Math.
NO.97
www.sugakukobo.com
会報２００８年９月

数学工房

数　学　工　房　の　日　々　か　ら

◆◆◆　夏の終わりに

今年の夏季集中セミナーは私の都合で、8 月一杯、夏休みなしでやることになりました。参加された皆さんはいかがでしたか？今年は臨時的な措置でしたが、このやり方で皆さんにも具合が良ければ、8 月に集中的にセミナーを行って、9 月の前半を休みにするパターンも悪くないと思いました。ところで、夏期セミナーの企画の見込み違いで、急遽 2 日のセミナーを 1 日のセミナー2 つにしたり、内容を変えたりと、会員の皆さんには、大変に御迷惑をかけました。特に、急な変更をしたセミナーにあらかじめ登録されていた方々には申し訳ないことをしました。２日間用に按配しておいた材料を 1 日にしてしまったものですから、こちらも楽ではありませんでしたが、受講者の方はもっと大変だったことと思います。この場を借りて皆様のご協力に感謝いたします。

◆◆◆　数学の力を引き出す

数学工房内での数学のコミュニケーション活動が盛んになっているようです。世俗の立場を忘れて、認識そのものに我を忘れる時間、そのような深い問題を背景にしたお付き合いは人生に本当の意味での潤いをきっともたらすでしょう。古代ギリシャにおける教養（パイデイア）にはそのような意味があるそうです。最近は研究者による啓蒙活動も盛んなようですが、数学の公開講座の中には踊る宗教まで出現しているようです。数学的な没頭が時に踊りだしたくなる喜びを伴うのは間違いのないところですが、それは結果です。提唱する御当人は良いとしても、結果と原因を取り違えると、ただの踊る宗教になってしまいます。踊りがしたければ、ヒップ・ホップなどを最初から踊れば良いのです。もちろん、数学を始める前にこわばった身体をほぐしてと言うことなら可能ですが。実際、数学という行為も、高度な意味で身体的行為ですから。

結果として、数学は世俗的な価値を乗り越えて自分自身の内部から魂を震わせる喜びになりうるものだと思っています。しかし、修行の段階でそれを言いだすと、たちどころに退廃して、数学の力と無縁な代物になってしまいます。それゆえ「型」と言う階梯が必要なのだと思います。数学によらず、技芸に関わる事柄は、客観的な技術の部分がなおざりにされるようになると危険信号です。何ゆえ単純な、それゆえ人によっては退屈な、時には持って回った、「数学の基本語彙と文法」や、「代数語」、「位相語」を丁寧に学ぶかは、これが答えです。「型」は数学の力を十全に引き出す鍵なのです。

◆◆◆　怪我の功名

8 月の集中セミナーの最後は、23・24 日に開講した「Mikusinsky 演算子法」でした。このテーマを通じて紹介したかったことは、抽象代数の方法が如何に強力であるかということです。このセミナーで扱った内容を簡単に紹介しましょう。

半数直線 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}$ –値連続関数の線型空間 $C([0,\infty))$ に Cauchy 積

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(x-t)g(t)dt \qquad f, g \in C([0,\infty))$$

を導入すると、$C := C([0,\infty))$ は、加法、スカラー倍、Cauchy 積により、乗法の単位元を持たぬ可換代数（多元環）になることは容易に分かります。Mikusinsky のアイデアは、この環が整域になることに気がついたことです。しかも解析学の定理として、よく知られた結果（Titschmarsh の定理）でした。微積分と代数の基礎素養があれば誰が気づいても不思議でない、逆にそれだけに鮮やかな結果でした。

ところで、環が整域であれば、C の元の分数を考えることができます。

$$\text{Ŧ}_C := \left\{ \frac{g}{f} \;\middle|\; \quad f \in \mathbf{C}\setminus\{\hat{0}\}, g \in C \right\}, \text{Ŧ}_C$$

を C の商体といいます。これが（同型を度外視して）唯一定まることは、代数の最も基本的な定理です。この中に十分に広い範囲の、関数、作用素、超関数などが入ってきて、それらが合法的に扱えるわけです。その結果として、例えば定数係数の微分方程式は代数方程式の問題に帰着してしまうわけです。

