Math.
NO.98
www.sugakukobo.com

会報２００８年１１月
数学工房

晩　秋　の　思　い

溜息（soupir）
おお、静かな妹よ。赤褐色の斑点をまき散らした秋の夢見るお前の額に向かって、
また、天使のようなお前の眼の漂う空に向かって、わが魂は立ち昇る。
憂愁の庭の中で白い噴水が「蒼空」に向かって、誠実に溜息をつきつづけるように。
「蒼空」は、蒼白く澄んだ「10 月」にこころうごかされ、
その果てしない寂しさを大きな池に映し、鹿子色をした臨終の落ち葉が風のまにまにさ迷い、
冷たい水脈つくる澱んだ水の面に、光も長い黄ばんだ太陽を這わせている。
（Ste'phne Mallarme'　）窪田般彌対訳

秋も深まり、空気が透明になり、夜が長くなってくると、きまって Debussy の陰影に富んだ歌曲が聴きたくなる。夏とは、明らかに聴きたいものが違ってくる。いつもそうなのだが、聴きたい思いの割には、実際に聞くことは少ない。机に座って、静まり返った深夜の風景を眺めているうちに、あれやこれや、数学の問題が気になり始める。数学はそれ自体で自足した美を持つゆえか、流れの中に意識が入ってしまうと別の情緒の助けを借りる必要はない。言葉によって自足した詩は、音楽を必要としないように。

■■■　今、勉強していること　/// 不等式

最近、ちょっとした経緯から、久しぶりに不等式そのものを勉強しています。Cauchy 以来解析学は、不等式による評価を、根源的な道具、というより方法としています。そこで扱われる対象の存在を、不等式により搾り出すのです。例えば、複素関数論における Cauchy の評価式の豊かさを考えてみればよいでしょう。解析に携わる者にとって、不等式を様々に運用するのは、日常の事であり、あまり意識することはありません。今、勉強しているのは、普段の不等式のような大道具ではなく、より微妙な有限和や無限和の評価です。うまく束ねる順序を工夫して和を再配列すると、打ち消しあいが起きて良い評価が得られるということがあります。随所に賢いエレガントなアイデアが現れます。純粋な、感覚の喜びを感じます。

■■■　20 世紀数学との出会い　/// 関数環

大分ご無沙汰してしまいましたが、久しぶりに、私が出会った 20 世紀数学のことを少し書きます。多変数関数論を中級で取り上げている関係で、講義を準備しているうちに、昔勉強していたことを思い出したからです。

前にも書いたかもしれませんが、学部の時には、複素関数論を熱心に勉強し、有界領域上の 2 乗可積分な正則関数の空間 H（Ω）を通じて Hilbert 空間に出会い、関数解析と複素解析の境界領域に興味を持ちました。何をやったらよいのか、あちらこちらをのぞいたものです。関数論（一変数と多変数）と関数解析の中間分野で当時比較的新しく活発に活動していた分野のひとつが関数環で、もうひとつは、日本では当時まだこれから本格的に研究しようという段階だったと思いますが Teichmueller 空間の理論でした。後者は、現在比較的よく知られているこの分野の専門家達が、これからクローズドな研究会をしようとしていたところで、私も誘っていただいたのですが、このときは前者の勉強に時間がとられせっかくの機会を失いました。何しろ当時は、まだ関数解析の基礎理論もちゃんと知らなかったのです。

関数環（Function algebras）とは、関数解析を手段として、主に Banach 環の立場から、正則関数の様々なクラスとその相互関係を明らかにすることを目的にするものです。私としては、先ずこの分野の勉強から初めて、正則関数環の背後に垣間見える普遍的な実在を、20 世紀前半までに高い完成度に達した位相線型空間の言葉を手段として理解したいと思いました。

関数環は、最初 Banach 環の例として登場しました。定義は、コンパクト Hausdorff 空間 X 上の連続関数の Banach 環 C(X)の閉部分環で、単位を含み X の点を分離するものということになります。例えば、C(X)自身、また複素平面の単位円上連続で、内部で正則な関数全体 A(D)（これを、disc 環と言います。）などです。関数環の研究課題は、(１)関数環の一般的性質と個別の関数環の詳細な研究、(２)関数の近似問題、(３)Hardy 空間の諸問題、(４)解析性の追及などです。

