Math.
NO.99
www.sugakukobo.com

会報２００９年４月

数学工房

会報リニューアルのお知らせ

ご連絡が遅くなりましたが、先だって、編集会議が開かれ、会報をリニューアルすることになりました。速報性を要する部分を、メールによるお知らせと HP に移し、会員の活動、セミナー報告、桑野道場等を充実させる予定です。また発行回数は学期ごと年３回とし、必要に応じて増刊号を出します。会員のグループの活動や研究会も活発になってきていますので、新しい状況に適した形にしていきたいとおもっております。
集中セミナー、通常講座メールアドレスの登録がない会員には、回数の減った会報の代わりに、封書または葉書でお知らせをいたしますが、もしアドレスをお持ちなら、この機会に、登録されることをお勧めします。

(桑野耕一)

集　中　講　座　案　内

2009年4月～5月

０９年春の集中セミナー

<< 春学期集中講座一覧 >>

講座名	日程
確率解析入門	４月 12 日
無限を捉える作法	４月 18・19 日
Jordan 標準形の展開	４月 25・26 日
一般計量を持つ線型空間概論Ｉ	５月２・３日
複素関数論の展開	５月４・５日

■数学の基本語彙と文法としての確率解析入門

数学の基本語彙と文法講座は、数学工房の入門講座のなかで、現代的な数学にスムースに進むために飛びぬけた重要性を持っています。遠方の会員からも纏めてやれないかとのお問い合わせをしばしばいただきます。そこで今回は、１日講座の形で、確率論の記述の基礎を材料に、集合や写像の概念の用法を実習します。特に数学的記述能力に不自由を感じている人にオススメです。

$\boxed{0}$　確率の記述の数学的枠組み

（１）　標本空間
（２）　事象の代数
（３）　確率事象族と確率
（４）　確率計算の基本的ルール

$\boxed{1}$　確率変数と分布

（０）　写像の原像
（１）　確率変数

■無限を捕らえる作法

数学の基本語彙と文法のアドヴァンストコースで普段余り纏めて意識して扱うことの少ない、超越論法の基礎、選択公理と Zorn の補題を中心に例を扱う。後半は、無限次元線形空間、自由ベクトル空間の諸性質を扱います。

$\boxed{0}$　イントロダクション

Hammel Basis と Cauchy の関数等式

$\boxed{1}$　選択公理の用法

$\boxed{2}$　Zorn の補題　とその用法

（１）順序系、上界、下界、上限、下限
（２）　Zorn の補題
（３）　幾つかの存在定理

$\boxed{3}$　無限次元線形空間

（１）　有限台を持つ写像の空間
（２）　無限次元線形空間への基本概念の延長
（３）　次元、同型
（４）　自由ベクトル空間

■Jordan 標準形の展開

Jordan 標準形は、有限次元の線形代数では究極の構造定理である。無限次元の作用素論では、この様なことは望めない。但し、これは理論的な問題で具体的な問題に対してはもっと簡便な標準形が存在することが多い。しかし理論的には最も完全な形になる。
いつも Jordan 標準形は構成法までで終ってしまうので、今までも何度も会員から Jordan 標準形そのものを中心に据えたセミナーへの要望が出ていたので、今回は、抽象線形代数と線形変換の既約成分への分解等に対する知識を一通り持っている事は前提にする。た

だし、第１日目に概略は復習する。
有限次元の線形代数の基礎知識を仮定する。

（１）　線形変換への既約成分への分解(概論)
（２）　Jordan 標準形の存在と構造
（３）　基本的な性質(演習)
（４）　典型モデル

■一般計量を持つ線型空間概論 I

抽象線型代数（数学工房の講座では G）特に内積空間上の作用素既習者あるいは、同等以上の素養をお持ちの方向けの講座。不定計量と定値計量を統合した形で論じていく。不定計量に移行する事により、内積空間をもっぱら扱っていたときには,見えにくい、計量の本質的な構造が見えて来るでしょう。例えば Sylvester の慣性律の意味がハッキリと理解されるでしょう。

