.D4 | 11:00-13:00 |
| | | | G4 | 14:00-16:30 |
| | 5 | 水 | 04 | 19:30-21:00 |
| | 7 | 金 | I.C4 | 18:30-20:30 |
| | 8 | 土 | M.A4 | 14:00-16:00 |
| | | | I.F4 | 17:00-19:00 |
| | 9 | 日 | I.A4 | 11:00-13:00 |
| | | | E.A4 | 14:00-16:30 |
| | 14 | 金 | I.E4 | 18:30-20:30 |
| | 15 | 土 | M.B5 | 14:00-16:00 |
| | | | I.B5 | 17:00-19:00 |

| 月 | 日 | 曜日 | 略号 | 時　間 |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 16 | 日 | I.D5 | 11:00-13:00 |
| | | | G5 | 14:00-16:30 |
| | 19 | 水 | 05 | 19:30-21:00 |
| | 21 | 金 | I.C5 | 18:30-20:30 |
| | 22 | 土 | M.A5 | 14:00-16:00 |
| | | | I.F5 | 17:00-19:00 |
| | 23 | 日 | I.A5 | 11:00-13:00 |
| | | | E.A5 | 14:00-16:30 |
| | 28 | 金 | I.E5 | 18:30-20:30 |
| | 29 | 土 | M.B6 | 14:00-16:00 |
| | | | I.B6 | 17:00-19:00 |
| | 30 | 日 | I.D6 | 11:00-13:00 |
| | | | G6 | 14:00-16:30 |
| 12 | 3 | 水 | 06 | 19:30-21:00 |
| | 5 | 金 | I.C6 | 18:30-20:30 |
| | 6 | 土 | M.A6 | 14:00-16:00 |
| | | | I.F6 | 17:00-19:00 |
| | 7 | 日 | I.A6 | 11:00-13:00 |
| | | | E.A6 | 14:00-16:30 |
| | 12 | 金 | I.E6 | 18:30-20:30 |

[備考]
各講座とも１講座¥30000(税込)、学生¥21000(税込)。途中参加の場合、参加回数×¥5000＋¥2000 (テキスト代・手数料)です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします。

## 数　学　工　房　ガ　イ　ダ　ン　ス

数学工房ガイダンス
[場所]　駒込新教室（会場は変更になる場合がありますので、お問い合わせ下さい。）
[日時]　９月 15 日(祝日)13:30-15:30
[内容]
　数学工房の考え方、講座の概要のガイダンスです。講座の取り方等の個別の相談も承ります。筆記用具をご持参下さい。新入会の方もご自由にご参加下さい。
参加費　無料

## 中 央 大 学 特 別 講 義 報 告

　６月６日に今年も昨年同様に中央大学理工学部数学科の特別講義において、数学工房から３人の社会人受講生がそれぞれの経験と数学との関わりについて講演しました。今回から３回にわたり特別講義の内容についてご報告します。みなさん、お楽しみに。

写真１　熱心に講義を聴く中央大学の学生たち

### ■■■二年目の出会い　諏訪紀幸(中央大学理工学部)

　中央大学理工学部数学科では２００１年度に「数学特別講義～情報と職業」を「情報」の教職科目として開講して、今年で８年になります。数学工房の桑野耕一先生は科目開設の時から講師を務めていらっしゃいますが、昨年は数学工房会員４人の方にお話しいただくという新機軸を打ち出しました。それが学生にも好評でしたので、今年も数学工房会員にお話しいただくよう桑野先生に手配をお願いしました。
　６月６日に桑野先生の他に、穴見さん、増田さん、加野さんに来ていただきましたが、穴見さんと増田さんは昨年に引き続いての登板。昨年と重なることもありましたが、リピーターは諏訪一人、むしろアレンジを楽しむことが出来ました。桑野先生を除く御三方はプロジェクタ用の資料を準備してのご講演、達者な語り口には感心しました。
　桑野先生が数学の型稽古を強調されるのは当然ですが、穴見さん、増田さん、加野さんが数学の勉強の方法や意義についてそれぞれの視点から話されました。

数学工房での型稽古を自分に取り込み、自分の言葉で語られるところはさすが社会人として経歴を積まれただけのことはあると思いました。それが学生に分かったかは心許ないのですが、これから人生を歩む時、はたと思い当たることがあるかもしれません。