さて、簡単に歴史を述べておきます。関数解析の展開の場である Banach 空間は、1922 年　S.Banach および N.Wiener により導入され、1936 年に Banach 環の一般論が南雲道夫により始められたと言われています。初期の成果は、当時清新の気のあふれる大阪大学にいた南雲ともう一人の日本人研究者吉田耕作の両教授によるものでした。私達が学生の頃、この雲の上の両先生はご老齢でしたがまだ現役で、あちらこちらの学会等でお元気な姿をお見掛けすることができました。その後、非可換 Banach 環の理論は、作用素環の理論として大発展します。可換 Banach 環については、1941 年に Gelfand の表現定理が現れます。すなわち A を可換で単位元を持つ複素 Banach 環とするとき、A から連続関数環 C(M)への連続な準同型写像が存在するというものです。ただし M は A の極大イデアル空間です。このアイデアは可換環論にも大きな影響を与えました。

最初は Banach 環の一般論の例に過ぎなかった関数環は、1950 年頃から、それ自体の活発な研究が始まります。古典論との最大の違いは、古典論の目標が個々の関数の個性追及であるのに対し、関数環では纏まった代数的位相的性質を持つ関数のクラスの構造を追及することであると思います。私が数学のこの分野の専門的研究から離れて月日が随分経ちます。30 年近い歳月がたった今、この分野について、正確にはなんともいえませんが、一般論はともかく応用上他分野との関係で、個別の具体的な正則関数の作る位相線型空間と、その上の作用素研究の重要さは減じていないと考えています。例えば、私が誤解していなければ、Hilbert 空間の有界作用素に限って言っても、一般的な作用素のことはよく分かっていないはずです。与えられた線型変換に非自明な不変部分空間があるのか？この点が有限次元の場合と著しく違うと思います。有限次元なら Jordan 標準形に分解されてしまうわけです。この問題の手がかりを求めて具体的な関数のなす Hilbert 空間や Banach 空間の具体的な変換の不変部分空間を求めるという研究もあります。06 年数理解析研究所の講究録（vol 1478）によれば、まだまだ関数環の一般論独自の問題も研究されているようです。

[参考書]

A.Browder, Introduction to Function Algebras, 1969, W.A.Benjamin,Inc
T.W.Gamelin, Uniform Algebras, 1969, Prentice-Hall
数理解析研究所講究録 143, Function Algebra, 1972, 京都大学数理解析研究所

2008 年 11 月 1 日　桑野耕一

冬期集中セミナー・ガイダンス案内

2008年12月~2009年1月

（１）関数解析学特論 Banach 空間値関数の複素解析　レベル 初・中級

［日時］
2008 年 12 月 13 日（土） 14：00-19：00
2008 年 12 月 14 日（日） 11：00-17：00

［内容］
秋学期で複素領域の Banach 値関数について簡単に触れた。[1]は Cauchy 理論を中心にしたよりシステマチックな纏めである。1 変数の複素関数論と対比しつつ学ばれると良い。[2]は Dunford のアイデアによる作用素の一般 Cauchy 理論である。スペクトルという特異点によって、作用素が決定する有様を Dunford 積分によって理解することができるのである。

［項目］
[1]一般論
(0)Banach 空間値複素変数関数
(1)Banach 値正則関数
(2)Banach 空間値関数の複素線積分
(3)Cauchy の積分定理・積分公式
[2]作用素の Dunford 積分
(1)有界作用素の Dunford 積分
(2)Dunford 積分の準同型定理
[3]Dunford 積分の応用
(1)スペクトル写像定理
(2)有界作用素の特徴づけ

（２）解析教程Ⅲ(18 世紀解析学から 19 世紀解析学へ)　レベル 入門

［日時］
2007 年 12 月 20 日（土） 14：00-19：00
2007 年 12 月 21 日（日） 11：00-17：00

［内容］
18 世紀解析学が、徐々に 19 世紀的な解析学に変容していく有様を級数の剰余評価の考え方と剰余評価の組織化を通して理解してみよう。この後の不等式の楽しみと合わせるといっそう深い理解への手がかりになるであろう。解析教程の雛形 Cauchy の教程はこのときに現れたのである。

［項目］
[1]級数の剰余評価の考え方
[2]Lagrange・Cauchy の平均値定理
[3]積分の平均値定理
[4]Bolzano
[5]剰余付き Taylor 公式
[6]Taylor 公式の応用
[7]古典解析からのトピックス