（１）　計量と計量の分類、典型例
（２）　部分空間の計量とグラム行列式
（３）　直交系と直交補空間
（４）　正規直交基底の存在と計量の標準形、Sylvester の慣性律
（５）　Minkowsky 空間
（６）　計量同型
（７）　線型形式の表現定理と双対空間

■複素関数論の展開 I　有理形関数入門

複素関数論の一般論の基礎（Cauchy の積分公式、Cauchy-Taylor の表現定理）辺りまでの知識を仮定します。有理形関数は、正則関数を含む最も良い性質の関数のクラスで、多くの重要な関数を含んでいます。これらの基礎付けの上に、適切な機会に楕円関数の理論まで扱う予定です。

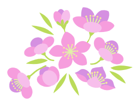
$\boxed{1}$　孤立特異点

（１）　Riemann の延長定理
（２）　孤立特異点、極
（３）　極の周りの展開
（４）　真正特異点

$\boxed{2}$　有理形関数

（１）　有理形関数の代数
（２）　有理形関数環の性質と定義域の性質
（３）　一致の定理

$\boxed{3}$　有理形関数の収束列



[備考]
集中講座の時間帯と料金は以下のようになっています。

１日セミナー	日曜日	11:00～17:00
	料金¥10,000(学生¥8,000)	
２日セミナー	１日目	14:00～18:00
	２日目	11:00～17:00
	料金¥16,000(学生¥12,000)	

夏 学 期 講 座 案 内

2009年5月～8月

2008 年春学期講座は、入門６講座、初級２講座、中級２講座を開講します。

<< 夏学期講座一覧 >>

略号	講座名	講座開始日	レベル
I.A	解析教程 I	５月 17 日	入門
I.B	Fourier 変換と関数空間	５月 23 日	入門
I.C	確率測度概論	５月 22 日	入門
I.D	初等線型代数と微積分 I	５月 24 日	入門
I.E	距離空間上の測度	５月 29 日	入門
I.F	数学の基本語彙と文法	５月 16 日	入門
E.A	距離空間と位相 I	５月 17 日	初級
G.	抽象線型代数 I	５月 24 日	初級
M.A	擬凸上の存在定理	５月 16 日	中級
M.B	多様体上の解析学	５月 23 日	中級
O.C	H.Cartan の複素関数論	５月 27 日	フリー

■　入門講座

◆I.A　入門解析教程（解析学とは何か？どこから来たのか？）

数学工房の尤も基本的な講座のひとつです。数学の歴史の流れから幾つかの材料を題材に、想像力を働かせて、その数学が生まれてくる現場にたち会い、解析学とは何かを考えていきます。解析学の歴史のなかで現在の解析学（数学）の在り様の理解の鍵になると思われるトピックスを選びました。

今年度の解析教程は、昨年度の新しい材料が加わることにより１８世紀から１９世紀前半の内容の充実が図られている。数学は、世界と向き合った人間が作りだすものだということを掴んでいただきたいとおもっています。

◆入門解析教程 I

（０）　イントロダクション
（１）　２項係数
（２）　Fibonacci
（３）　多項式と多項式補間

＊　以下 Ⅱ　無限小解析の方法と初等超越関数の発見
　　　　Ⅲ　微積分学の発展 I
　　　　Ⅳ　微積分学の発展 Ⅱ

◆I.B　Fourier 解析序説 I

１７世紀に誕生した解析学は１８世紀に入ると爆発的な発展を遂げ、１８世紀末には言わば、解きえる問題は全て解かれてしまっている停滞期に入っていたそこに彗星のように現れたのが、Fourier の新しい方法である。新方法の基礎付けの努力が、現代的な関数概念、集合論、積分論、一般位相の理論を生み出し。１８世紀の古典解析に対し、実解析学、関数解析学の時代が始まるのである。
Fourier 級数の概念から始まり、三角級数の起源から Dirichlet の仕事まで
（実解析縁起）、Fourier 級数の幾何学的理論、Fourier 級数の総和法などを扱う。