今回、夏季集中セミナーのスケジュール変更により、「形式冪級数講義」のセミナーを 8 月 3 日に急遽、加えました。はじめから意図して企画したわけではないのですが、この変更が結果的に面白いことになりました。図らずも、「Mikusinsky 演算子法」のセミナーは、3 日のセミナーで取り上げた形式冪級数の連続バージョンを扱っていたのです！

すなわち、Mikusinsky 演算子代数とは形式冪級数に代数的に同型な環の商体、有限 Laurant 級数体の連続バージョンです。従って、形式冪級数環の連続バージョンとしては形式 Laplace 変換が考えられます。

$$\mathrm{Lap}\left([0,\infty)\right):=\left\{\int_0^\infty f(\xi)e^{-x\xi}d\xi \,\middle|\, f \text{ は } [0,\infty[\text{ 上局所可積分}\right\}$$

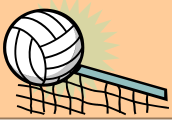
これの商体が演算子代数で、これは形式冪級数とパラレルに扱えます。そして形式 Laplace 変換の積は、

$$\int_0^\infty f(\xi)e^{-x\xi}d\xi\int_0^\infty g(\xi)e^{-x\xi}d\xi:=\int_0^x (f*g)(\eta)e^{-x\eta}d\eta$$

$$\text{ここで、}\quad f*g(\eta)=\int_0^\eta f(\eta-\xi)g(\xi)d\xi$$

となるので、$\mathrm{Lap}\left([0,\infty)\right)$ は整域で商体をもちます。これが Mikusinsky の演算子体の一つの表現になっているわけです。これは素晴らしい抽象代数語の力です！スケジュールの急遽変更ではありましたが、怪我の功名で、夏の集中セミナーは大団円になりました。

2008 年 9 月　桑野耕一



秋　学　期　講　座　案　内

2008年9月～12月

秋学期開講の講座は、入門 I.A、I.B、I.C、I.D、I.E、I.F、初級 E.A、G、中級 M.A、M.B です。またその他に、会員の要望を受けて、「H.Cartan の複素関数論を読む」というオプション講座が設けられています。

<< 秋学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程 II	9 月 28 日	入門
I.B	複素函数概論 II	9 月 20 日	入門
I.C	期待値と Stieltjes 積分	9 月 26 日	入門
I.D	微積分と初等線形代数 II	9 月 21 日	入門
I.E	Lebesgue 積分と測度論を読む	10 月 3 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	9 月 27 日	入門
E.A	抽象位相	9 月 28 日	初級
G	抽象線型代数特論　標準形	9 月 21 日	初級
M.A	多変数複素関数論入門	9 月 27 日	中級
M.B	線型作用素の理論 II	9 月 20 日	中級
H.C	H.Cartan 複素関数論	9 月 24 日	初級・中級

<<秋学期講座カレンダー>>

月	日	曜日	クラス	時間
9	20	土	MB	14:00－16:00
			IB	17:00－19:00
	21	日	I.D	11:00－13:00
			G	14:00－16:30
	24	水	HC	19:00－20:30
	26	金	IC	18:30－20:30
	27	土	MA	14:00－16:00
			IF	17:00－19:00
	28	日	IA	11:00－13:00
			EA	14:00－16:30

月	日	曜日	クラス	時間
10	3	金	IE	18:30－20:30
	4	土	MB	14:00－16:00
			IB	17:00－19:00
	5	日	ID	11:00－13:00
			G	14:00－16:30
	8	水	HC	19:00－20:30
	10	金	IC	18:30－20:30
	11	土	MA	14:00－16:00
			IF	17:00－19:00
	12	日	IA	11:00－13:00
			EA	14:00－16:30
	17	金	IE	18:30－20:30
	18	土	MB	14:00－16:00
			IB	17:00－19:00
	19	日	ID	11:00－13:00
			G	14:00－16:30
	24	金	IC	18:30－20:30
	25	土	MA	14:00－16:00
			IF	17:00－19:00
	26	日	IA	11:00－13:00
			EA	14:00－16:30
	31	金	IE	18:30－20:30
11	1	土	MB	14:00－16:00
			IB	17:00－19:00
	2	日	ID	11:00－13:00
			G	14:00－16:30
	5	水	HC	19:00－20:30
	7	金	IC	18:30－20:30
	8	土	MA	14:00－16:00
			IF	17:00－19:00
	9	日	IA	11:00－13:00
			EA	14:00－16:30