どうも日本の社会はたががすっかりゆるんでしまったようで､偽装という言葉がすっかり定着しました。大学とて例外ではありません。偽装教授や偽装学位が槍玉に上がる時もあるのではないかと心配しています。講義の後でご講演いただいた皆さんと行きつけのイタリア料理屋ワインのボトルに関する帰納法を進めましたが、仕事を持ちながら数学に真剣に取り組んでおられる方々との議論はとても有意義なものでした。

今後とも数学工房との交流が続くことを願っております。今回ご講演いただいた穴見さん、増田さん、加野さんに、そして、ご手配くださった桑野先生にはこの場を借りてお礼申し上げます。

## 数学工房での１年間を振り返って

このコーナーでは、昨年数学工房に入会された方々に数学工房に対する感想やご自身の数学に対する意気込みなどを語ってもらいます。今回は昨年 4 月に入会された小出義治さんです。

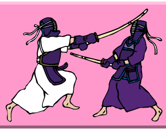
### ■■■　確率論自主セミナーを計画中　小出義治

私は 2007 年の夏学期から数学工房のセミナーに参加しています。仕事は公務員の一般職なので、仕事と数学とはまったく接点がありません。そんな人間がなぜ数学工房に来たのか、そのいきさつから始めます。数学は小学生のころから好きで、一時期は数学や物理を専門にしようと考えていたので『解析概論』などを眺めてはいました（理解していたというレベルではありません）が、高校生の時に「ゲーデルの不完全性定理」の翻訳を読んでよく分からず、数学者にはこんな発想が出来る人しかなれないのだと田舎の高校生は勝手に思い込み、数学はやめてしまいました。大学では経済学を専攻しましたが、やはり数式の方に興味が行くらしく数理経済学やゲーム理論を勉強しておりました。経済学部なのに代数学や測度論も選択科目にあったので、純粋数学に関してもそれなりに勉強した記憶があります。しかし経済学そのものには興味は湧かず、大学院に行くのはやめて就職しました。その後も人生紆余曲折のあげく、やはり数学と物理が好きなのだと改めて気づき、数セミで昔から気になっていた数学工房の門を叩いたという次第です。

さて、すでにセミナーに参加している方は先生の講義の魅力等十分にお分かりでしょうから、今後参加する予定の人のために、セミナー参加時の心構えみたいなものを書いておきます。まず演習は最初からすらすら出来るわけがないので、周りの人たちがすらすら解いているように見えたり、先生が覗き込んできても（笑）気にしないことです。また先生から「お土産」をよくもらいますが、これはとにかく一度は考えましょう。あと隣に座っている人が、ある分野の専門家であることが結構多いので、話しかけてみると思わぬ人間関係が築け、数学にも人生にも役立つかもしれません。

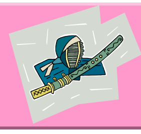
最後に、今私が抱いている計画は工房の中に確率論自主セミナーを開くことです。抽象と具体、哲学と計算技術という相反する様々な面から切り口が見出せるこの分野に興味のある方は、私にご連絡ください。とりあえず秋学期の IE は私の発案した企画が行なわれるようなので、私は参加せざるを得ません（苦笑)。その際にもよろしくお願いいたします。

写真 2　小出義治さん



## 入門桑野道場（第７回）

/// 会報編集Gr.自主活動企画（平田、増田、坂口）



会員の皆様、お元気ですか。会報編集 Gr. の平田、増田、坂口です。早くも夏学期が終わりに近づき、夏の集中講座の季節がやってきました。皆様それぞれが数学の稽古に励んでいることと思います。皆様の積極的な解答の応募とともに編集 Gr. への要望のメールもお待ちしております。

それでは今号の問題です。問題番号は、前号からの通し番号になっています。

問題(11)

$X,Y$ を空でない集合とし、 $f:X\to Y$ を写像とする。このとき、以下を示せ。

a) $f$ が単射 $\Leftrightarrow f(A)\cap f(A^C)=\phi \quad for\ \forall A\in 2^X$

b) $f$ が単射 $\Leftrightarrow f(A^C)\subset f(A)^C \quad for\ \forall A\in 2^X$

c) $f$ が全射 $\Leftrightarrow f(A)^C\subset f(A^C) \quad for\ \forall A\in 2^X$

問題(12)