◆Fourier 級数

（１）三角級数論縁起(実解析学の源泉)

（２）Fourier 級数の概念と基本的な問題
（４）　Fourier 級数の幾何学
（５）　トピックス
（６）　畳み込みの代数
　Fourier 解析序説Ⅱ　（Fourier 変換１）に続く。

◆I.C　可換代数入門　Modules
　前回に続いて Atiyah-MacDonald を下敷きにした概論で例はなるべく解析学からとる予定である。完全系列の理論や代数的なテンソルの理論を学ぶ絶好の機会である。
（１）　イデアルの拡大と縮小
（２）　形式冪級数環と多項式環（１章練習問題から）
（３）　Module　の定義と基礎理論
（４）　有限生成加群
（５）　完全列
（６）　加群のテンソル積

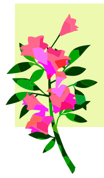
◆I.D　初等線形代数と微積分Ⅰ－Ⅲ
I.A、I.F と伴に本格的な学びに入る前に、必ず学んで置くべき基本知識である。微積分とは局所的には Euclid 空間の初等図形の計量に他ならない。微分法は、写像を定義域の与えられた点の近くで、線形写像で近似することである。初等線形代数を学びつつその概念を利用して、任意次元の Euclid 空間の初等幾何を展開する。
その結果を用いて、曲面上の積分、高階の微分、多変数の Taylor 公式あたりまでを論ずる。

◆　初等線形代数と微積分Ⅰ
（１）数ベクトル空間
（２）内積・直交性
（３）Euclid 空間の初等幾何
（４）線形部分空間、Span、商空間
（５）行列と線型写像
（６）随伴と写像の微分法
以下Ⅱ　行列式と領域上の積分、曲面上の積分
　　Ⅲ　高階微分、Taylor 公式
に続く。

◆I.E　距離空間上の測度
岩波講座　現代数学の基礎[測度と確率]に沿った講義で今回は第４章から材料を選ぶ。０８年秋、０９年春の講義は、純粋に測度の抽象論で、基礎空間の幾何学的な構造とは、無関係に存立する理論で、自然な解析学と、そのままでは結びつかない。既に論じた、積分論の一般論、と測度の構成の理論を既知として Euclid 空間の開集合系から自然に生成される Borel 測度空間を取り扱う。ここで漸く関数の連続性と積分の概念が結びつく。
１．Euclid 空間上の測度
（１）　Lebesgue-Stieltjes 測度
（２）　Lebesgue 非可測集合
（３）　Riemann 積分と Lebesgue 積分
（４）　Radon 測度

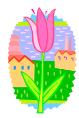
◆I.F　数学の基本語彙と文法
数学の記述法の根幹という意味で尤も重要な講座で、この講座を抜かして他の講座をとることは、あまりお勧めできない。原則として、学期ごとに開講する。意識的に学ぶことの少ないΣの用法を、多重添え字の場合を中心に、応用練習として同じ対象に異なった和の束をすることにより様々な表現が得られることを実践的に学ぶ。数学的帰納法も状況に応じて、様々な、バリエーションを使いこなすことを学ぶ。（２）、（３）で扱うのは理論としての集合論ではない。記述としての、集合写像の取り扱いに習熟することが狙いです。

（１）　総和記号
（２）　数学的帰納法の様々な形
（３）　集合の代数
（４）　写像（像と原像）
（５）　変換と変換群



■　初級講座
◆抽象線形代数入門Ⅰ
初級稽古の要になる講座の一つで、I.F、I.D　と同レベルの素養があれば受講できる。抽象の方法を身につけるために必須の基礎講座
Ⅱ表現と実在（線型写像）Ⅲ　内積空間の幾何と作用素のクラスに続く。
Ⅰ表現と実在（線型空間論）
（１）　線型空間の定義と典型的な線型空間
（２）　線型部分空間、部分空間の共通部分と和
（３）　生成される線型空間、直和
（４）　線型従属・独立
（５）　次元と基底、座標写像
（６）　抽象の用法