月	日	曜日	クラス	時間
11	14	金	IE	18:30―20:30
	15	土	MB	14:00―16:00
			IB	17:00―19:00
	16	日	ID	11:00―13:00
			G	14:00―16:30
	19	水	HC	19:00―20:30
	21	金	IC	18:30―20:30
	22	土	MA	14:00―16:00
			IF	17:00―19:00
	23	日	IA	11:00―13:00
			EA	14:00―16:30
	28	金	IE	18:30―20:30

月	日	曜日	クラス	時間
11	29	土	MB	14:00―16:00
			IB	17:00―19:00
	30	日	ID	11:00―13:00
			G	14:00―16:30
12	3	水	HC	19:00―20:30
	5	金	IC	18:30―20:30
	6	土	MA	14:00―16:00
			IF	17:00―19:00
	7	日	IA	11:00―13:00
			EA	14:00―16:30
	12	金	IE	18:30―20:30

（１）I.A 解析教程 II

レベル 入門

I.F、I.D と並び最も基本的、かつ重要な講座でどの方向に進むにせよ必須の講座である。今回は、解析関数の発見から始まり、微積分の基礎公式の発見までである。微積分もわからないで代数的な方法、位相的な方法の真の力を思い知るような豊かな対象に出会うことは難しい。本講座は微積分の漫然たる知識の羅列ではない。幾つかの基礎理論が生まれてきた現場に立ったつもりで、微積分の理論を 18 世紀的精神で再構成していく。無論、実際的な意味では、初級レベル終了後、現代解析を学びなおすべきである。

[内容]
[1]冪級数の発見と初等関数
[2] 微分法再論
[3] 低積分と微積分の基本定理
[4]微積分の基礎公式

（２）I.B 複素関数概論（解析性と位相）

レベル 入門

複素微分・実微分・正則性・複素線積分を過度の厳密さは避けつつ明快に論じる。微分形式の概念や、微分作用素等の取り扱い、Poincaré の *Calculus* などは初等的な解析学の教科書（Cartan でさえ！）のように天下りな方針はとらず、モダンかつ幾何学的な定式化にしたがっている。次期は Cauchy の積分公式（局所理論）とその応用である。

[内容]
[1]複素微分
[2]正則関数
[3]実微分と複素微分 Cauchy－Riemann 方程式
[4]複素値関数の積分
[5]複素線積分

（３）I.C 期待値と Stieltjes 積分

レベル 入門

確率変数の期待値の記号的把握から始め、それが数直線上の Riemann－Stieltjes 積分に帰着することを示す。また、ベクトル値の場合、ベクトル値確率変数の期待値および、この変数の実または複素特性量がユーグリッド平面上の Riemann－Stieltjes で表現されることを示す。このようにして、Lebesgue 積分を基礎にした実解析の強力な道具が確率論に導入されている様をみる。

[内容]
[1]期待値の形式的定義
[2]数直線上の Stieltjes 積分と期待値の存在
[3]分布の特性量
[4]多変量の分布と Euclid 空間の Stieltjes 積分
[5]特性関数 I

（４）I.D 微積分と初等線型代数 II

レベル 入門

今期は、（一般次元）Euclid 空間上の微積分の理論において中心になる部分である。幾何学的な行列式の理論や置換群の表現、Gram 行列などの美しいトピックスが登場する。次のタームは、Euclid 空間上における微積分理論の展開を予定している。

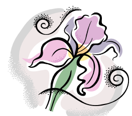
[内容]
[1]写像の微分法
[2]行列式の幾何学的定義
[3]線型変換の行列式・sgn 再論
[4]領域上の積分
[5]Jacobi 行列式と変数変換公式
[6]Gram 行列・Gram 行列式・面積分