（３）不等式の楽しみ
(デリケートな和の評価の様々な技法）レベル フリー

［日時］
2008 年 12 月 23 日（火） 11：00-17：00

［内容］
和の評価というと、先ず思い出すのは、Abel の交代級数の一般化と Dirichle't の Fourier 級数の総和と和の評価の方法である。Abel は無限級数の和は収束の吟味無しに扱うと不合理な現象がおきることを指摘し、冪級数の収束に関する一般的な命題を与え、その際無限級数の値の求和（Abel の連続定理）に関連して、交代級数の収束判定を一般化した 1 つの判定条件を与えている。この判定のメソッドを不等式としてまとめたものを Abel の不等式という。Dirichle't は、収束級数には絶対収束級数と条件収束級数という 2 つの根本的に異なったクラスがあることを指摘し、条件収束級数は和の纏め方によっては全く異なる値に収束すること

を実例によって示した。さらに、現在の言葉で言えば、有界変動な関数のクラスの Fourier 級数の評価に成功した Fourier 級数は後者のクラスに属し、冪級数で成功したような三角不等式による単純な和の評価は通用しないのである。よりデリケートな和はどのようにして評価するか？

解析学、解析数論、確率論、組み合わせ論、数値解析などから取ったいくつかのすばらしいアイデアの例を通して、その様な和の評価の骨をつかみたい。

［項目］

[1]Abel の不等式
[2]三角級数の評価
　(1)一般論
　(2)一次の指数和
　(3)２次の指数和
[3]２次形式の評価と Van der Coupt 不等式
　(4)Radmacher 直交関数系の挙動の評価
　(5)様々な評価に関する不等式

（４）代数学・解析学特論 形式ベキ級数講義Ⅱ
レベル 初・中級

［日時］
　2008 年 12 月 27 日（土） 14 :00-19 :00
　2008 年 12 月 28 日（日） 11 :00-17 :00
［内容］

予告した形式冪級数の講義第 2 弾である。講義 I では形式冪級数の空間は、数列空間と同一視できることを利用して、線型漸化式と定数係数の線型微分方程式の関係を論じた。今回は、形式冪級数の空間が多項式空間の双対および多項式空間上の微分と可換な線型変換全体という 2 通りの解釈が出来ることを理解する。その際、自然な興味のある形式冪級数は、当然期待されるように、意味のある線型形式に結びついていることを見ることが出来る。また双対空間や作用素の空間を形式冪級数の空間と見ることができるために豊富な代数構造を付与することができ、より深い研究が可能になるのである。応用として解析で知られた多くの特殊多項式系（例えば Legendre 多項式系、Hermit 多項式系、）を含む Sheffer 多項式系を導入する。時間があれば、多項式空間の線形形式の空間を形式冪級数の構造によりさらに構造的に研究することにする。

［項目］
[0]準備 形式冪級数の基本的な性質・演算
[1]1 変数多項式空間の双対空間としての形式冪級数環
　(1)形式冪級数の線形形式としての作用
　(2)基本的性質
　(3)興味深い冪級数に対応する線形形式
[2]1 変数多項式空間への線形変換としての作用
　(1)線形変換としての作用
　(2)多項式空間の線形変換が形式冪級数で
　　表示される条件
[3]Sheffer 多項式系
　(1)基本概念
　(2)母関数
　(3)Sheffer 多項式系の表示と特徴づけ
　(4)Sheffer 多項式系の例としての特殊多項式系
[4]Umbral 解析
　(1)Sheffer 作用素・Sheffer 移動作用素
　(2)連続変換
　(3)Adjoint 変換
　(4)自己同型群
　(5)微分

（５）解析学と抽象位相の基礎
（距離空間の位相） レベル 初・中級

［日時］
　2009 年 1 月 10 日（土） 14 :00-19 :00
　2009 年 1 月 11 日（日） 11 :00-17 :00
［内容］

通常講座では、距離によらない一般論を扱ってきた。集中では距離空間上でのより深い特有の性質を扱う。始はより一般的に一様構造をテーマに集中セミナーをやる予定であったが、この部分の素養がないと、何が問題なのかが分かりにくいと思われる。最後に距離空間の根源的な性質である Baire Categorie 定理を扱う。多変数関数の Hartogs の定理や、Banach-Stainhaus の一様有界性原理、いたるところ微分不能な連続関数の存在など、微妙な問題の根拠となる、Hahn-Banach と並ぶ根源的な定理として学んでおきたい。