◆位相と解析学序論Ⅰ
最も基本的な型稽古で、長い期間にわたり改良を繰り返し用いられてきました。０８年度は、抽象位相を応用上重要な道具立てを中心に幅広く扱いましたが、今期は距離空間に焦点を絞り、演習の時間をもう少し取りたいと考えています。「距離の定義から Baire の Category 定理まで。」を３期に分けて学ぶ。位相の応用の実践は、IB、IE、MA、MB 等でいたるところで遭遇することになります。
◆　距離空間の位相Ⅰ、連続性
（１）　距離関数、距離空間　定義と典型例
（２）近傍系、開集合系、閉集合系　閉包　開核
（３）　点の位相的分類
（４）　点列の基本的性質・完備性
（５）連続関数・一様連続関数
（６）距離空間の正規性



■　中級講座
M.A　◆擬凸領域上の存在定理
Hilbert 空間上の閉作用素の理論を道具として存在問題を解く。こうして、正則領域(正則関数の存在領域)の概念が、擬凸性で特徴付けられることが分かるのである。ここに岡によって最終的に解決された、多変数関数論の大問題についてのトピックスを切り上げる。現在の多変数関数論はここから始まるわけであるが、数学工房の講座の性格上通常講座ではここまでとする。続きは、また別の機会に取り上げたい。来期から、Hilbert 空間上の作用素環（C*環）の位相代数的なア

プローチか Schwarz 超関数を取り上げる予定です。
（０）　Hilbert 空間の閉作用素
（１）　重み付き２乗か積分(p,q)形式の作る Hilbert 空間
（２）　ノルム基本評価
（３）　Neumann 問題の弱解
（４）　弱解の微分可能性

M.B　◆解析のための多様体入門Ｉ（多様体の概念）
解析が展開される場としての多様体を材料とした演習。入門、初級で培った全ての数学的知識の総合演習である。今期は可微分多様体の定義から出発し、関連する概念の構造の理解に時間をかける。
以下次のような内容を予定している。
解析のための多様体入門Ⅱ　ベクトル場と微分作用素
解析のための多様体入門Ⅲ　微分形式とテンソル場
解析のための多様体入門Ⅳ　外微分とコホモロジー
（１）　多様体の定義と典型的な例
（２）　微分可能関数、局所座標
（３）　写像の微分
（４）　接空間
（５）　関数の微分と臨界点
（６）　Sard の定理
写像の微分

［備考］
各講座とも１講座￥30000（税込)、学生￥21000（税込)。途中参加の場合、参加回数×￥5000＋￥2000（テキスト代・手数料）です。お支払方法については事前にお申し出があれば対応しますので御相談下さい。なおテキスト配布の都合上お申込みは早めにお願いします。

会　員　か　ら　の　メ　ッ　セ　ー　ジ

このコーナーでは会報のリニューアルに伴い、数学工房で学習されているみなさんからのメッセージを徐々に掲載していきます。会員のみなさんには数学工房での講座の感想や自分の数学に対する思いなど、自由に書いていただきます。今回は福田慧さんと会報執筆を担当している私、増田卓からのメッセージを紹介します。

■■■■数学で社会現象を解明（福田慧）■■■■

写真 1. 福田慧さん

2008 年 1 月に入会した福田慧と申します。今は大学で主に経済学を学んでいます。その動機の一つとして、数学という言語で（自然現象は然ることながら）さらに人間行動や社会現象をモデル化して、理解したいと思うようになったことにあります。