（5）I.E Lebesgue 積分と測度論を読む

レベル 入門

会員の提案により誕生した講座です。現代解析の最も基本的素養です。Lebesgue 積分と測度論の基礎を一年かけて丁寧に扱います。材料と取り扱いは、小谷真一著［測度と確率１］岩波講座 「現代数学の基礎」に従う予定です。比較的丁寧に初心者向けに書かれているので、初級程度の素養がある方にとって解析のアドバンストコースとしてお勧めです。

[内容]
[1]測度の概念
[2]可測関数
[3]単関数の代数と積分
[4]積分の定義と基礎的な性質



（５）I.F 数学の基本語彙と文法

レベル 入門

最初に、意識的に学ぶことの少ないΣの用法を、多重添え字の場合を中心に、応用練習として同じ対象に異なった和の束をすることにより様々な表現が得られることを実践的に学ぶ。数学的帰納法も状況に応じて、様々な、バリエーションを使いこなすことを学ぶ。[２]、[３]で扱うのは理論としての集合論ではない。記述としての、集合写像の取り扱いに習熟することが狙いである。最後に応用練習として、変換の半群、群を扱う。

[内容]
[1]Σの用法と数学的帰納法の様々な用法
[2]集合の代数
[3]写像の概念・像と現像
[4]代数語事始

（６）E.A 抽象位相

レベル　初級

一見単純だが、理解しにくい、相対位相と部分空間の理解から始める。線形空間における線型部分空間同様、見かけ以上に強力な概念である。連結性は局所定数関数による基礎付けから出発する。この方が解析学との結びつきが明瞭だからである。扱うのは標準的な内容である。コンパクト性はここでは一様構造にかかわらぬ部分のみ扱う。ネットによる定式化も行う。一様構造・全有界・完備性などは集中で扱う予定である。

[内容]

[0]相対位相・部分空間

[1]連結性

(1)局所定数関数

(2)連結性の基本的性質

(3)Euclid 空間の連結開集合

(4)連結成分

[3]コンパクト

(1)Heine-Borel の性質・有限交差性

(2)コンパクト性についての基本的性質

(3)コンパクト集合上の連続写像

（８）G 抽象線型代数特論　標準形

レベル　初級

線型変換の分類と標準形の意味を構造的に理解する。この講座では実効的な計算法は取り扱わない。標準形の議論は, しばしば何故にという問いかけなしに、行き当たりばったりの式変形として扱われ、事の本質に無関係な計算技巧や説明に多くのページを費やす文献が多い。この講座により、抽象線型代数の力を実感することが出来るであろう

[内容]

[0]準備

(1)線型変換の代数

(2)多項式の補題

(3)最小多項式と固有値

[1]線型変換の分解

(1)不変部分空間

(2)既約成分への直和分解

[2]標準形

(1)標準の概念

(2)Jordan 標準形

[3]例と演習

（９）M.A 多変数複素関数論入門
（Hoermander を読む）

レベル　中級

今回は第 2 章 2.5-2.7 を読みます。そのほかに subharmonic function についての補充が入ります。この部分は見かけのページ数より大変な部分です。

[内容]

[0]基礎的な事実

[1]正則領域と正則凸性

[2]Subharmonic functions

[3]Plurisubharmonic functions　と Bergman 核関数

[4]擬凸領域

（10）M.B 関数解析学　線型作用素入門

レベル中級

複素微分・実微分・正則性・複素線積分を過度の厳密さは避けつつ明快に論じる。微分形式の概念や、微分作用素等の取り扱い、ポアンカレカリキュラスなどは初等的な解析学の教科書（Cartan　でさえ！）のように天下りな方針はとらず、モダンかつ幾何学的な定式化にしたがっている。次期は Cauchy の積分公式（局所理論）とその応用である。

[内容]

[0]Neumann 級数

[1]Banach 値関数の微積分

(1)連続関数の積分

(2)微分可能性

(3)作用素の強微分

(4)正則関数

[2]リゾルベントとスペクトル

(1)基本概念

(2)リゾルベント方程式と正則性

(3)擬リゾルベント

(4)リゾルベント半径公式

[3]演習と例

（11）H.C　H.Cartan の複素関数論を読む

レベル　初級・中級

主に第 2 章　正則関数・Cauchy の積分を読む。項目を見て判るようにこの部分は極めて重要度の高い部分である。Cauchy　流複素関数論の解析的―位相的道具の準備である。したがって若干、今までと方針を変えてじっくり学ぶ予定である。複素微分形式や複素微分の深い理解については I.B 講座の関数論を活用されたい。