［項目］

[1]３つの一様位相的性質
　(1)写像の一様連続性
　(2)完備距離空間
　(3)全有界距離空間
[2]コンパクト距離空間
　(1)コンパクト・完備・全有界
　(2)ユーグリッド空間のコンパクト集合
　(3)点列コンパクト
　(4)コンパクト距離空間上の連続関数環
[3]Baire の Categorie 定理
　(1)Categorie 定理の定式化
　(2)幾つかの応用

（６）数学工房ガイタンス
数学工房の稽古の考え方・講座の内容・受講相談

［日時］
　2009 年 1 月 12 日（月） 11 :00-17 :00
［内容］

数学工房の考え方、講座の概要のガイダンスです。講座の取り方等の個別の相談も承ります。筆記用具をご持参下さい。新入会の方もご自由にご参加下さい。
参加費　無料

［備考］　集中セミナー参加費
2 日のセミナー：
　会員　　16000 円（学生 12000 円）
　非会員　20000 円（学生 15000 円）
1 日のセミナー：
　会員　　10000 円（学生 8000 円）
　非会員　15000 円（学生 10000 円）

春　学　期　講　座　案　内

2009 年春学期講座は、入門 6 講座、初級 2 講座、中級 2 講座を開講します。

<< 春学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程Ⅳ	1 月 25 日	入門

I.B	複素関数論Ⅲ	1 月 17 日	入門
I.C	可換代数入門	1 月 23 日	入門
I.D	初等線型代数と微積分Ⅲ	1 月 18 日	入門
I.E	Lesbegue 積分と速度論を読む	1 月 16 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	1 月 24 日	入門
E.A	解析学と抽象位相の基礎Ⅲ	1 月 25 日	初級
G.	抽象線型代数特論	1 月 18 日	初級
M.A	ヘルマンダーを読むⅢ	1 月 24 日	中級
M.B	線型作用素の理論入門Ⅲ	1 月 17 日	中級

<< 春学期講座カレンダー >>

月	日	曜日	略号	時　間
1	16	金	I. E1	11:00-13:00
	17	土	M. B1 I. B1	14:00-16:00 17:00-19:00
	18	日	I. D1 G1	11:00-13:00 14:00-16:30
	21	水	O. C1	19:00-20:30
	24	土	M. A1 I. F1	14:00-16:00 17:00-19:00
	25	日	I. A1 E. A1	11:00-13:00 14:00-16:30
	30	金	I. E2	11:00-13:00
	31	土	M. B2 I. B2	14:00-16:00 17:00-19:00
2	1	日	I. D2 G2	11:00-13:00 14:00-16:30
	4	水	O. C2	19:00-20:30
	6	金	I. C1	18:30-20:30
	7	土	M. A2 I. F2	14:00-16:00 17:00-19:00
	8	日	I. A2 E. A2	11:00-13:00 14:00-16:30
	13	金	I. E3	11:00-13:00
	14	土	M. B3 I. B3	14:00-16:00 17:00-19:00
	15	日	I. D3 G3	11:00-13:00 14:00-16:30
	18	水	O. C3	19:00-20:30
	20	金	I. C2	18:30-20:30
	21	土	M. A3 I. F3	14:00-16:00 17:00-19:00
2	22	日	I. A3 E. A3	11:00-13:00 14:00-16:30
	27	金	I. E4	11:00-13:00
	28	土	M. B4 I. B4	14:00-16:00 17:00-19:00
	1	日	I. D4 G4	11:00-13:00 14:00-16:30
	4	水	O. C4	19:00-20:30
	6	金	I. C3	18:30-20:30
	7	土	M. A4 I. F4	14:00-16:00 17:00-19:00
	8	日	I. A4 E. A4	11:00-13:00 14:00-16:30
	13	金	I. E5	11:00-13:00
	14	土	M. B5 I. B5	14:00-16:00 17:00-19:00
3	15	日	I. D5 G5	11:00-13:00 14:00-16:30
	18	水	O. C5	19:00-20:30
	20	金	I. C4	18:30-20:30
	21	土	M. A5 I. F5	14:00-16:00 17:00-19:00
	22	日	I. A5 E. A5	11:00-13:00 14:00-16:30
	27	金	I. E6	11:00-13:00
	28	土	M. B6 I. B6	14:00-16:00 17:00-19:00
	29	日	I. D6 G6	11:00-13:00 14:00-16:30
4	1	水	O. C6	19:00-20:30
	3	金	I. C5	18:30-20:30
	4	土	M. A6 I. F6	14:00-16:00 17:00-19:00
	5	日	I. A6 E. A6	11:00-13:00 14:00-16:30
	10	金	I. C6	11:00-13:00

