「数学工房」会員向け問題と解答例

— 総集編 —

熊野充博

二つの問題とその解答例 (別解あり) です。

【問題 A】 $l, m, n \in \mathbb{Z}$ で $l+m+n=0$ かつ $lmn \neq 0$ とする。このとき

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$$

であることを示せ。
[証明] 背理法で行います。
$P := 1/l + 1/m + 1/n$ とおく。
従って、$lm+mn+nl = P \cdot lmn \cdots$① と書ける。
このとき、

$$P^2 = \frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{2(l+m+n)}{lmn} = \frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$$

$$(\because\ l+m+n=0)$$

$l^2, m^2, n^2 \geqq 1$ だから $0 < P^2 \leqq 3$、すなわち $0 < |P| \leqq \sqrt{3} \cdots$② である。
　いま、 $P \in \mathbb{Z}$ と仮定すると、②から $P = \pm 1$ である。
(1) $P = 1$ のとき。①より、$lm+mn+nl = lmn$
このとき、

$$(1-l)(1-m)(1-n) = 1-(l+m+n)+(lm+mn+nl)-lmn = 1$$

よって、$1-l, 1-m, 1-n$ は整数だから、これらのうち少なくとも一つは 1 でなくてはならない。すなわち、l, m, n のうち少なくとも一つは 0 である。これは $lmn \neq 0$ であることに反する。

(2) $P = -1$ のとき。①より、 $lm+mn+nl = -lmn$
このとき、

$$(1+l)(1+m)(1+n) = 1+(l+m+n)+(lm+mn+nl)+lmn = 1$$

よって、$1+l, 1+m, 1+n$ は整数だから、これらのうち少なくとも一つは 1 でなくてはならない。すなわち、l, m, n のうち少なくとも一つは 0 である。これは $lmn \neq 0$ であることに反する。
以上の矛盾は $P \in \mathbb{Z}$ であると仮定したからである。

$\therefore\ P \notin \mathbb{Z}$ 　　　　(証明終わり)

(別解)
$P := 1/l + 1/m + 1/n$ とおく。
次の等式を考える。題意より、$l + m + n = 0$ だから、

$$\begin{aligned}(P - \tfrac{1}{l})(P - \tfrac{1}{m})(P - \tfrac{1}{n}) &= P^3 - (\tfrac{1}{l} + \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n})P^2 + \tfrac{l+m+n}{lmn}P - \tfrac{1}{lmn} \\ &= P^3 - P^3 - \tfrac{1}{lmn} \\ &= -\tfrac{1}{lmn}\end{aligned}$$

上記の両辺に $-lmn$ をかけて整理すると、

$$(1 - lP)(1 - mP)(1 - nP) = 1 \cdots ①$$

いま、 $P \in \mathbb{Z}$ と仮定する。

①より、$1 - lP,\, 1 - mP,\, 1 - nP$ は整数だから、これらのうち少なくとも一つは 1 でなくてはならない。すなわち、$lP,\, mP,\, nP$ のうち少なくとも一つは 0 である。

従って、$(lP)(mP)(nP) = P^3 \cdot lmn = 0$ となるが、$P \neq 0$ だから、$lmn = 0$.

これは $lmn \neq 0$ であることに反する。
以上の矛盾は $P \in \mathbb{Z}$ であると仮定したからである。

$$\therefore\ P \notin \mathbb{Z}$$

(証明終わり)

【問題 B】$a,\, b,\, c$ を相異なる整数とする。このとき $P(a) = b,\, P(b) = c,\, P(c) = a$ を満たす整数係数多項式 $P(x)$ は存在しないことを証明せよ。
[証明]

背理法を用います。
いま、題意を満たす整数係数の多項式 $P(x)$ が存在すると仮定します。
因数定理から、 $P(x) - P(y)$ は $x - y$ で割りきれます。すなわち、

$$P(x) - P(y) = (x - y)Q(x,\, y)$$

と書けます。ここで $Q(x,\, y)$ は $x,\, y$ の整数係数多項式です。
このことを利用すると、題意より次のような等式が成り立ちます。

$$b - c = P(a) - P(b) = (a - b)Q(a,\, b)$$
$$c - a = P(b) - P(c) = (b - c)Q(b,\, c)$$
$$a - b = P(c) - P(a) = (c - a)Q(c,\, a)$$

便宜上、$Q(a,\, b) = Q_1,\, Q(b,\, c) = Q_2,\, Q(c,\, a) = Q_3$ とおきます。
すると、上記の等式は、

$$b - c = (a - b)Q_1, \quad c - a = (b - c)Q_2, \quad a - b = (c - a)Q_3 \ \cdots ①$$

と書けます。これらを辺々かけますと、

$$(b - c)(c - a)(a - b) = (a - b)(b - c)(c - a)Q_1Q_2Q_3$$

題意より $a,\, b,\, c$ は異なる整数だから、$(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$ で上式の両辺を割りますと、

$$Q_1Q_2Q_3 = 1 \cdots ②$$

ここで Q_1, Q_2, Q_3 は整数ですから、

$$Q_1 = \pm 1, \quad Q_2 = \pm 1, \quad Q_3 = \pm 1$$

です。

$Q_1 = -1$ のとき。$a - b = -(b - c)$ より、$a = c$ となるので、題意の $a \neq c$ に反します。従って、$Q_1 = 1$ です。