[内容]

[0]解析関数

(1)解析性の判定

(2)解析接続の原理

(3)解析関数の零点

[1]線積分

(1)微分形式の線積分

(2)微分形式の原始関数

(3)Green-Riemann の公式

(4)閉形式

(5)一価でない原始関数

(6)ホモトピー

(7)単連結領域

(8)閉路の指数

＊正則関数の基本的諸定理に続く

[備考]

各講座とも 1 講座￥30000（税込）、学生￥21000（税込）。途中参加の場合、参加回数×￥5000＋￥2000（テキスト代・手数料)です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なお テキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします。

中 央 大 学 特 別 講 義 報 告

前回に引き続いて 6 月 6 日に行われた中央大学理工学部数学科の特別講義の模様を紹介します。今回は、報告者の一人、加野象次郎さんに当日の報告内容と感想を執筆していただきました。

■　中央大学「特別講義」後日談　　加野象次郎

「特別講義」全体の概要については、既に前号で、諏訪先生が上手にまとめておられますし、大したことも喋らなかった僕の話しを今さら蒸し返すのも、あまり気の進むものではありません。そこで、ここでは僕がどんな話をしたかではなく、後日談になりますが、学生さんから提出されたレポートのなかから、僕の話のどこに彼らが反応してくれたかを紹介するとともに、それを読んだ僕がどんなことを感じたかといったことなどを話題にすることで、与えられた任を果たしたいと思います。

今回、一宿一飯の恩義ある桑野先生から「趣味としての数学」というお題をいただいたのが、本番 2 週間前。数学を専攻する学生さんに一体何を話したらいいのか、まして、50 歳近い年齢差のある若者たちにどんなメッセージを伝えたらよいのか、いろいろ悩みました。しかし、その肝心なところがまとまらないまま、結局、あるがままの自分や日頃の思いを話すしかないと決め、せめて持ち時間の 20 分だけは守ろうと、スライドは 9 枚にとどめて本番に臨みました。以下は、僕が喋ったりしたことや、スライドに記した文言のなかで、学生さんのレポートの「今日のキーワード」や「今日のポイント」に取り上げられたものを抜粋して、それに、僕なりの説明や解釈あるいは感想を付け加えたものです。

「学ぶことに、年齢はない」― 若い人にとって、定年退職後に数学の勉強を始めた希有な老人に出会ったことが、もしかして、これまでにない刺激になったということでしょうか。その意味では、僕はただ、存在することに意義があるのかもしれませんので、これからも、工房の教室では、気合いを入れて前列で頑張りたいと思います。

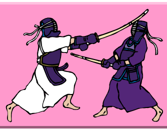
「学ぶとは、個人のレベルでのルネッサンスである」― これは、何を隠そう、桑野先生が「解析教程」の初めの講義で、現代数学を学ぶ上で Newton や Leibniz など先人の足跡を辿ることの大切さを強調されて使われたフレーズですが、僕にとっては、自分自身の数学への回帰ということとも重なって、感銘を受けた言葉でした。この教訓に富むメッセージが、一部でも数学専攻の学生さんに伝えられたことは何よりでした。

「数学工房会員　$\rho \in \{$老人$\} \cap \{$浪人$\}$」「TeX ニシャン」「$|\{$数が苦$\}| < |\{$数楽$\}|$」― プレゼンも内容がお粗末な場合、このようなウケを狙っての小細工で誤摩化すことが多いのですが、まさかそれが「今日の …」に採用されるとは思ってもみませんでした。その点、中央大学、なかでも数学科の学生さんはナイーブというか、哀れみの心が広いというか、ノリがいいのですね。