数学工房ホームページの紹介

ホームページGr.自主活動企画　記：杉田

日頃、数学工房のホームページを作成してくださっているのは、杉田淳一さんです。杉田さんにホームページ作成のご報告をしていただくことにしました。

数学工房のホームページを担当している杉田です。出身は「数理学科」という数学と物理とコンピュータを足して３で割った様な学科でした。学部の４年のときに「宮寺功著 関数解析　理工学社」を読み、卒業研究もこの本に沿ったものになりました。数学工房で勉強しはじめてから、早いもので十数年が経ちました。現在は、「MA 多変数関数論」と「MB 線形作用素の基礎理論」を受講しています。最近「学部で勉強した関数解析は少し高度な線形代数だったのだ」と痛感しています。

今年の２月から、藤田さんより引き継いでホームページの編集および管理を行なっています。仕事は測定器に組み込むマイクロコンピュータのプログラムや測定器をコントロールするソフトウェア等を作っていたのですが、ホームページに関しては素人だったので本を読んだり、WEB で調べたりしながらホームページの編集を行なっています。現在は市販のエディタを使用して、「HTML」というマークアップ言語で記述しています。

「ホームページ・ビルダー（IBM 製）」等のホームページ作成ソフトも検討しているのですが、とにかく「WEB」の世界は変化していくのが早いので、付いて行くだけでも大変です。編集していて面倒だと感じる

Photo1　杉田淳一さん

ことは、ブラウザの種類により微妙に表示が異なる点です。例えば、WIN 版のブラウザでは正常に表示しているのに、MAC 版のブラウザでは、表示がずれてしまうことが時々あります。チェックはしているのですが見落としてしまうこともあります。

今年の４月から会員の皆様のご協力により、講義報告を載せることができるようになりました。講義報告は組版処理ソフトウェア Tex を使用して綺麗に書かれています。「スケジュール」のページや「過去の講義履歴」のページで、「講義報告」をクリックすると PDF ファイルが表示されるので、是非ご覧ください。講義報告については継続していくことが大切だと考えています。これからも皆様のご協力をよろしくお願いします。最後になりましたが、数学工房のホームページに関するご意見・ご要望をお寄せください。より良いホームページを作って行きたいと思っています。

中央大学特別講演報告（最終回）

会報編集Gr.自主活動企画　記：増田

穴見さんと私、増田は、昨年に引き続き講演させていただきました。連続講演者の代表として最終回は私が執筆させていただきます。

昨年は特別講義とはどのようなものか全くわからない中での講演でしたので、大変緊張しました。今年は去年の経験がある分だけ余裕があったように思います。桑野先生からは「昨年と同じ内容でいいですよ。」と言われたのですが、昨年の講演内容が決してベストではないと思っていたので、何とか改善を試みました。

まずは昨年の反省から。昨年の講演では「数学が役に立つか立たないかなどの短期的な視点で捉えるな。」という趣旨の内容が中心でした。数学の初学者であるにも関わらず数学を学ぶ上での心構えのようなことを講演しており、どちらかというと精神論的な内容だったと思います。自分の思いだけが先走っており、学生にはあまり伝わっていなかったようです。その点、お医者さんである穴見さんは、MRI などを例に医学の中で数学がどのように使われているかを具体例で話されており、学生にとってわかりやすい内容でした。そこで、私も今年の講演では、数学が実際にどのように使われているか、具体例を話すことにしました。