私が数学工房に入会したきっかけは、第一に、厳密な、あるいは抽象的な数学を体系的に学びたかったことがあります。勿論、大学で数学の授業等は一応ありましたが、残念ながら非数学科向け（さらに所謂文科系）の数学ということで、曖昧にならざるを得ない事情がありました。私自身数学は好きなので、好奇心から、第一に、曖昧で、また個別具体的に問題を解決するという意味でその場しのぎの数学であっても、少しずつ先へ進むということと、第二に、数学書を少しずつでも読み進めるという作業を行っていました。ただ、数学を用いて現象を理解したい、数学を学び進めたいという気持ちが先走ることと、自分が行っている推論の妥当性等への疑心暗鬼の気持ちとのジレンマに悩まされ続けていました。そこで、(『数学セミナー』でその存在は前々から知っていた）数学工房に、大学が冬休みになる 1 月後半から、参加してみました。

私は 1 月から I.F.(数学の基本語彙と文法)、I.E(数学書を読もう)、また 5 月からは I.A(解析教程)，I.D(初等線型代数と微積分)，E.A(抽象位相)に参加し、もうすぐ 1 年が経ちます。まだまだ始まったばかりですが、（今後参加する方、また振り返りという意味で自分のためにも）この 1 年間について雑感を書きたいと思います。

まず、I.F では、ご存知の通り(1)総和記号や数学的帰納法、(2)集合の演算、(3)写像について学びます。総和記号を帰納的に定義することによって、その性質を証明したことは圧巻でした。例えば、Σ記号下の対象の和は、加える順序に依らないということを証明しましたが、その応用として論理式 γ_n を、

$$\gamma_1 := (\alpha_1 \to \beta) := \left(\left(\neg\alpha_1\right) \vee \beta\right)$$

とし，また γ_n が定義されているとして

$$\gamma_{n+1} := \left(\alpha_{n+1} \to \gamma_n\right) := \left(\left(\neg\alpha_{n+1}\right) \vee \gamma_n\right)$$

のように定義します。

また $\vee_{i=1}^{n}\alpha_i$ を $n=1$ の時は α_1 、 $n>1$ の時

$$\vee_{i=1}^{n}\alpha_i = \left(\vee_{i=1}^{n-1}\alpha_i \vee \alpha_n\right)$$

と定義すれば、総和記号とパラレルに論理和もその順序に依らないことと、また

$$\gamma_n = \left(\alpha_n \to \left(\alpha_{n-1} \to \cdots \to \left(\alpha_1 \to \beta\right)\right)\right)$$

は、置換 σ に対して

$$\gamma_{\sigma(n)} = \left(\alpha_{\sigma(n)} \to \left(\alpha_{\sigma(n-1)} \to \cdots \to \left(\alpha_{\sigma(1)} \to \beta\right)\right)\right)$$

と同値であることも証明できます。この例が興味深いかどうかは判断しかねますが、身近な総和記号のような対象に対しても、普段何気なく捉えていていたこと、また帰納的に定義することによってΣ、Π、∪、∩、∨、∧等の性質を証明することができることに気づくことができたのは一つの収穫です。桑野先生は、記号法の扱いに慣れるということを強調されていましたが、上のように考察している数学的対象を正確に定義するという意味（帰納法に関しても、帰納法を適用する命題の形、パラメータに気をつけるということにも繋がっていると言えます)、また（例えば変数変換等の意味において）対象に臨機応変に対応するという意味で有益でした。特に、多重総和記号に関する一連の変数の変換などは、(Cauchy=Schwarz の不等式の証明でも見たように)その後も至る所で役に立っています。

I.F.について長く書きすぎてしまったため、他の講座について簡潔に雑感を書きます。次に I.E は、私が受講した時は、上野健爾(2004)『代数入門』岩波書店、の第 4 章「複素数」を読みました。本を読んだ後に自分の言葉でその定義をまとめることが講座の一つのテーマでした。普段自分一人で本を読んでいた時には、定義や構成を自分なりに変えることに多少不安になってしまい、その本の受け売りになってしまうこともあります。一人で数学書読んで学ぶことと数学工房で学ぶと言うことの差異の一つとして、数学的対象・理論をいかにして（自分の言葉で）理解し、捉えるかということについて（また数学そのものへの姿勢という意味でも)、桑野先生や他の受講生の方の存在は大きいです。