「抽象化・一般化」― 僕が感じた驚きと感動、そして難解な現代数学への思いは、この一語に尽きると思います。工房で学ぶほどに、僕がこれまで学び、生業としてきた医学や医療の世界は、まさに、これとは対局の個別化・多様化の世界であったのだと、今さらながら感じています。その「抽象化・一般化」の最たるものとして、内積や位相の公理的定義が挙げられますが、それらに出くわしたときの僕の驚きは強烈でした。一時は、その余りの天下り的な説明に思考停止のブラックアウトに陥りましたが、しかし、世の低俗な解説を良しとしない桑野先生の厳しい教えに導かれるうちに、何とか視界が開けてきたような気がしています。このような僕の思いに学生さんも共鳴してくれたようで、あるレポートには、「抽象化・一般化というのは、数学のもつ偉大なパワーだと感じつつあるが、今、位相や群論のそこでつまずいており、深く学んで克服したい」との真摯な決意が述べられていて、同学の徒、いや戦友として、こちらがむしろ鼓舞される思いになりました。

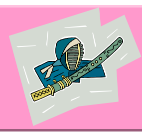
「飲み会」― これが、なぜ「今日の …」となったのか、それも数人からとは、よほど今の学生さんは脱水（酔）状態にあるのでしょうか。しかし、このような文言がここに出てくる責任は、外でもない僕にあります。僕が工房に入会して感心したことは、今の世の中にあって、純粋数学をエキストラに勉強しようとする社会人や学生の若い数学愛好者の存在でした。そして、その仲間のグループに入れていただき、ネットや飲み会を通じて、数学談義や情報交換をしているということを話したのですが、ついうっかり口が滑って、実は来週飲み会を予定しているなどと軽々しく喋ったのがいけなかったのですね（NG！）。学生さんのなかには、「近々○月×日に二十歳の誕生日を迎えるので、その時は飲み会に誘ってください」というような調子のいいレポートもありました。いずれにしても、数学も飲み会も好きで、楽しく学んでいるということが伝わったのではないかと思います。そういえば、このところ飲み会の方はさっぱりご無沙汰ですが、…。

写真 1　報告を行う加野さん



入門桑野道場（第 8 回）

/// 会報編集Gr.自主活動企画（半田、平田、増田、坂口）



会員の皆様、お元気ですか。会報編集 Gr. の平田、増田、坂口です。9 月に入って朝夕だいぶ涼しくなりました。皆様それぞれが数学の稽古に励んでいることと思います。皆様の積極的な解答の応募とともに編集 Gr. への要望のメールもお持ちしております。

今号では前号の問題(12)について解答を引き続き募集し、新たに問題(13)を提出します。問題番号は、前号からの通し番号になっています。

問題(12)（前号からの持ち越し）

$(X,\mathfrak{O})$ をコンパクト空間とする。ただし、$\mathfrak{O}$ は X の開集合系とする。写像 $f: X \mapsto \mathbb{R}$ が連続ならば、f は X で最大値と最小値をとることを示せ。

問題(13)

定点 O を中心とした半径 ρ の円 C と平面上の点 P がある。P を通る直線が、この円と 2 点 A,B で交わるとき、$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{OP}^2 - \rho^2$ が成立することを示せ。

解答の宛先：kuwanodojo@googlegroups.com
　なお解答は可能ならば、WORD か PDF ファイルで送信してください。応募締切日は 10 月 31 日(日)です。

前号の解答とヒント

　前回、掲載できなかった前々号の問題（10）と前号の問題（11）の解答とヒントをあわせて掲載します。なお、問題（11）の c)について前号では記述に誤りがありました。お詫びして訂正いたします。

■■■前々号(No. 95)の問題（10）

複素平面上の任意の 4 点 a,b,c,d について以下の不等式が成り立つことを示せ。また、等号成立条件は何か。

$$|a-c||b-d| \le |a-b||c-d| + |a-d||b-c|$$

問題(10)のヒントと解説

不等式の成立については、

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-b)(b-c)$$

の左辺に三角不等式を適用すればよい。等号成立の必要十分条件は、$|z+w| = |z| + |w|$ の等号成立条件が $\overline{z}w \ge 0$ であることに注意すれば、

$$(a-b)(c-d)\overline{(a-d)(b-c)} \ge 0$$

である。

＊等号成立条件の幾何学的解釈について

$b,c,d \in \mathbb{C}$ が相違する点のとき、3 点は一つの Gauss 円周 C 上にある（退化して直線になる場合を含めて Gauss 円と言う。無限遠点を通る円が直線である。）