私は現在製品開発の仕事をしています。製品開発の現場でどのように数学を使っているかを話しました。私が関わった開発に全方位カメラというものがあります。これは魚眼レンズのような広角レンズによって、レンズを中心とした半球方向のあるものをすべて画像として捕らえることができるカメラです。ただし、生成される画像は歪んでいるため、画面に映し出すときには補正が必要です。この補正に３軸方向について θ 回転の線型写像の原理が応用されています。後で諏訪先生から伺ったのですが、この頃学生は線型代数の講義で線型変換を学習している最中だそうで、学生にとってタイムリーな話題だったようです。感想を読むと、カメラの話が印象に残ったというものが何件かありました。私は少々得意気になりました。私はさらに製品のデモンストレーションをやろうとしたのですが、これはどういうわけかうまくいきませんでした。事前にはうまくいったのですが、本番は PC の画面にカメラの画像を映し出すことができず、ちょっと残念でした。

講演の最後は、桑野先生が最近時間を忘れて暴走？する逸話や講義の後の飲み会の話などを交えながら、できるだけ堅い内容にならないように努めました。そして、最後に自分が数学を勉強するのは、それが楽しいからだということを伝えて講演を締めくくりました。自分としては昨年よりは内容がよくなったと思っているのですが、果たしてどうだったでしょうか。

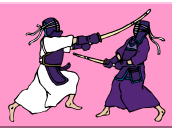
学生の感想を読んで

今年もたくさんの学生から感想をいただきました。講演者にとっての楽しみは、学生からの率直なフィードバックをもらうことです。さて、学生の感想をいくつか紹介したいと思います。まず、全般を通じて私が個人的に印象に残ったのは、「講演者全員が数学を楽しそうに学んでいるのが分かり、自分もやる気が出てきた。」というものです。このような感想をもらうと、講演をやって良かったと思います。今回は特に加野さんの影響が大きいように思います。定年退職されてもなお、数学の勉強に情熱を燃やす加野さんの姿は学生を大いに刺激したようです。学生は加野さんの話を聞いて必然的に「自分は何のために数学を勉強するのか。」ということを考えさせられたのではないでしょうか。

また、「数学がいろいろな分野の役に立っていることが分かった。」というもありました。やはり数学がどんな風に社会で使われているのかを示すのは重要だと思いました。「将来、数学工房で勉強したい。」という感想もありました。将来と言わず、今からでも是非来てもらいたいものです。

来年もおそらくこの特別講義は開催されると思います。私はできるだけ多くの会員にこのような貴重な体験をしてもらいたいと思います。どなたかぜひ挑戦してみてください。

Photo2　増田卓さん



入門桑野道場（第９回）

/// 会報編集Gr.自主活動企画（平田、増田、坂口）///

会員の皆様、お元気ですか。会報編集 Gr. の平田、増田、坂口です。皆様の積極的な解答の応募とともに編集 Gr. への要望のメールもお持ちしております。

それでは今号の問題です。問題番号は、前号からの

通し番号になっています。

問題(14)

1. $0 < h < 1$ のとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、
$1 - nh \leq (1-h)^n$ を示せ。

2. $\alpha := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \beta := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ とする。

これら2つの極限 α, β が存在することは既知として、
$\alpha = \beta$ を示せ。

解答の宛先：kuwanodojo@googlegroups.com
なお解答は可能ならば、WORD か PDF ファイルで送信してください。応募締切日は 12 月 31 日(水)です。

■■■前号(No. 97)の解答

問題(12)

$(X, \mathcal{O})$ をコンパクト空間とする。
ただし、$\mathcal{O}$ は X の開集合系である。
$f : X \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f は X で最大値および最小値をとることを示せ。

★解答(12)

この問題には、**鈴木史郎**さんが正解されています。

i) f が有界であること
$I_n := (-n, n)$ for $\forall n \in \mathbb{N}$ とおくと、
$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、I_n は $\mathbb{R}$ の開集合。
f の連続性より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$f^{-1}(I_n) \in \mathcal{O}$。
しかも

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(I_n)$$

したがって、$(f^{-1}(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は X の開被覆。
Xはコンパクトなので $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が増大列であることに注意すれば、$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $X = f^{-1}(I_m)$。
したがって、$f(X) \subset I_m = (-m, m)$。
すなわち f は有界。

ii) f が最大値をもつこと(最小値をもつことも同様にできる)
f は上に有界だから、
$s := \sup f(X)$ とおくと $s < \infty$ 。
f は最大値をもたないと仮定する。
すると $f(X) \subset (-\infty, s)$ 。
$J_n := (-\infty, s - 1/n)$ for $\forall n \in \mathbb{N}$ とおくと、
$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して J_n は $\mathbb{R}$ の開集合。
f の連続性により $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $f^{-1}(J_n) \in \mathcal{O}$ 。
しかも