現在受講中の I.A や I.D, E.A に関しては、まず I.A, I.D（特に I.A）は、私にとっては、(例えば二項係数やフィボナッチ数､級数等の面白い性質･値を学ぶ等々の意味において）他の講座に比べ具体的な数学的対象に対して遊んでいるという感覚があります。講座のテーマ・目下の課題は、与えられた式を証明したり計算したりするのではなく、いかに結果を予想するか、発見するかということです。E.A については、抽象数学を学べるということと、これからより高度な解析学を学んでいきたいということで、期待しながら学んでいます。

■■■■３年間を振り返って（増田卓）■■■■

写真 2 会報執筆担当者　増田卓

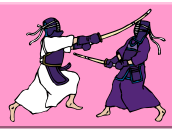
私の数学工房での勉強も早いもので、この春学期を終えると丸３年になります。大学の学部生に例えると、来年度はいよいよ卒業研究に臨む、と言ったところでしょうか。ちょうどいい機会ですので、これまでの数学工房での学習について振り返ってみたいと思います。私は１年目に IA コースと IB コースで数学の基本語彙について学びました。ここで私はさまざまな数学の基本について習得することができました。例えば、集合演算の基本的な性質や２重総和記号、３重総和記号の展開方法などがあります。私の場合、写像の逆像と逆写像の違いが分かっていませんでした。これらは同じ記号を使って表現されるので要注意です。特に確率論や抽象位相では写像の逆像は頻繁に出現します。私のように写像の逆像を逆写像と勘違いしたまま学習をしても、すぐに行き詰まってしまいます。このような理由から数学の基本語彙は最初に抑えておかなければならないものだと言えるでしょう。数学の基本語彙については、桑野先生が常々重要だから最初に学習して欲しいと言っています。数学工房で３年間学習してその意味が分かったような気がします。何を学ぶにしても言葉というのは非常に重要です。数学の場合、問題が複雑化してくると、だんだん直観に頼れなくなってきます。そのとき頼りにするのは論理になると思うのですが、言葉の意味が曖昧なままだとその論理に頼ることもできなくなり、迷宮に入り込んでしまいます。

現在は IF コースでまとめて数学の基本語彙について学べるようです。これから数学工房で数学を学ぶ方には是非はじめに IF コースを取って言葉の意味を明確にしておくことをお勧めします。特に数学科出身でない方にはお勧めです。分かっていたつもりでも色々な発見があると思います。

次に私が数学工房で学んだことは、分からなくても決してあきらめてはいけないということです。私は去年から抽象位相をとっていますが、初めて数学工房で抽象位相に遭遇したときは何を議論しているのかが全く分かりませんでした。定義の内容が理解できないの

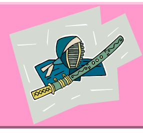
です。具体的に一例をあげると、距離空間における完備性の定義があります。距離空間におけるある集合が完備であるとは､「任意のコーシー列の収束点がその集合内にあること」となっています。私はここで任意のコーシー列がどんなものなのか、判然としませんでした。例えば、数直線上において開区間(α，β)は完備ではないが、閉区間[α，β]が完備です。私はここで任意のコーシー列とは数直線全体で定義される収束列全体を暗黙のうちにイメージしていたため、これらの区間の完備性になぜ違いが生じるのか分かりませんでした。任意のコーシー列をそれぞれの区間内に限定して考えなければならないという暗黙の制約に気づかなかったのです。したがって、収束点が区間をはみ出るコーシー列がいくらでも作れてしまうと思ったのです。この状態で桑野先生に質問を投げかけても質問の内容がとんちんかんなものとなってしまい､「何をおっしゃっているのか分かりません。」といわれてしまう始末です。このような理解不能な状態がしばらく続きましたが、自分の頭の中で色々と論理の試行錯誤を繰り返していると、あるとき定義の裏に隠れた暗黙の制約に気づくことができました。そして、このように自分の抱き続けてきた疑問が解消すると､一気に理解が進みました。少なくとも以前よりは抽象位相で出てくる基本的な定義の意味が分からないということはなくなりました。また、分からないことが出てきても対処の仕方が分かったような気がします。人間やはりあきらめてはいけないということをつくづく感じます。

