問題１について　背理法により証明する。$1/L+1/m+1/n$が整数であると仮定する。
まず、L、m、n については互いに素としてもかまわない。・・・①
$L+m+n=0$より、$m+n=-L$
よって、$1/L+1/m+1/n=1/L-L/(mn)$
$=(mn-L^2)/Lmn$
これが整数Aであると仮定すると、$mn-L^2=LmnA$
$mn=L^2+LmnA$
$=L(L+mnA)$
したがって、mnはLで割り切れなければならないが、①より、$L=1$、-1でなければならない。$L=1$であるとき、仮定より、$1/L+1/m+1/n=1-1/mn$が整数であるから、$1/mn$が整数ゆえに、m、nは１、-1でなければならない。しかし、どんな組み合わせをもってしても、$L+m+n=0$にはなれず矛盾。$L=-1$であるときも同様である。
したがって、$L+m+n=0$ならば、$1/L+1/m+1/n$は整数でないことが証明された。

【①の証明】L，m，nの最大公約数をＢとし、L，m，nをＢで割った数をそれぞれL_0、m_0、n_0とかく。$L+m+n=0$より、$L_0+m_0+n_0=0$かつL_0、m_0、n_0は互いに素だから、上記の証明から$1/L_0+1/m_0+1/n_0$は整数でない。このとき、$1/L+1/m+1/n=1/B(1/L_0+1/m_0+1/n_0)$が整数 C であるとすると、$1/L_0+1/m_0+1/n_0=BC$は整数であることになり、矛盾する。

問題２　グラフを考えると、１次関数では実現できない。
２次関数$P(X)=t_0X^2+t_1X+t_2$（t_0，t_1，t_2は整数）が条件を満たす多項式であるとすると、$P(a)=b$、$P(b)=c$、$P(c)=a$より、
$t_0a^2+t_1a+t_2=b$　　・・・①
$t_0b^2+t_1b+t_2=c$　・・・②
$t_0c^2+t_1c+t_2=a$　・・・③
①−②、②−③より、$t_0(a^2-b^2)+t_1(a-b)=b-c$
$t_0(b^2-c^2)+t_1(b-c)=c-a$
これらから、$t_0(a+b)+t_1=(b-c)/(a-b)$・・・④
$t_0(b+c)+t_1=(c-a)/(b-c)$・・・⑤
したがって、④−⑤より、
$t_0(a-c)=(b-c)/(a-b)-(c-a)/(b-c)$
$t_0=(b-c)/\{(a-b)(a-c)\}+1/(b-c)$
$=1/(a-b)+1/(c-a)+1/(b-c)$
ここで、$L=a-b$、$m=c-a$、$n=b-c$とおくとき、L、m、n は０でない整数で、$L+m+n=0$より、t_0は整数ではない。これは仮定に反する。

3次以上の場合についても同様に証明される。条件を満たす多項式P（X）があったと仮定し、P（X）$=t_0X^n+t_1X^{n-1}+t_2X^{n-2}+\cdots+t_n$（$t_0$，$t_1\cdots t_n$は整数）とおく。P（a）＝b、P（b）＝c、P（c）＝a より、

$t_0a^n+t_1a^{n-1}+t_2a^{n-2}+\cdots+t_n=b$　・・・①

$t_0b^n+t_1b^{n-1}+t_2b^{n-2}+\cdots+t_n=c$　・・・②

$t_0c^n+t_1c^{n-1}+t_2c^{n-2}+\cdots+t_n=a$　・・・③

①ー②、②ー③より、

$t_0(a^n-b^n)+t_1(a^{n-1}-b^{n-1})+\cdots+t_{n-2}(a^2-b^2)+t_{n-1}(a-b)=b-c$

$t_0(b^n-c^n)+t_1(b^{n-1}-c^{n-1})+\cdots+t_{n-2}(b^2-c^2)+t_{n-1}(b-c)=c-a$

上式をそれぞれａ－b、ｂ－ｃで割って、

$t_0(a^n-b^n)/(a-b)+t_1(a^{n-1}-b^{n-1})/(a-b)+\cdots+t_{n-2}(a+b)+t_{n-1}=(b-c)/(a-b)$

$t_0(b^n-c^n)/(b-c)+t_1(b^{n-1}-c^{n-1})/(b-c)+\cdots+t_{n-2}(b+c)+t_{n-1}=(c-a)/(b-c)$

したがって、

$t_0\{(a^n-b^n)/(a-b)-(b^n-c^n)/(b-c)\}/(a-c)$

$+t_1\{(a^{n-1}-b^{n-1})/(a-b)-(b^{n-1}-c^{n-1})/(b-c)\}/(a-c)+\cdots+t_{n-2}$

$=\{(b-c)/(a-b)-(c-a)/(b-c)\}/(a-c)$

$=(b-c)/(a-b)(a-c)+1/(b-c)$

$=1/(a-b)+1/(c-a)+1/(b-c)$

K=3、・・・ｎについて、関数$(a^k-b^k)/(a-b)-(b^k-c^k)/(b-c)\}/(a-c)$を a についての関数Q(a)と考えると、剰余の定理より Q(c)=0 より、Q(a)は aーｃで割り切れ、Q(a) /(aーc）は整数になる。ゆえに、上式からt_0，$t_1\cdots t_n$が整数ならば、$1/(a-b)+1/(c-a)+1/(b-c)$は整数となり問題１に矛盾する。 c.t.f.d