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = (-\infty, s) \text{ より}$$

$$X = f^{-1}((-\infty, s)) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(J_n)$$

したがって、$(f^{-1}(J_n))_{n\in\mathbb{N}}$ はXの開被覆。
Xはコンパクトなので $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が増大列であることに注意すれば、$\exists l \in \mathbb{N}$ s.t. $X = f^{-1}(J_l)$。
よって $f(X) \subset J_l = (-\infty, s - 1/l) \subsetneq (-\infty, s)$。
ところがこれは $s = \sup f(X)$ に反する。
したがって、$s = \max f(X)$。

■■■前号(No. 97)の解答

問題(13)

定点 Oを中心とした半径 ρ の円 Cと平面上の点 Pがある。Pを通る直線が、この円と2点 A, Bで交わるとき、$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{OP}^2 - \rho^2$ が成立することを示せ。

★解答(13)

この問題には、**鈴木史郎**さんが正解されています。

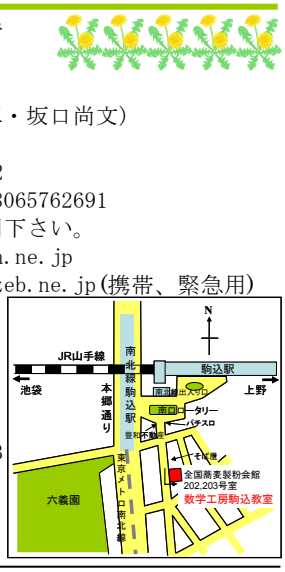
複素平面上で考えることとし、A, B, O, P に対する複素数をそれぞれ $a, b, 0, p$ とする。
$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = (a-p)\overline{(b-p)}$ と定めることにすると、線分 $\overline{PA}$ と $\overline{PB}$ の符合付きの長さの積である。
実際、$|(a-p)\overline{(b-p)}| = |(a-p)(b-p)|$ である。
また、A, B, P は相異なり、同一直線上にあるので、
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\lambda + \mu = 1, \lambda\mu \neq 0)$ s.t. $p = \lambda a + \mu b$
したがって、

$$\begin{aligned}(a-p)\overline{(b-p)} &= (a-\lambda a-\mu b)\overline{(b-\lambda a-\mu b)}\\ &= ((1-\lambda)a-\mu b)\overline{((1-\mu)b-\lambda a)}\\ &= (\mu a-\mu b)\overline{(\lambda a-\lambda b)}\\ &= \lambda\mu(a-b)\overline{(b-a)}\\ &= -\lambda\mu|a-b|^2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

次に、$(a-p)\overline{(b-p)} = |p|^2 - \rho^2$ を示す。

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= -\lambda\mu|a-b|^2\\ &= -\lambda\mu(|a|^2+|b|^2-2\mathrm{Re}(a\bar{b}))\\ &= 2\lambda\mu(\mathrm{Re}(a\bar{b})-\rho^2)\\ \text{右辺} &= |\lambda a+\mu b|^2-\rho^2\\ &= \lambda^2|a|^2+\mu^2|b|^2+2\lambda\mu\mathrm{Re}(a\bar{b})-\rho^2\\ &= (\lambda^2+\mu^2)\rho^2+2\lambda\mu\mathrm{Re}(a\bar{b})-\rho^2\\ &= (\lambda^2+\mu^2-1)\rho^2+2\lambda\mu\mathrm{Re}(a\bar{b})\\ &= ((\lambda+\mu)^2-2\lambda\mu-1)\rho^2+2\lambda\mu\mathrm{Re}(a\bar{b})\\ &= 2\lambda\mu(\mathrm{Re}(a\bar{b})-\rho^2)\end{aligned}$$

したがって、左辺＝右辺。 $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{OP}^2 - \rho^2$ 。

数学工房　2008年11月1日発行
発行人　桑野耕一
編集人　編集Gr.
(平田裕一・増田卓・坂口尚文)

連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：08065762691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp(携帯、緊急用)
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401