　このように私が数学工房の３年間で学んだことは基本の重要性とあきらめないことの大切さです。３年も勉強してそれだけしか学んでいないのか、と誰かに言われそうですが、私にとってはずいぶんの進歩だと思います。これからも基本をしっかり押さえながら、壁にぶつかっても決してあきらめずに数学の勉強を続けていこうと思います。



入門桑野道場（第１０回）

/// 記　桑野道場師範代　半田生久太///



　会報リニューアルに伴って､「入門桑野道場」のコーナーを充実させることにしました。今までは印刷物の都合上、出題の意図や十分な解答を掲載することができませんでしたが、これからはこれらを充実させていくつもりです。

　今回は桑野道場の問題と解答作成にいつも協力していただいている半田伊久太さん(右の写真)に直接記事を書いていただきました。

写真３ 桑野道場師範代　半田伊久太さん

前回の問題

1.　$0<h<1$のとき、任意の$n \in \mathbb{N}$に対して $1-nh \leq (1-h)^n$ を示せ。

2.　$\alpha := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\beta := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ とする。 これら２つの極限α, βが存在することは既知として、$\alpha=\beta$を示せ。

訂正とお詫び

前回出題した問題に誤りがありました。また問題の意図を全然伝えていなかったため こちらの意図とは違った解答を寄せてくれた方がいました。ここに訂正とお詫びをいたします。

- 問題の訂正

２番目の問題は次のようになっていました。「$\alpha := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\beta := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ とする。これら２つの極限α, βが存在することは既知として、$\alpha=\beta$ を示せ。」 この$\beta := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$は $\beta := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ の間違いです。つまり$\beta := \sum$ の$k=1$は$k=0$ の間違いです。 これでは$\alpha=\beta-1$ となり$\alpha=\beta$ となりません。訂正してお詫びします。

- この問題の意図

$f(x)=e^x$ とすると$\alpha=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=f(0)=e$ を既知として 解答を寄せてくれた方がいました。簡単のため$\alpha_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \beta_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ と置きますと、 こちらの意図としてはこれらのことは知らないとして

$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を直接示してほしいということでした。 「2 つの極限α,βが存在することは既知として」というのは、 $\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$ を示してもいいですよというつもりでした。こういうことを明示しなかったのは、 これらの他にもやり方はいろいろあるためでしたが配慮がかけていました。

解答

解 1.

$f(x):=1-hx$、$g(x):=(1-h)^x$ for $\forall x\in\mathbb{R}$ とする。
$f(0)=g(0)=1$、$f(1)=g(1)=1-h$でありg は下に凸の関数であるので$x\geq 1$ で $f(x)\leq g(x)$
従って特に任意の$n\in\mathbb{N}$に対して、$f(n)\leq g(n)$

解 2.