同様にして、$Q_2 = 1,\ Q_3 = 1$ を得ます (これらは②を満たします)。

従って、①より、

$$b - c = a - b, \quad c - a = b - c, \quad a - b = c - a$$

よって、$b - a = c - b = a - c \cdots$③ となるから a, b, c, a はこの順で初項 a 公差 $b - a$ の等差数列をなします。ゆえに、第 4 項 a は、

$$a = a + 3(b - a) \qquad \therefore\ b - a = 0$$

よって③から $a = b = c$ となりますが、これは題意の a, b, c が相異なる整数であることに矛盾します。これは題意を満たす整数係数多項式 $p(x)$ が存在すると仮定したことから生じたものです。

以上から、題意を満たすような整数係数多項式は存在しません。

(注) 上記の論法を使えば、一般化は容易です。

(別証明 1) 背理法で行います。

題意を満たす整数係数多項式 $P(x)$ が存在すると仮定します。

$P(x)$ を $(x - a)(x - b)(x - c)$ で割った商を $Q(x)$、余りを $R(x)$ とします。本当は、$Q(x, a, b, c),\ R(x, a, b, c)$ と書くべきですが、記述の簡単化のため上記の通り、略記します。

$Q(x), R(x)$ は整数係数多項式です。また、$R(x)$ は x の高々 2 次式です。そこで、$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x) + R(x)$ と書けるので順次、$x = a, b, c$ を代入すると題意より、

$$P(a) = R(a) = b, \qquad P(b) = R(b) = c, \qquad P(c) = R(c) = a$$

が成り立ちます。そこで、$R(x) = px^2 + qx + r$ (p, q, r は a, b, c の多項式だから、すべて整数) とおくと、

$$pa^2 + qa + r = b, \qquad pb^2 + qb + r = c, \qquad pc^2 + qc + r = a$$

これを、p, q, r についての連立方程式とみて解くと、クラメルの公式により、

$$p = \frac{\begin{vmatrix} b & a & 1 \\ c & b & 1 \\ a & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}}, \qquad q = \ldots, \qquad r = \ldots$$

分母はいわゆるヴァンデルモンデの行列式で、分母 $= -(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ です。また、分子の方は、行列式を展開すると、

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
&= (a-b)^2+(c-a)(c-b) \\
&= (b-c)^2+(a-b)(a-c) \\
&= (c-a)^2+(b-c)(b-a)
\end{aligned}$$

と変形できることに注意します。たとえば、$p = \ldots$ の分母をはらった等式 :

$$-(a-b)(b-c)(c-a)\cdot p = (a-b)^2+(c-a)(c-b) \quad (\, p \in \mathbb{Z}\,)$$

において、左辺の整数は $(c-a)(c-b)$ で割りきれるので、右辺は $(a-b)^2$ が $(c-a)(c-b)$ で割りきれなければなりません。よって、

$$(a-b)^2 = (c-a)(c-b)\, l \quad (\, l \in \mathbb{Z}\,) \qquad ①$$

と書けます。同様にして、次のように書けることが分かります。

$$(b-c)^2 = (a-b)(a-c)\, m \quad (\, m \in \mathbb{Z}\,) \qquad ②$$
$$(c-a)^2 = (b-c)(b-a)\, n \quad (\, n \in \mathbb{Z}\,) \qquad ③$$

そこで、①②③を辺々かけますと、

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \cdot lmn$$

題意より、a, b, c は相異なる整数だから、$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \neq 0$ で上式の両辺を割ると、$lmn = -1 \cdots$ ④ となりますが、l, m, n は整数ですから、

$$l = \pm 1, \qquad m = \pm 1, \qquad n = \pm 1$$
(ただし、積 $lmn = -1$ をみたす組合せとする)

でなければなりません。

$l = -1$ のとき : $(a-b)^2 = -(c-a)(c-b)$ より、

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$$

となります。ところが、この式の左辺は周知のように、

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = 0$$

ですから $a = b = c$ となり、題意に矛盾します。

ゆえに、$l = 1$ でなくてはなりません。 同様にして、$m = 1,\ n = 1$ を得るから結局、$lmn = 1$ となります。しかし、これは④に矛盾します。

このような矛盾が生じたのは、題意を満たす整数係数多項式 $P(x)$ が存在すると仮定したからです。
以上から、題意を満たす整数係数多項式は存在しません。

(証明終わり)

(別証明 2) 背理法で行います。
次の補題を用います。
＜補題＞
$l, m, n \in \mathbb{Z}$ で $l+m+n=0$ かつ $lmn \neq 0$ とする。このとき $1/l+1/m+1/n$ は整数ではない。
(補題の証明) 問題 A そのものですから、証明は略します。

以下、この証明は、別証明 1 と前半部分は同じです (当該部分を省略します)。

さて、p をもとめるクラメルの公式を変形すると、

$$-(a-b)(b-c)(c-a)\cdot p = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

しかるに、上記の右辺は、

$$\text{右辺} = (a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)$$

と書き直せます。そこで、$a-b=l,\ b-c=m,\ c-a=n$ とおくと、右辺 $=-ln-ml-nm$ となりますから、

$$-lmn\cdot p == -ln-ml-nm$$

両辺を $-lmn \neq 0$ で割れば、$l+m+n=0$ でかつ、

$$p = \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \quad (p,\, l,\, m,\, n \in \mathbb{Z})$$

と書けます。ところが補題により、右辺は整数ではありません。これは、左辺 p が整数であることに矛盾します。
このような矛盾が生じたのは、題意を満たす整数係数多項式 $P(x)$ が存在すると仮定したからです。
以上から、題意を満たす整数係数多項式は存在しません。

(証明終わり)

(提出日：2009 年 12 月 7 日)