$(X,\mathfrak{O})$ をコンパクト空間とする。ただし、$\mathfrak{O}$ は $X$ の開集合系とする。写像 $f:X\mapsto\mathbb{R}$ が連続ならば、 $f$ は $X$ で最大値と最小値をとることを示せ。

解答の宛先：kuwanodojo@googlegroups.com
なお解答は可能ならば、WORD か PDF ファイルで送信してください。応募締切日は 8 月 31 日(日)です。

## ■■■前号(No. 95)の問題

**問題(9)**　$n$ 個の複素数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に関して以下の不等式が成り立つことを示せ。また、等号成立条件は何か。

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

**問題(10)**　複素平面上の任意の 4 点 $a, b, c, d$ について以下の不等式が成り立つことを示せ。また、等号成立条件は何か。

$$|a-c||b-d| \le |a-b||c-d| + |a-d||b-c|$$

## ■■■前号(No. 95)の解答

今回も鈴木史郎さんと小松将義さんから応募がありました。お二人とも複素数の実部と虚部に分けて証明していましたが、もう少し複素数の性質を利用するとよかったと思います。また、問題(10)の等号成立条件は幾何学的な考察が必要になります。紙面の都合上、今月は問題(9)の解答のみを示します。

### 問題(9)の解答

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ は 0 を含まぬとしても一般性を失わない。項数 $n \ge 2$ に関する帰納法で証明する。

$n = 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
&|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2| \\
\Leftrightarrow\ &|a_1 + a_2|^2 \le (|a_1| + |a_2|)^2 \\
\Leftrightarrow\ &a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_1 \le a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + 2|a_1||a_2| \\
\Leftrightarrow\ &a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_1 \le 2|a_1||a_2|
\end{aligned}$$

これを書き直すと、$\mathrm{Re}(a_1\bar{a}_2) \le |a_1||a_2|$ に帰着する。

$$\therefore |a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$$

以上より、$n = 2$ のときに与えられた不等式が成立する。

次に $n = k$ のときに不等式が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right| \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| + |a_{k+1}| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |a_{k+1}| \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|
\end{aligned}$$

以上より、$n = k + 1$ のときも与えられた不等式が成立する。したがって、帰納法は完了した。

等号成立条件を見つける。

$n = 2$ のときの等号成立条件は

$$\bar{a}_1 a_2 > 0$$

である。したがって、両辺を $|a_1|^2 = a_1\bar{a}_1$ で割ると、同値な条件

$$\gamma = \frac{a_2}{a_1} > 0$$

が得られるこれから等号成立条件は $a_2 = \gamma a_1$ をみたす実数 $\gamma > 0$ が存在することである。

一般に $n > 2$ のときは図形的考察から

$$a_j = \gamma_j a_1$$
$$\gamma_j > 0 (2 \le j \le n)$$

をみたす実数 $\gamma_j (2 \le j \le n)$ が存在することと予想される。

そこで等号成立条件を 0 を含まぬと言う条件下で再び帰納法で証明する。

$n = 2$ のときはすでに示した。$n = k$ のとき、与えられた不等式の等号成立条件が示せたとして

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right| = \sum_{j=1}^{k+1} |a_j|$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^{k+1} |a_j| \ge \left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| + |a_{k+1}| \ge \left|\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right|$$

に注意すれば、

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| + |a_{k+1}| = \left|\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right|$$
$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| = \sum_{j=1}^{k} |a_j|$$

を得る。

②に帰納法の仮定を用いると、$a_j = \gamma_j a_1$ をみたす実数 $\gamma_j > 0 (2 \le j \le k)$ の存在と同値である。さらに①は

$$\gamma\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right) = a_{k+1}$$

をみたす実数 $\gamma > 0$ が存在することと同値である。よって、

$$\gamma\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j\right) a_1 = a_{k+1} \text{（ただし、} \gamma_1 = 1\text{）}$$

が成立する。

$$\gamma_{k+1} = \gamma\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j\right)$$

とおけば、$n = k + 1$ のとき等号が成立すれば、$a_j = \gamma_j a_1$ をみたす実数 $\gamma_j > 0 (2 \le j \le k + 1)$ が存在する。代入すれば等号が成立することは明らかである。以上より、帰納法は完了した。■

数学工房　2008年7月1日発行
発行人　桑野耕一
編集人　編集Gr.
(増田卓・坂口尚文・平田裕一)
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：08065762691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp(携帯、緊急用)
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com
数学工房　教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F　202-203
数学工房　オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401