2 項定理から、$n\geq 2$ として、$\alpha_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

また、$\beta_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
0<\beta_n-\alpha_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}\\
&< \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left\{1-\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\right\}\\
&\leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left\{1-\left(1-\frac{(k-1)^2}{n}\right)\right\}\cdots(\text{ 1. })\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2}{k!}<\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}=\frac{1}{n}\beta_{n-2}\leq\frac{1}{n}\beta\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

即ち、 $\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$ よって $\alpha=\beta$が成り立つ。

解説

いきさつ

かなり昔（20 年近く前)、2 番目の問題を考えている知人がおりました。本に載っていたのは 以下のようなやり方だったように記憶しています。
$\alpha_n\leq\beta_n\,\forall n\in\mathbb{N}$ はすぐわかるので、$\alpha\leq\beta$ よって$\beta\leq\alpha$を示せばよい。

$2\leq n\leq m$ として $\alpha(n,m):=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)$ とおく。 特に

$\alpha(n,n)=\alpha_n$ に注意。 $2\leq n\leq m\leq m'\Rightarrow\alpha(n,m)\leq\alpha(n,m')$ かつ
$2\leq n\leq n'\leq m\Rightarrow\alpha(n,m)\leq\alpha(n',m)$であることはすぐにわかる。 したがって、$\{\alpha_n\}$が単調増加であることに注意すると $2\leq n\leq m$ となる 任意の自然数 n,m に対して
$\alpha(n,m)\leq\alpha(n,n+m)\leq\alpha(n+m,n+m)=\alpha_{m+n}\leq\alpha$
$\forall n\in\mathbb{N}$ を固定すると、$\alpha(n,m)\to\beta_n(m\to\infty)$ であるので $\beta_n\leq\alpha$ for $\forall n\in\mathbb{N}$ よって$\beta\leq\alpha$
彼は言うには「正しい気はするが、どうもしっくりこない。 もっと直裁に例えば

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to 0(n\to\infty)$ を示すようなことはできないのか？と私に尋ねてきました。その場にもう 1 人いた人は「そのやり方で絶対できる」と自信ありげに言っていたので、考えてみることにしました。
1 週間ほど悩んで、1 番目の不等式を用いればできることに気づき、できたのが前述の解答です。

解 1.の解説

nに関する数学的帰納法を用いている人がほとんどでした。もちろん OK です。 その他、h を実変数とみて、関数$f(x):=(1-x)^n-(1-nx)$ を考えて微分を用いてf が増加関数であることを示した方もいました。
私のやり方はn のほうを実変数とみて、$f(x):=1-hx$、$g(x):=(1-h)^x$ for $\forall x\in\mathbb{R}$とおいてグラフの概形 を描くとg は下に凸ですから、$x\geq 1$でg のグラフはf の上にあることがすぐにわかります。

解 2.の解説

上の不等式を用いて$0<\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$を上から 評価していけば、$\to 0(n\to\infty)$ がいえます。 鈴木史郎さんは違うやり方ですが、解答されていました。

今回の問題

ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の空でない部分集合A,Bについて

$$d(A,B)=\inf\{\|x-y\|;x\in A,y\in B\}$$

と定義する。

ただし、$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\|x\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2}$ のこととする。

1. Aが有界閉集合でかつBは閉集合とする。このとき

$$\exists a\in A,\exists b\in B,\text{s.t. }\|a-b\|=d(A,B) —— (*)$$

2. を示せ。
3. 1.より条件を弱くしてAが閉集合でかつBは閉集合とする。 このとき(*)は必ずしも成立しない。$\mathbb{R}^2$で例をあげよ。

なお、1.では Weierstraß - Bolzano の定理
「$\mathbb{R}^n$の有界閉集合K上の点列は Kの点に収束する部分点列をもつ」 を用いてよい。

数学工房　2008年1月1日発行
発行人　　桑野耕一
編集人　　編集Gr.増田卓・坂口尚文・平田裕一・半田伊久太
連絡先
オフィス電話：042-495-6632
数学工房連絡専用(携帯)：08065762691
連絡は極力e-メールをご利用下さい。
e-mail：sugakukobo@w5.dion.ne.jp
e-mail：monteverdi2007@erzeb.ne.jp (携帯、緊急用)
ホームページ：
http://www.sugakukobo.com
数学工房 教室
〒170-0003
豊島区駒込1-40-4
全国蕎麦製粉会館2F 202-203
数学工房 オフィス
〒204-0023
清瀬市竹丘1-17-26-401