複比 $\mathrm{T}(z): = \dfrac{(z-b)(c-d)}{(z-d)(c-b)}$ は Riemann 球 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の解析的な 1 次分数変換(Moebius 変換)で T(b)=0, T(c)=1,T(d)= ∞ を満たす。このことから C と $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が対応していることが分かる。今、C 上に b,c,d が反時計周りに並んでいると仮定する。等号成立条件の両辺に、

$|(a-d)(b-c)|^{-2}$ をかけると $\mathrm{T}(a) = \dfrac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} < 0$

これは $a \in C$、かつ C 上に点が b,a,c,d と並んでいる場合である。複比と 1 次分数変換については、例えば Ahlfors 著の *Complex-Analyis* を参照のこと。

■■■前号(No. 96)の問題（11）

X, Y を空でない集合とし、$f: X \to Y$ を写像とする。このとき、以下を示せ。

a)　f が単射 $\Leftrightarrow f(A) \cap f(A^C) = \phi \quad for\ \forall A \in 2^X$
b)　f が単射 $\Leftrightarrow f(A^C) \subset f(A)^C \quad for\ \forall A \in 2^X$
c)　f が全射 $\Leftrightarrow \exists A \in 2^X\ s.t.\ f(A)^C \subset f(A^C)$

問題(11)の解答

鈴木史郎さんと穴見公隆さん、小松将義さんから応募がありました。以下に略解を示します。

$f: X \to Y$ が単射であるとは $f(x) = f(x')$ となる任意の $x, x' \in X$ に対して $x = x'$ となることである。また $f: X \to Y$ が全射であるとは $f(X) = Y$ となることである。

a)　対偶命題「f が単射でない
$\Leftrightarrow \exists A \in 2^X\ s.t.\ f(A) \cap f(A^c) \ne \varnothing$」を示す。
$\Rightarrow$）　単射ではないので、
$\exists x, x' \in X\ (x \ne x')\ s.t.\ f(x) = f(x').$
$A := \{x\}$ とおくと $f(A) = \{f(x)\}$ であり、
$x' \in A^c$ より $f(x') \in f(A^c)$
よって、$f(A) \cap f(A^C) = \{f(x)\} = \{f(x')\}$
すなわち $f(A) \cap f(A^c) \ne \varnothing.$
$\Leftarrow$）$f(A) \cap f(A^c) \ne \varnothing$ より $y \in f(A) \cap f(A^c)$ となる y をとると、
$\exists x \in A, \exists x' \in A^c\ s.t.\ y = f(x) = f(x').$
$A \cap A^c = \varnothing$ より $x \ne x'$. したがって単射ではない。

b)　a)より f が単射
$\Leftrightarrow f(A) \cap f(A^c) = \varnothing\ for\ \forall A \in 2^X$
$\Leftrightarrow f(A^c) \subset f(A)^c\ for\ \forall A \in 2^X.$
(一般に、$M \cap N = \varnothing \Leftrightarrow N \subset M^c$ が成立する。)

c)　$\Rightarrow$）　$A := \varnothing$ とおくと、f が全射であることに注意して $f(A^c) = f(\varnothing^c) = f(X) = Y.$　よって $f(A^c) \subset Y = f(A^c).$
$\Leftarrow$）$\exists A \in 2^X\ s.t.\ f(A)^c \subset f(A^c)$ より
$f(X) = f(A \cup A^c) = f(A) \cup f(A^c)$
$\supset f(A) \cup f(A)^c = Y.$ すなわち $f(X) = Y.$
よって f は全射。

数学工房　2008年7月1日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　編集Gr.
　　　　　(坂口尚文・平田裕一・増田卓)

連絡先
　オフィス電話：042-495-6632
　数学工房連絡専用(携帯)：08065762691
　連絡は極力e-メールをご利用下さい。
　e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
　e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp(携帯、緊急用)
ホームページ：
　http://www.sugakukobo.com
数学工房　教室
　〒170-0003
　豊島区駒込1-40-4
　全国蕎麦製粉会館2F　202-203
数学工房　オフィス
　〒204-0023
　清瀬市竹丘1-17-26-401